



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛТЕТ ПО ХИМИЧНО И СИСТЕМНО ИНЖЕНЕРСТВО

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА“

Мариана Георгиева Факелова- Абу Хабиб

**МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ
НА ИНФОРМАЦИЯТА В ПАМЕТТА**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

за придобиване на образователна и научната степен „доктор”
по научна специалност 4.5. Математика
(Математическо моделиране и приложение на математиката)

Научни ръководители: проф. дмн Ангел Дишлиев, доц. д-р Катя Дишлиева

Научно жури: 1. проф. д-р Светослав Иванов Ненов – председател, рецензент

2. доц. д-р Николай Методиев Китанов - рецензент

3. проф. д-р Сеня Петрова Терзиева

4. доц. д-р Катя Георгиева Дишлиева

5. доц. д-р Михаил Колев Колев

София, 2019

Дисертационният труд е написан на 143 страници, съдържа 3 фигури и 5 таблици. Цитирани са 225 източника.

Представеният дисертационен труд е обсъден и приет за защита на заседание на научен съвет на научното звено на катедра „Математика“, състояло се на 06.02. 2019 г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 15.05. 2019 г. от 12:30 часа в зала 301, сграда „А“ на ХТМУ.

Материалите са на разположение на интересуващите се на интернет страницата на ХТМУ и в отдел „Научни дейности“, стая 406, етаж 4, сграда „А“ на ХТМУ.

Диференциални уравнения с променлива структура и импулси

Диференциалните уравнения с променлива структура и импулси са основен математически апарат за изследване на процеси, които:

- се изменят детерминирано във времето;
- многократно дискретно във времето са прекъснати.

При тези процеси задължително се изисква точките на прекъсване $t_1, t_2, \dots$ ($0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$) да са от първи род. С други думи ще предполагаме, че съществуват и са крайни границите:

$$\lim_{t \rightarrow t_i - 0} x(t) = x(t_i - 0); \quad \lim_{t \rightarrow t_i + 0} x(t) = x(t_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots$$

По-горе t_0 е началният момент на изучавания процес, а $x = x(t) \in R^n$, $t \geq t_0$ е фазата на процеса, т.е. съвкупност от n на брой динамични параметри, които са:

- основни и определящи същността и моментното състояние на процеса;
- неизвестни (или частично неизвестни);
- представляват предмет на изследване – изучаване на качествата, които те (координатите на неизвестната функция x) притежават.

Разглежданите в дисертационния труд проблеми се отнасят към:

- качествената теория на системите от нехомогенни диференциални уравнения с променлива структура и импулси (СНДУПСИ);
- техните приложения при създаването на математически модели на динамични процеси (свързани основно с изменението на информацията в паметта).

Изрично ще подчертаем, че изучаваният вид уравнения са удобен математически апарат за моделиране на специфични динамични процеси, които по време на своето развитие се характеризират със следните три особености:

1. Процесите са подложени на „кратковременни и интензивни“ външни въздействия. Предполага се, че времетраенето на външните смущения е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процеса, поради което може да се приеме, че те са „мигновени“ и се извършват под формата на импулси;
2. Между всеки две импулсни смущения процесът е детерминиран и се описва адекватно с помощта на диференциални уравнения и специфични за наблюдавания процес параметри (зависещи от времеви интервал – по-точно, интервалът между обграждащите го импулсни точки);
3. След импулсните въздействия е възможно изучаваният процес да се подчинява на нови, различни от предходните параметри или закони.

Изучаването на скокообразно изменящи се процеси със смяна на законите на развитие е предмет на изследване в редица науки: механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. В тези случаи, използването на математически апарат под формата на моделиращи диференциални уравнения с променлива структура и импулси, като правило, е задължително.

Най-общо, СНДУПСИ които се изследват в настоящия дисертационен труд, се състоят от следните три групи от специфични елементи:

1 група: Съвкупност от изброимо много на брой системи от нелинейни нехомогенни диференциални уравнения, които описват детерминирано непрекъснатите (още по-точно - диференцируемите) части на решението. Съвкупността от системите обикновено има вида:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x, \mu), \quad i = 1, 2, \dots;$$

където:

- функциите $f_1, f_2, \dots \in C[R^+ \times D \times M, R^n]$, т.е. десните страни на горните системи са непрекъснати функции в дефиниционното си множество;
- фазовото пространство D е непразна област от R^n ;
- $\mu \in M$ е вектор на параметрите, участващи в описанието на процеса;
- M е допустимо множество на тези параметри.

2 група: Условия за последователно определяне на моментите на:

- смяната на структурата на системата от диференциални уравнения;
- импулсни въздействия върху решението.

Тези два типа моменти съвпадат помежду си последователно и се наричат с общото наименование моменти на превключване. При разглежданите от нас СНДУПСИ те са последователни решения на системи от алгебрични уравнения от вида:

$$\varphi_i(x(t)) = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_i(t, x(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където функциите $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ се наричат превключващи функции. Те са съответни за всяка една дясна страна и са непрекъснати във фазовото пространство или в разширеното фазово пространство на изучаваните системи от диференциални уравнения, т.е. $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C[D, R]$ или $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C[R^+ \times D, R]$. Моментите на превключване (както отбелязахме в началото) означаваме с $t_1, t_2, \dots$. Имаме $\varphi_i(x(t_i)) = 0$ или $\varphi_i(t_i, x(t_i)) = 0$.

3 група: Импулсни функции, които определят големината (и посоката) на импулсните въздействия. Тези въздействия математически се описват както следва:

$$x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots$$

Импулсните функции $I_1, I_2, \dots$ са непрекъснати във фазовото пространство на разглежданите системи с променлива структура и импулси, т.е. $I_1, I_2, \dots \in C[D, R^n]$.

По начина на определяне на моментите, в които се извършва смяна на структурата и импулсни въздействия (моментите $t_1, t_2, \dots$), разглежданите системи се разделят на различни класове (типове), от които тук ще посочим следните:

1. СНДУПСИ с предварително фиксирани моменти на превключване. Виж изследванията: [4], [5], [6], [7], [12], [21], [22], [26], [27], [28], [29], [31], [33], [39], [43], [44], [45], [56], [61], [63], [64], [65], [66], [67], [68], [76], [77], [83], [85], [87], [99], [125], [127], [131], [132], [133], [134], [135], [136], [137], [138], [139], [141], [142], [143], [148], [149], [150], [152], [153], [154], [155], [156], [164], [172], [177], [178], [179], [180], [186], [193], [194], [198], [204], [206], [208], [209], [211], [214], [219], [220] и [225]. При този сравнително най-прост клас системи можем да предполагаме, че превключващите функции имат вида

$$\varphi_i(t, x(t)) = t - t_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където точките $t_1, t_2, \dots$ са зададени предварително;

2. СНДУПСИ с моменти на превключване, съвпадащи с моментите в които траекторията $\gamma = \{x(t); t \geq t_0\}$ на изучаваната система анулира предварително зададени функции, дефинирани във фазово пространство на системите от диференциални уравнения. Виж

изследванията: [40], [58], [78], [79], [80], [88], [89], [113], [116], [118], [119], [120] и [185]. Както казахме по-горе, тези функции $(\varphi_1 = \varphi_1(x(t)), \varphi_2 = \varphi_2(x(t)), \dots)$ се наричат превключващи;

3. СНДУПСИ с моменти на превключване, съвпадащи с моментите в които интегралната крива $\iota = \{(t, x(t)); t \geq t_0\}$ на разглежданата система с променлива структура и импулси анулира предварително зададени функции $(\varphi_1 = \varphi_1(t, x(t)), \varphi_2 = \varphi_2(t, x(t)), \dots)$, дефинирани в разширеното фазово пространство на системата. Виж работите: [35], [40], [53], [54], [111] и [113];
4. СНДУПСИ с моменти на превключване, съвпадащи с моментите, в които траекторията на изучаваната система среща предварително зададено множество σ , разположено във фазово пространство. Това множество обикновено се състои от изброимо много подмножества $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots$, където $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ ($i \neq j$). В общия случай е допустимо траекторията да среща многократно едно и също подмножество на σ , т.е. възможно са включванията

$$x(t_{i_1}) \in \sigma_{i_1}, x(t_{i_2}) \in \sigma_{i_1}, \dots$$

за някое i и $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots$. Виж изследванията: [35], [40], [44], [69], [78], [80], [88], [89], [91], [105], [107], [113], [116], [117], [173] и [184];

5. СНДУПСИ с моменти на превключване, съвпадащи с моментите, в които интегралната крива на изследваната система среща предварително зададено множество σ , разположено във разширеното фазово пространство. Това множество обикновено се състои от изброимо множество от хиперповърхнини, т.е. $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots$, където

$$\sigma_i = \{(t, x); t = \tau_i(x), x \in D\}, i = 1, 2, \dots$$

Ще посочим, че превключващите функции имат вида

$$\varphi_i(t, x) = \tau_i(x(t)) - t, i = 1, 2, \dots$$

В този случай се изискват неравенствата

$$t_0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \dots, x \in D.$$

Виж изследванията: [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [55], [60], [101], [102], [103], [104], [107], [113], [128], [129], [130], [170], [171], [183] и [199]. Ще отбележим, подобно на предходния тип уравнения, че също така е възможно интегралната крива да среща многократно една и съща хиперповърхнина. Това явление се нарича «биене». При наличие на биене имаме

$$t_{j_1} = \tau_j(x(t_{j_1})), t_{j_2} = \tau_j(x(t_{j_2})), \dots,$$

за някое j и $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots$. При наличие на ефекта биене съществува обективна възможност точките на превключване да притежават точка на съгъстяване. Лесно се съобразява, че след тази точка на съгъстяване решението не е продължимо. По-точно, решението «загива». Това означава, че след точката на загиване е безмислено да се изследва процеса и следователно редица важни асимптотични свойства на съответните решения отпадат от целите на изследване. Посочените обстоятелства налагат този ефект да се отстранява от изучаваните обекти чрез поставяне на допълнителни условия. Виж публикациите: [40], [58], [59], [86], [100], [101], [106], [113] и [183];

6. СНДУПСИ с моменти на превключване, съвпадащи с моментите, в които решението минимизира даден функционал. Този клас съдържа следните определящи елементи:

- Множество T от всички допустими редици от импулсни моменти $t_1, t_2, \dots$. Обикновено имаме $T = \left\{ \{t_i\}_{i=1,2,\dots}; t_0 < t_1 < t_2 < \dots \right\}$;
- Множество I от всички допустими редици от импулсни въздействия $I_1, I_2, \dots$. В общия случай множеството I се състои от всички редици от непрекъснати функции $\{I_i\}_{i=1,2,\dots}$, дефинирани в D и всеки елемент на които удовлетворява релацията $(I + I_i): D \rightarrow D, i = 1, 2, \dots$, т.е. $I + I_i$ изобразява D в D . Тук с I сме означили идентитета в D ($I(x) = x, x \in D$);
- Функционал F , за който е изпълнено

$$F = F((t_1, t_2, \dots), (I_1, I_2, \dots)) \in R^+ \Leftrightarrow F: T \times I \rightarrow R^+.$$

При тези СНДУПСИ импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$ и импулсните въздействия $I_1, I_2, \dots$ се определят така, че функционалът F , пресметнат в тях, достига глобален минимум в дефиниционното си множество $T \times I$. С други думи, импулсните моменти и импулсните въздействия изпълняват релациите:

$$\begin{aligned} & (t_1 = t_1^{opt}, t_2 = t_2^{opt}, \dots), (I_1 = I_1^{opt}, I_2 = I_2^{opt}, \dots) \Leftrightarrow \\ & - (t_1^{opt}, t_2^{opt}, \dots) \in T, (I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots) \in I; \\ & - F((t_1^{opt}, t_2^{opt}, \dots), (I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots)) \\ & = \min \{ F((t_1, t_2, \dots), (I_1, I_2, \dots)); \{t_1, t_2, \dots\} \in T, \{I_1, I_2, \dots\} \in I \}. \end{aligned}$$

Виж изследванията: [36], [37], [38], [40], [53], [54], [113] и [192];

7. СНДУПСИ с превключващи моменти, които имат случаен характер, като удовлетворяват определен закон на разпределение. Виж изследванията: [89], [113], [122], [189], [212] и [218];
8. СНДУПСИ с произволни моменти на превключване. Виж изследванията: [23], [40], [54], [113], [114], [118], [122] и др.

В настоящия дисертационен труд се изучават системи с променлива структура и импулси от първия, втория, третия и осмия тип, посочени по-горе.

Решенията на съответните начални задачи на разглежданите системи диференциални уравнения са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род, в които решенията са непрекъснати отляво.

Специфичните особености, свързани с изследването на СНДУПСИ и възникващите трудности при тяхното изучаване, са следните:

1. Решенията на уравненията с променлива структура и импулси е възможно **да не са продължими** от известен момент нататък. Например, когато интегралната крива среща една и съща превключваща хиперповърхнина безбройно много пъти и превключващите моменти са ограничени отгоре. В този случай задължително се предполага, че превключващата хиперповърхнина е ограничена. Както казахме по-горе, тази ситуация се нарича „биене“. В този случай не може да се изучават различни аспекти на качествената теория на този тип уравнения, като например: непрекъснатата зависимост, периодичност, устойчивост и др. При изследванията е задължително да се намерят условия, гарантиращи отсъствието на феномена „биене“;
2. Решенията на уравненията е възможно **да не съществуват** надясно от известен момент. Това се случва, когато превключващите моменти $t_1, t_2, \dots$, в които траекторията γ или интегралната

крива l срещат импулсните множества σ , имат точка на съгъстяване. След тази точка решението не е дефинирано. При тази ситуация се казва, че решението „трепти“. При изучаване на асимптотични свойства е необходимо да се избягват подобни ситуации, поради което се търсят условия за отсъствие на „трептене“ на решенията;

3. При уравненията с произволни импулсни моменти е задължително да се предполага **съществуване на границата** $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$. Причината посочихме в предходните две точки;

4. Прекъснатост на решението: Точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът“ е ограничен. Обикновено се предполага, че решението е непрекъснато отляво в точките на импулсно въздействие

5. При уравненията с импулсни въздействия въпросът за единственост на решенията се нуждае от допълнителни уточнения. В общия случай, след импулсно въздействие траекторията (интегралната крива) на дадена начална задача попада върху траекторията (интегралната крива) на друга начална задача (за същото диференциално уравнение при друга начална точка). Нека $x'(t; t_0, x_0')$ и $x''(t; t_0, x_0'')$ са две решения на едно и също диференциално уравнение с импулси, съответно с начални точки (t_0, x_0') и (t_0, x_0'') . Нека $x_0' \neq x_0''$ и съответните импулсни моменти t_i' и t_i'' удовлетворяват неравенството $t_i' < t_i''$. Тогава е възможно

$$x'(t_i' + 0; t_0, x_0') = x'(t_i'; t_0, x_0') + I_i(t_i', x'(t_i'; t_0, x_0')) = x''(t_i'; t_0, x_0'').$$

Последното равенство показва, че след момента t_i' двете решения съвпадат, т.е. имаме

$$x'(t; t_0, x_0') = x''(t; t_0, x_0''), \quad t > t_i'.$$

Този ефект се нарича **сливане на решения** след импулсно въздействие. При изследванията задължително „се обръща внимание“ на този феномен, който за съжаление е неотстраним при уравненията с променливи импулсни (превключващи) моменти;

6. Известно е, че при определени условия за решенията $x'(t; t_0', x_0')$ и $x''(t; t_0'', x_0'')$ ($t_0' \neq t_0''$) на произволно автономно диференциално уравнение (задължително без импулси) е валидно равенството

$$x'(t_0' + \Delta t; t_0', x_0') = x''(t_0'' + \Delta t; t_0'', x_0''), \quad \Delta t > 0,$$

което се нарича свойство „автономност“. При импулсните автономни диференциални уравнения свойството автономност се губи. Причина за това са импулсните въздействия. Импулсните множества, чрез които се определят импулсните моменти, са предварително фиксирани във времето. Промяната на началния момент на съответната начална задача променя импулсните моменти, т.е. променя се решението и следователно след първия импулсен момент решението **загубва свойството автономност**;

7. Превключващите моменти на решенията на уравненията от разглежданите класове в общия случай са функция на параметрите на съответната начална задача (начална точка, дясна страна, импулсни множества, бариерни криви, импулсни въздействия и т.н.). Следователно **различните решения притежават различни импулсни моменти**. Нека решението $x'(t)$ притежава импулсни моменти $t_1', t_2', \dots$, а решението $x''(t)$ - $t_1'', t_2'', \dots$. В общия случай имаме

$$t_0' \neq t_0'', t_1' \neq t_1'', t_2' \neq t_2'', \dots$$

Ще отбележим, че в интервалите с краища точките t_i' и t_i'' , $i=1,2,\dots$, двете решения са подложени на различен брой импулсни въздействия. Това означава, че те се различават съществено в този интервал. Големината на разликата е от порядъка на големината на импулсното въздействие с номер i . Следователно, използваната мярка за разстояние между тези две решения трябва да се съобрази с този феномен;

8. Предложени са два варианта за решаване на проблема, описан в предходната точка:

- **Вариант 1:** Мярката $\rho = \rho(x'(t), x''(t))$ при $t_0' \leq t < T$ дефинираме така

$$\rho = \sup \{ \|x'(t) - x''(t)\| : t_0' \leq t < T; |t - t_i'| > \eta, i = 0, 1, \dots \}.$$

В този вариант разликата между решенията $x'(t)$ и $x''(t)$ в интервалите с краища t_i' и t_i'' , $i = 1, 2, \dots$, се **игнорира** (не участва в определяне на мярката);

- **Вариант 2:** За мярката $\rho = \rho(x'(t), x''(t))$ имаме

$$\rho = \rho_H(\gamma', \gamma''),$$

където $\rho = \rho_H(\gamma', \gamma'')$ е Хаусдорфовото разстояние между траекториите γ' и γ'' . Имаме

$$\begin{aligned} \rho_H(\gamma', \gamma'') &= \rho_H(\gamma'[t_0', T], \gamma''[t_0'', T]) \\ &= \max \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \rho(x'(t'), x''(t'')) \right\}, t_0' \leq t' \leq T \right\}, \sup \left\{ \inf \left\{ \rho(x'(t'), x''(t'')) \right\}, t_0'' \leq t'' \leq T \right\} \right\}. \end{aligned}$$

От горното равенство се вижда, че γ' и γ'' са траекториите

$$\gamma' = \{x'(t); t_0' \leq t < T\} \text{ и } \gamma'' = \{x''(t); t_0'' \leq t < T\}.$$

Всеки един от двата варианта има положителни и слаби страни. В първия вариант представената мярка не удовлетворява изискванията за разстояние и чак от решенията не участват в пресмятане на разстоянията между тях. Използването на Хаусдорфовата метрика между траекториите на диференциалните уравнения с променливи импулсни моменти е съпътствано с прецизирането и предварителното намиране на някои необходими свойства на това разстояние, когато множествата са прекъснати криви. В общия случай дефиниционните множества на кривите се различават. Различни са и съответните точки на прекъсване, което затруднява изследванията;

9. Когато решението не е продължимо до безкрайност поради кондензация на импулсните въздействия (в случаите, когато импулсните моменти притежават точка на съгъстяване, виж предходните точки 1, 2 и 3) се казва, че то „**загива**“ поради импулсните въздействия. Нека решението загива и точката на съгъстяване на импулсните моменти е T . Тогава решението съществува в интервала $[t_0, T)$. В този случай е възможно в произволен времеви подинтервал $[t_0, t^0] \subset [t_0, T)$ да се изучават различни типове непрекъсната зависимост на решенията (относно началната точка, дясната страна, импулсните въздействия и т.н.). Основните трудности произтичат от факта, че във въпросния интервал $[t_0, t^0]$ различните решения притежават различен брой импулсни въздействия. Ще отбележим наличието на следните феномени:

- импулсните моменти на две решения във фиксирания интервал $[t_0, t^0]$ може да се различават с произволен брой;
 - при промяна на дължината на интервала $[t_0, t^0]$ броят на импулсните моменти също се променя;
10. При диференциалните уравнения с променливи структура и импулсни моменти е възможно:
- при някои начални точки $x'_0 \in D$ импулсното множество $\sigma \subset D$ да е достижимо, т.е. траекторията $\gamma' = \{x'(t; t_0, x'_0); t \geq t_0 \text{ } (t \leq t_0)\}$, която стартира от точката (t_0, x'_0) пресича импулсното множество, т.е. $\gamma' \cap \sigma \neq \emptyset$.
 - при други начални точки $x''_0 \in D$ импулсното множество не е достижимо (за всяко $t \geq t_0$), т.е. траекторията $\gamma'' = \{x''(t; t_0, x''_0); t \geq t_0 \text{ } (t \leq t_0)\}$ не пресича σ или $\gamma'' \cap \sigma = \emptyset$.
- Всички точки от типа на x'_0 образуват така нареченото **достижимо множество** от начални точки. Когато достижимото множество съвпада с D , то фазовото пространство D се нарича **тотално достижимо**. При изследванията, свързани с качествата на решенията на диференциалните уравнения с променливи структура и импулсни моменти е удобно (а в някои случаи е задължително) да се предполага, че фазовото пространство е тотално достижимо множество от начални точки. Това предположение гарантира, че всяка траектория на уравнението достига до импулсното множество, т.е. всяко решение е подложено на импулсно въздействие. В този случай е коректно да се изследват решенията за различни асимптотични качества;
11. Импулсните въздействия служат като **инструмент** за поддържане на определени качества на решенията:
- ограниченост на решенията (или ограниченост по част от координатите на решението);
 - периодичност;
 - устойчивост относно параметрите на съответната начална задача;
 - поддържане на решението над минимално допустими граници и т.н.
- Много често е наложително за всяко $t \geq t_0$ решението да се намира между две повърхнини - така наречените „барьерни повърхнини“ (в частен случай при $n=1$ - „барьерни криви“). Импулсните въздействия се реализират при пресичане на барьерните повърхнини. Посоката и големината на импулсните въздействия гарантират, че решението остава в множеството между повърхнините. Изборът на повърхнините, конструирането на моделното уравнение, определяне на моментите и големините на импулсните въздействия представляват елемент на управление на динамични процеси. Тези ограничения са свързани с преодоляването на допълнителни трудности;
12. Лесно се вижда, че съставните елементи (параметрите) при уравненията с импулсни въздействия и променлива структура са повече отколкото при уравненията със стационарна дясна част и без импулси. Например специфични параметри за импулсните уравнения са: импулсните моменти, импулсните въздействия, импулсните множества, импулсните функции, десните страни и др. Поради тази причина са налице **нови видове непрекъсната зависимост и устойчивост** на решенията на такива уравнения относно изброените по горе специфични параметри. Тези особености дават възможност и изискват въвеждането и изследването на специфични качества на решенията на диференциалните уравнения с променлива структура и импулси;

13. Често импулсните диференциални уравнения са **единственият съответен математически апарат**, чрез който е възможно да се моделират и изследват прекъснатите динамични процеси. При изучаването на количеството на информацията в паметта при наличие на кратковременни обучения е важно да се отчита и сравнява това количество при различни схеми на обучение. Полезно е да се изготви подходяща програма на обучението, при която количеството на информацията не трябва да достига под определен минимум. Също така е възможно този процес да се оптимизира. По-точно с минимален брой допълнителни обучения, разположени оптимално във времето, да се достигне максимално дълъг период от време, при който информацията е над изискуем минимум. Интересен е моделът при променливо (във времето) минимално изискуемо количество на информацията. Естествено е да се предполага, че този минимум расте във времето. По този въпрос досега не са публикувани научни изследвания;
14. Уравненията с превключващи моменти, съвпадащи с моментите, в които решението минимизира предварително зададен функционал, са полезни при решаване на определени **оптимизационни задачи**. Обикновено при тези процеси управлението е подчинено на човека. Тук средствата на оптимизация (управление) се свеждат до три:
- избор на броя на импулсните моменти;
 - избор на разположението на моментите на импулсно въздействие;
 - избор на големините на импулсните въздействия.
- Целта (или по-конкретно - целевата функция) е свързана с намирането на параметрите на екстремалната стойност на даден функционал, изразяващ определено качество на изучавания процес.
15. Натрупване на грешки: Пертурбациите и неточностите при смяната на структурата (десните страни на системите) и импулсните въздействия се „натрупват“ във времето и оказват съществено влияние при определяне на поведението на решението. Така например, при неограничен брой импулси тези пертурбации могат да имат непреодолим характер и да доведат до формирането на решения, които се различават неограничено от изучаваното „не пертурбирано“ решение и др.

Началото на изучаването на „скокообразни“ процеси с помощта на импулсни диференциални уравнения е поставено от В. Мильман и А. Мышкис в първата половина на шестдесетте години на миналия век. Виж работите [18] и [19]. В тези работи са дадени някои общи съображения за необходимостта от изучаване на системите с импулсно въздействие. Получени са първите резултати за устойчивост на техните решения.

Ще посочим част от монографиите на български автори, отнасящи се за фундаменталната и качествената теория на импулсните диференциални уравнения и техните приложения: Д. Байнов и В. Ковачев [43]; Д. Байнов, С. Костадинов и Н. Минх [62]; Д. Байнов и П. Симеонов [70], [71] [72], [73] и [74]; В. Лакшмикантам, Д. Байнов и П. Симеонов [151]; Г. Стамов [196]; И. Стамова [203]; А. Дишлиев, К. Дишлиева и С. Ненов [113]; А. Антонов, А. Дишлиев, А. Дишлиев (младши) и С. Ненов [40] и др. От монографиите, посветени на импулсните диференциални уравнения, с автори извън България, ще споменем: А. Самойленко и Н. Перестюк [23] и [190]; Н. Перестюк, В. Плотников, А. Самойленко и Н. Скрипник [20]; С. Борисенко, В. Косолапов и А. Оболенский [4]; А. Халанай и Д. Векслер [26]; С. Завалищин и А. Сесекин [8] и [221]; С. Завалищин, А. Сесекин и С. Дрозденко [7]; S. Pandit и S. Deo [182]; M. Benchohra, J. Henderson и S. Ntouyas [76] и др.

Ще отбележим (потвърдено от много автори), че интензивното развитие на теорията на импулсните диференциални уравнения се дължи на многобройните им приложения. Във въведението на монографията [203] е казано, че: „The necessity to study impulsive differential equations is due to the fact that these equations are an useful mathematical machinery in modelling many real processes and phenomena studied in optimal control, biology, mechanics, medicine, biotechnologies, electronics, economics, etc.” Тук ще посочим няколко конкретни приложения на тези

уравнения: действието на амортизатор, подложен на ударни въздействия; колебанията на системи от махала при наличие на външни импулсни смущения; ударен модел на часовников механизъм; вибродарни системи; билиардни движения на материални точки; релаксионни колебания на електромеханични системи; електронни схеми; затихващ осцилатор, подложен на импулсни въздействия; динамиката на системи за автоматично регулиране; смущения в клетъчни невронни мрежи; импулсни пертурбации в скоростта на развитие на кълбовидни бактерии, подчинени на закона на Schmalhausen; импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на изолирана популация; загиване на популации в резултат на импулсни въздействия; импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на съобщество от тип хищник-жертва; епидемиологията; „шокови“ изменения на цените на затворените пазари и др. На споменатите по-горе задачи от практиката са посветени множество изследвания, от които тук ще посочим: [4], [8], [9], [10], [11], [14], [26], [29], [30], [32], [35], [40], [42], [52], [58], [75], [81], [84], [91], [94], [95], [96], [113], [123], [124], [144], [145], [146], [147], [157], [158], [159], [160], [161], [162], [163], [165], [166], [167], [168], [172], [174], [175], [176], [187], [191], [192], [195], [197], [200], [201], [205], [207], [209], [210], [213], [215], [216], [217], [222], [223] и [224].

Следните монографии изучават системи диференциални уравнения с променлива структура: А. Филиппов [25]; А. Андронов, А. Витт и С. Хайкин [2]; В. Бабицкий и В. Крупенин [3]; Н. Перестюк, В. Плотноков, А. Самойленко и Н. Скрипник [20] и др.

Приложенията на диференциалните уравнения с променлива структура са предимно в теорията на управлението. Освен това с помощта на такива уравнения се изучават: задачи от фармакокинетиката; управление на орбитата на спътник с помощта на радиални ускорения; преминаването на твърдо тяло от флуид с дадена плътност във флуид с друга плътност; изменението на скоростта на химична реакция при прибавянето или отнемането на катализатор и др. Тук ще посочим следните резултати: [1], [2], [15], [16], [17], [20], [24], [25], [40], [61], [82], [89], [90], [113], [119], [121], [159] и [181].

Актуалност на темата на дисертацията

Създаването и анализирането на подходящо математическо описание на различни процеси в практиката е важна задача на съвременната изследователска дейност. Различен и разнообразен е съвременният математически апарат и многокритериални са изискванията към модерните математически модели. В дисертацията основният математически апарат са системите от обикновени диференциални уравнения с променливи структура и импулсни въздействия. В това изследване сме се стремили да спазваме стриктно следните принципи:

- **Избор на подходящи предварителни хипотези:** Азбучно е твърдението, че не съществуват всеобхватни и точни математически модели. Изборът на ограниченията (хипотезите), които определят (ограничават) валидността на модела, трябва да отговарят на редица изисквания:
 - най-напред, задължително съществуват реални примери, които удовлетворяват ограниченията, т.е. хипотезите са продиктувани от практиката;
 - хипотезите са ясни, имат подходяща математическа формулировка и са лесно проверяеми;
 - не са противоречиви и др.;
- **Адекватен математически модел:** Моделът напълно отговаря на основните характеристики, определящи процеса на изменението на информацията в паметта и удовлетворява представените хипотези. Не съществува друг, различен от представения в дисертацията математически модел, който удовлетворява предварителните хипотези;
- **Моделът допуска широко приложение:** Това означава, че при изменения на параметрите на модела е възможно да опишем със същия математически модел адекватно друг аналогичен процес на динамиката на информацията;
- **Моделът дава прогнозни резултати:** Резултатите, получени с помощта на модела, имат ясно тълкувание в термините на моделирания процес. Тълкуванията на получените резултати не

противоречат на практиката и логиката на развитие на количеството на информацията в паметта.

Ще отбележим, че представените модели в дисертационния труд са **пионерни и не представляват модификации или продължения на подобни изследвания от други автори**. Това е едно от основанията да считаме, че изследванията са актуални.

Резултатите са полезни поради редица причини, от които тук ще посочим най-важните:

- Ясно е, че квалификацията на изпълнителските кадри е от решаващо значение за успеха при различните производствени процеси. Поради тази причина в общия случай, количеството на информацията, притежание на производствените кадри, трябва да отговаря на определени минимални изисквания. Най-важното от тези изисквания е количеството на информацията по време на производствения процес да е над определен минимален (критичен) праг $I_{\min}$. Определянето на този критичен праг, който в общия случай може да е променлив във времето и следователно да се задава с помощта на положителна функция $I_{\min} = I_{\min}(t) > 0, t \geq t_0$, е важна задача, която трябва да се реши преди подбора и квалификацията на кадрите;
- Определяне на моментите на реализиране на допълнителните кратковременни обучения, които поддържат количеството на информацията в желаните граници, е едно от важните достижения в дисертационния труд;
- Установяване на различни количествени характеристики (качества) на информацията представлява съществен интерес във връзка с постигането на високи резултати в производствения процес. Към тези качества ще причислим различни видове устойчивости, непрекъснати зависимости и някои специфични асимптотични свойства на количеството на информацията;
- Сравняване на количествата на информацията в зависимост от времената и количествата на допълнителните обучения дава насоки за определяне на броя и интензивността на обученията.

Цели и постигнати резултати

Ще изброим поставените цели и постигнатите резултати в дисертационния труд:

- Създаване на математически модел на изменение на информацията при отсъствие на външни въздействия (обучения);
- Създаване на математически модел на изменение на информацията при наличие на външни въздействия;
- Дефиниране и представяне на съответната математическа трактовка на полезни специфични свойства на решенията на моделите;
- Намиране на достатъчни условия за съществуване на определени качества на решенията на моделите;
- Сравняване на големините на решенията на еквивалентни модели, които се отличават само в някои специфични параметри;
- Определяне на специфични параметри на моделите;
- Тълкуване на резултатите в термините на моделирания процес на изменение на информацията и др.

Преглед на дисертацията

Основната част на дисертационния труд е поместена в 5 глави. Всяка от тези глави е разделена на няколко параграфа.

За удобство по-нататък в автореферата ще запазим номерацията от дисертационния труд на формулите, теоремите, забележките, условията, литературните източници и т.н.

Глава 1. Математически модел на динамиката на количеството на информацията в паметта

Резултатите в тази глава са публикувани в статията:

Dishliev A., Dishlieva K., Abou Habib M., Mathematical model of dynamics of the amount of information in human memory, American J. of Education, Vol. 123, Issue.4 (1.2), (2017), 1073-1081.

В тази глава е решен следният основен въпрос: Да се намери адекватен математически модел на изменението на информацията в паметта на абстрактен индивид в рамките на определен времеви период. Най-важното изискване е че във времевия интервал не се извършват интензивни обучения с цел да се повиши количеството на информацията, т.е. не се осъществяват външни въздействия. Следователно, естествено е да се предполага, че изменението на количеството на информацията е гладко и може да се осъществи с подходящи диференциални уравнения.

Основен термин в дисертационния труд е **количество на информацията**. Ще считаме, че терминът е първичен и следователно няма да бъде дефиниран. Ще се опитаме да уточним този фундаментален термин. Количеството на информацията ще отъждествяваме със съвкупност от знания, свързани с една и съща наука или раздел (обособена част) от човешкото познание, които могат да се измерят, т.е. тези знания притежават мярка. Ще предполагаме, че това понятие (количество на информацията) има осреднен характер. По-точно, то съответства на информацията (знанията), принадлежащи на идеализиран абстрактен индивид със средни способности, съответни на хората принадлежащи или съпричастни на изучаваната част от обществото. Същото това понятие (според нас) обхваща (най-общо казано) съвкупност от: първични (не подлежащи на дефиниране) понятия; произтичащи от тях (въведени с дефиниции) вторични понятия; първични твърдения, считани за очевидни (т.е. аксиоми); произтичащи от тях твърдения, обосновани с доказателства; заключения; установени свойства и качества; установени логични връзки; обобщения; аналози и т.н.

Основни предположения, необходими при изследванията в тази глава, са следните хипотези:

Първа хипотеза: Информацията има количествено измерение.

В тази глава ще проведем изследванията на този динамичен процес (изменение на количеството на информацията) при отсъствие на кратковременни „импулсни“ външни приноси (допълване) на информацията.

Втора хипотеза: Количеството на информацията се изобразява с помощта на непрекъсната положителна функция.

Въпросната функция $I = I(t)$ е дефинирана за всеки момент t , разположен след началния момент t_0 . Стойността на тази функция във всеки момент е мярка на количеството на информацията в паметта. Функцията е положителна и не изменя рязко (скокообразно) своите стойности, което означава, че през изследвания период от време не се провежда интензивно сравнително кратковременно обучение по темите на информацията. Нещо повече естествено е да предполагаме, че $I = I(t)$ е гладка, т.е. поне еднократно е диференцируема. Накратко $I \in C^1[[t_0, \infty), R^+]$. Два фактора оказват основно влияние върху гладкото изменение на количеството на информацията. Първият от тези фактори се отнася до загубата на информация, поради изминаване на достатъчно дълъг период от време. Вторият от тези фактори се отнася до натрупване и възстановяване на информация, дължащо се на самостоятелно обучение или неколккратно използване и обогатяване на информацията, както и на други възможности, които поддържат и възстановяват информацията. Ясно е, че тези два фактора имат противоположно влияние при изменението на информацията в паметта. Нашите наблюдения показват, че загубата и възстановяването на информацията за сравнително кратки интервали от време (например,

интервали от вида $[t, t + \Delta t]$ с дължина Δt , където константата Δt е „пренебрежимо малка“) зависи пропорционално от количеството на информацията, в началния момент t на тези интервали. По-нататък, ще допуснем възможността при изменение на началния момент на интервала $[t, t + \Delta t]$ да се променя и коефициентът на пропорционалност.

Трета хипотеза: Изменението на количеството на информация I във всеки момент t е пропорционално на обема на информацията в този момент.

В общия случай, коефициентът на пропорционалност е променлив във времето. Зависи от разликата $t - t_0$, т.е. от времето, което е изминало от началния момент t_0 до текущия момент t .

Четвърта хипотеза: Изходните данни и произтичащите от тях резултати са осреднени.

С други думи, те се отнасят за „типичен обобщен представител“, избран от група обучаеми, поставени при едни и същи външни условия. В този смисъл, коефициентът на пропорционалност е осреднен и се отнася за група обучаеми, които имат еквивалентни способности и са поставени при едни и същи условия.

По-нататък ще използваме следните означения:

- t_0 - начален момент на изследване на динамиката на количеството на информацията;
- I_0 е количеството на информацията в паметта в началния момент t_0 , $I_0 = \text{const} > 0$;
- $I(t; t_0, I_0)$ - количество на информацията в паметта в момента $t \geq t_0$, при условие, че в началния момент t_0 информацията е в количество I_0 . Имаме $I(t; t_0, I_0) \geq 0$, $t \geq t_0$. Ясно е, че $I_0 = I(t_0; t_0, I_0)$;
- $\alpha'(t)$ коефициент на пропорционална загуба на информацията в паметта, $\alpha'(t) \geq 0$, $t \geq 0$;
- $\alpha''(t)$ коефициент на пропорционално възстановяване на информацията в паметта, $\alpha''(t) \geq 0$, $t \geq 0$;
- $\alpha(t) = \alpha''(t) - \alpha'(t)$ - коефициент на съхранение на информацията, $t \geq 0$.

Въвеждаме условията:

H1.1. Функцията $\alpha \in C[[0, \infty), R^-]$.

H1.2. $\int_0^\infty \alpha(\tau) d\tau = A = \text{const} < 0$.

H1.3. Изпълнено е $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$.

Началната задача, моделираща изменението на информацията при отсъствие на обучение, има вида

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \alpha(t - t_0) I; \\ I(t_0) &= I_0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Решение на горната моделна начална задача (1.1) е функцията

$$I(t; t_0, I_0) = I_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(\tau - t_0) d\tau\right). \tag{1.2}$$

Забележка 1.3 (Намаляване и нарастване на количеството на информацията). Ясно е, че ако коефициентът на съхранение на информация (т.е. функцията) α е непрекъсната в момента t , $t > t_0$, и освен това, ако е изпълнено неравенството $\alpha(t - t_0) < 0$, то съществува околност на същия момент t , в която количеството на информация в паметта строго намалява. Аналогично, ако предположим непрекъснатост на функцията α в момента t и освен това $\alpha(t - t_0) > 0$, то информацията I строго нараства в достатъчно малка околност на t . По наше мнение (от гледна точка на практиката) случаят на намаляване на информацията в паметта е по-често срещан. Поради тази причина в настоящото изследване ще предполагаме, че $\alpha(t - t_0) < 0$, $t \geq t_0$ (виж условие Н1.1).

Забележка 1.4 (Остатъчна информация). От равенство (1.2), като имаме предвид условие Н1.2, при $t \rightarrow \infty$ получаваме

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t; t_0, I_0) &= I_0 \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \alpha(\tau - t_0) d\tau\right). \\ &= I_0 \exp\left(\int_0^\infty \alpha(\tau) d\tau\right) = I_0 \exp(A) = I_\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Величината $I_\infty = I_\infty(I_0, \alpha)$ ще наричаме количество на остатъчната информация в паметта. Ако експериментално определим количеството на остатъчната информация I_∞ , то от (1.3) се намира константата

$$A = \int_0^\infty \alpha(\tau) d\tau = \ln \frac{I_\infty}{I_0}.$$

Забележка 1.5 (Асимптотично поведение на коефициента на съхранение на информацията). Нашите практически наблюдения показват, че в моментите, които са достатъчно отдалечени от началния момент t_0 , скоростта на изменение на количеството на информация в паметта е приблизително равна на нула. С други думи, количеството на информацията се променя сравнително „бавно“ при „големи“ стойности на времето. Като вземем под внимание факта, че количеството на информацията е положителна величина, която е ограничена отдолу (от количеството на остатъчната информация I_∞), то от уравнение (1.1) заключаваме, че коефициентът на съхранение на информацията монотонно намалява и при големи стойности на времето е приблизително равен на нула. Това обстоятелство налага да въведем условие Н1.3.

Въведено е новото понятие, отнасящо се до асимптотичните свойства на решенията на диференциалните уравнения, описващи динамиката на количеството на информацията, а именно: асимптотично слабо изменение на информацията.

Дефиниция 1.1. *Ще казваме, че количеството на информацията в паметта се изменя асимптотично слабо, ако*

$$\begin{aligned} &(\forall t_0 \in \mathbb{R}^+) (\forall I_0 \in \mathbb{R}^+) (\forall \varepsilon > 0) (\forall \Delta t > 0) \\ &(\exists T = T(t_0, I_0, \varepsilon, \Delta t) > t_0): \\ &(\forall t_1, t_2 > T; |t_2 - t_1| < \Delta t) \Rightarrow |I(t_2; t_0, I_0) - I(t_1; t_0, I_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

В следващата теорема са посочени лесно проверими достатъчни условия за наличие на дефинираното по-горе качество на решенията на началната задача (1.1).

Теорема 1.1. *Нека са валидни условията Н1.1 – Н1.3.*

Тогава количеството на информацията се изменя асимптотично слабо.

Дефиниция 1.2 (F. Dannan, S. Elaydi [97]). Ще казваме, че количеството на информация в паметта е равномерно Липшицово устойчиво, ако

$$\begin{aligned} & (\exists L = \text{const} > 1) : (\forall t_0 \in R^+) (\forall I_0, I_0^* \in R^+) \\ & \Rightarrow |I(t; t_0, I_0) - I(t; t_0, I_0^*)| \leq L |I_0 - I_0^*|, \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Теорема 1.2. Нека са валидни условията Н1.1 – Н1.3.

Тогава количеството на информация е равномерно Липшицово устойчиво.

Различни типове Липшицова устойчивост са разгледани в работите [57] и [105]. Непосредствено от горната теорема получаваме.

Следствие 1.1. Нека са валидни условията Н1.1 – Н1.3.

Тогава $(\forall t_0, I_0, I_0^* \in R^+)$ следва, че функцията $\Delta I(t) = |I(t; t_0, I_0) - I(t; t_0, I_0^*)|$ е монотонно намаляваща при $t \geq t_0$.

Дефиниция 1.3 (N. Rouche, P. Habets, M. Laloy [188]). Ще казваме, че количеството на информация в паметта е равномерно устойчиво, ако

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) : \\ & (\forall (t_0, t_0^*) \in R^+) (\forall I_0, I_0^* \in R^+) : \\ & (|t_0 - t_0^*| < \delta) (|I_0 - I_0^*| < \delta) \\ & \Rightarrow |I(t; t_0, I_0) - I(t; t_0^*, I_0^*)| < \varepsilon, \quad t \geq \max \{t_0, t_0^*\}. \end{aligned}$$

Теорема 1.3. Нека са валидни условията Н1.1 – Н1.3.

Тогава количеството на информация е равномерно устойчиво.

Резюме: Теоретичните резултати в глава 1 са свързани със създаване на математически модел на съхранение на информацията при отсъствие на допълнителни кратковременни обучения. Получени са достатъчни условия за съществуването на:

- асимптотично слабо изменение на количеството на информацията;
- равномерна Липшицова устойчивост;
- равномерна устойчивост.

Ще преформулираме получените резултати в термините на изменението на количеството на информацията в паметта.

Заключение 1.1. Ако стандартните хипотези са валидни, то количеството на информацията в паметта се изменя асимптотично слабо. Това означава, че за всеки два момента, които са достатъчно отдалечени от началото, количествата на информацията (в паметта на един и същи абстрактен осреднен индивид) са приблизително равни. С други думи, количеството на информацията след определен времеви момент можем приблизително да приемем за постоянна положителна величина (виж Теорема 1.1).

Заклучение 1.2. При наличие на стандартните хипотези, количеството на информацията притежава качеството равномерно Липшицова устойчивост. По-подробно, нека началният момент t_0 е един и същи при два почти еднакви експеримента, относящи се за количеството на информацията, проведени при едни и същи условия (т.е. ще разгледаме количеството на информацията в два експеримента за една и съща памет). Нека разликата в количествата на информация при двата експеримента в началния момент t_0 е ΔI_0 . Тогава за всеки момент t след t_0 разликата между двете количества на информацията не надминава първоначалната разлика

ΔI_0 . С други думи, разликата на количеството на информация намалява с нарастване на времето (Теорема 1.2 и Следствие 1.1).

Заклучение 1.3. При наличие на стандартните хипотези, количеството на информацията в паметта е локално равномерно устойчиво. По друг начин казано, при „достатъчно малки“ изменения на началния момент и началното количество на информацията (в една и съща памет) количеството на информацията се променя „незначително“ за всеки момент t след началото t_0 (Теорема 1.3).

Глава 2. Математически модел на количеството на информацията в паметта при кратковременни дискретни обучения

Резултатите в тази глава са публикувани в статията:

Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical model of the amount of information in the human memory for short time discrete trainings, Science and Educational Studies, Vol. VIII, Issue 1 (29), (2018), 229-244.

Изследванията в тази глава са продължение на постигнатите резултати в предходната глава. Основните усилия са насочени към изследване на качествата на въведеното първично понятие: количество на информацията $I = I(t)$. Съществена новост в тази глава е наличието на последователни във времето „кратковременни дискретни“ обучения (попълвания на информацията). Времетраенето на обученията е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на изучавания процес, поради което ще считаме, че попълването на информацията се осъществява мигновено под формата на импулси.

Първата и четвъртата хипотези от предходната глава ще считаме, че са валидни и тук. Както казахме ще включим възможността последователно във времето да се провеждат кратковременни дискретни обучения. Поради тази причина ще считаме че са валидни следните допълнителни хипотези:

Пета хипотеза: Всяко обучение се осъществява мигновено.

Това означава, че в резултат на допълнителните обучения информацията се изменя скокообразно в предварително зададените моменти на добавяне на информация $t_1, t_2, \dots, t_0 < t_1 < t_2 < \dots$.

Втората и третата хипотези ще преформулираме в следващите шеста и седма хипотези, както следва.

Шеста хипотеза: Количеството на информацията при наличие на кратковременни дискретни обучения е частично непрекъсната и положителна функция, дефинирана за всеки момент $t \geq t_0$.

Моментите на прекъсване $t_1, t_2, \dots, t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, на функцията $I = I(t)$ съвпадат с моментите на кратковременните обучения.

Седма хипотеза: Изменението на количеството на информацията във всеки момент $t, t \neq t_i, i=1, 2, \dots$, е пропорционално на обема на информацията в този момент.

Осма хипотеза: След всяко обучение нарастването на количеството на информацията е пропорционално на количеството на информацията, пресметнато непосредствено преди съответното скокообразно попълване.

Тази хипотеза изразяваме математически както следва:

$$\Delta I(t_i) = I(t_i + 0) - I(t_i) = \beta \cdot I(t_i - 0) = \beta \cdot I(t_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

H2.2.2. Функцията β е Липшицова е по втория аргумент с константа $L > 0$, т.е.

$$(\forall (t, I'), (t, I'') \in R^+ \times R^+) \Rightarrow |\beta(t, I') - \beta(t, I'')| \leq L |I' - I''|;$$

H2.2.3. Функцията β е ограничена отгоре с константа $\beta_{\max} > 0$, т.е.

$$(\forall (t, I) \in R^+ \times R^+) \Rightarrow \beta(t, I) \leq \beta_{\max}.$$

H2.3. Импулсните моменти (моментите на дискретно приемане на информация) $t_1, t_2, \dots$ не притежават точка на съгъстяване, т.е. $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Ако функцията β удовлетворява условието H2.2, за удобство това ще бележим както следва $\beta \in H2.2$. Ще използваме подобни означения и за другите условия.

Дефиниция 2.1. Ще казваме, че количеството на информацията в паметта зависи непрекъснато от кратковременни дискретни попълвания на информацията, ако

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\forall T > 0) \\ & (\forall t_0 > 0)(\forall t_1, t_2, \dots; t_0 < t_1 < t_2 < \dots)(\forall I_0 > 0) \\ & (\forall \alpha \in C[R^+, R^-])(\forall \beta \in H2.2) \\ & (\exists \delta = \delta(\varepsilon, T, t_0, t_1, \dots, I_0, \alpha, \beta) > 0): \\ & (\forall \beta^* \in H2; |\beta^*(t, I) - \beta(t, I)| < \delta \text{ при } (t, I) \in R^+ \times R^+) \\ & \Rightarrow |I(t; t_0, t_1, \dots, I_0, \alpha, \beta^*) - I(t; t_0, t_1, \dots, I_0, \alpha, \beta)| < \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T. \end{aligned}$$

С други думи, за всяка положителна константа ε и за всеки времеви интервал $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ с дължина $T > 0$ съществува съответна положителна константа δ , зависеща от ε , от дължината на времеви интервал T и от параметрите на системата, такава че ако два коефициента на пропорционално попълване на информацията при дискретно обучение се отличават „достатъчно малко“ (по-точно, модулът на тяхната разлика е по-малък от константата δ в цялата дефиниционна област $R^+ \times R^+$), то съответните количества на информацията се отличават „незначително“ за всяко t , за което са изпълнени неравенствата $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. По-горе под „незначително“ отличавање се разбира, че модулът на разликата на двете количества на информацията е по-малък от предварително и произволно избраната константа ε .

Основният резултат в главата е следната теорема.

Теорема 2.1. Нека са валидни условията H2.1 – H2.3.

Тогава количеството на информацията зависи непрекъснато от кратко-временните дискретни попълвания на информацията.

Резюме: В тази глава е създаден математически модел (с помощта на СНДУПСИ с предварително фиксирани моменти на импулси), който математически описва изменението на количеството на информацията в паметта на абстрактен индивид при наличие на дискретни „мигновени“ обучения. Предложени са няколко лесно проверяеми ограничения, които гарантират, че количеството на информацията зависи непрекъснато от количествата на многократните нейни попълвания.

Ще преформулираме някои от получените резултати в терминологията на развитието на количеството на информацията в паметта на абстрактен обобщен индивид при наличие на

кратковременни дискретни попълвания на информацията (наличие на обучения). При формулирането на следващите заключения ще предполагаме, че са валидни хипотезите, дадени в началото на втора глава. Тези хипотези ще наричаме основни.

Заключение 2.1. Ако са валидни основните хипотези, то количеството на информацията е частично непрекъсната функция във времето. Точките на прекъсване съвпадат с моментите на допълване на информацията $t_1, t_2, \dots$. В непрекъснатите части количеството на информацията намалява монотонно, при условие, че коефициентът на загуба на информацията е по-голям от коефициента на възстановяване. При тези хипотези повишаването на количеството на информацията се дължи само на кратковременните дискретни обучения.

Заключение 2.2. Условието Н2.1 – Н2.3 можем да охарактеризираме като естествени. Действително, условие Н2.1 означава, че коефициентът на съхранение на информацията е отрицателен, т.е. във времето (при отсъствие на външна намеса) информацията постоянно се губи и загубите се осъществяват „непрекъснато“ във времето. Условие Н2.2 означава, че непосредствено след обучение информацията се увеличава мигновено под формата на импулси. Скокообразното увеличение е ограничено отгоре (тава обстоятелство е заложено в условие Н2.2.3). Да анализираме и последното условие Н2.3, което показва че кратковременните дискретни обучения се осъществяват „разсеяно“ във времето, т.е. моментите на техните реализации не се съгъстват към определен фиксиран момент.

Заключение 2.3. Количеството на информацията е ограничено отгоре. Действително, като имаме предвид условие Н2.1 заключаваме, че във всеки интервал на непрекъснатост информацията намалява. Следователно нейната най-голямата стойност се достига в някой от началните моменти на интервалите на непрекъснатост. По друг начин казано, имаме

$$I(t) \leq \max \{I_0, I_1^+, I_2^+, \dots\}, \quad t \geq t_0.$$

Накрая, тъй като дискретните обучения за ограничен период от време са краен брой (например k на брой), то

$$\max \{I_0, I_1^+, I_2^+, \dots\} = \max \{I_0, I_1^+, I_2^+, \dots, I_k^+\} = \text{const.}$$

Заключение 2.4. Интересен въпрос, който не е осветен в дисертационния труд и може да бъде основа за следващо изследване, е: Съществува ли обща монотонност на количеството на информацията в паметта? По наше мнение на поставения въпрос адекватно може да се отговори чрез модела, създаден във втория параграф на настоящата глава. Както казахме по-горе, информацията намалява във всяка гладка еволюционна част и се увеличава (скокообразно) непосредствен след всяко кратковременно дискретно обучение. Взаимодействието между тези две тенденции дава отговор на поставения въпрос. Най-общо казано, монотонността на количеството на информацията се определя от доминацията между двата (в някакъв смисъл противостоящи) фактори:

- импулсните приходи на информацията при обученията;
- еволюционните загуби между тези попълвания на информацията.

Заключение 2.5. С помощта на основните хипотези е показано, че количеството на информацията в паметта зависи непрекъснато от придобитите количества информация в процеса на кратковременните дискретни обучения. По друг начин казано, нека разгледаме два процеса на изменение на количеството на информацията, които са поставени при едни и същи условия. Нека тези процеси се различават само в количествата на информацията, които се придобиват по време на кратковременните дискретни обучения. Тогава ако разликите в импулсно приетите количества на информацията са „достатъчно малки“, то количествата на информацията в двата разгледани процеса, измерени в един и същи произволен момент t след началото t_0 , се различават „незначително“ (виж Теорема 2.1).

Глава 3. Математически модел на обучение, поддържащо минимално количество на информацията в паметта

Резултатите в тази глава са публикувани в статията:

Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., *Mathematical training model maintaining minimum amount of information in the memory*, London review of education and science, Vol. 22, Issue 2, (2017), 323-340.

Продължени са изследванията от предходните две глави. Изучен е дългосрочен процес на изменение на информацията в паметта на абстрактен обобщен индивид със следните допълнителни изисквания:

- Количеството на информацията в паметта $I = I(t)$ през изучавания период е не по-малко от предварително фиксиран критичен минимум, т.е. съществува положителна константа $I_{\min}$, такава че $I(t) \geq I_{\min}$, $t \geq t_0$;

- Попълването на информацията се осъществява чрез последователни във времето „кратковременни и дискретни“ обучения. Моментите, в които се осъществяват дискретните попълвания на информацията, съвпадат с моментите, когато интегралната крива на разглежданата начална задача достигне критичния минимум.

Ще припомним, че нарастването на информацията се дава с формулата

$$\Delta I(t_i) = \beta \cdot I(t_i - 0).$$

Тук (за разлика от глава 2) ще предполагаме, че коефициентът β зависи само от времето t (точно от моментите t_i , $i = 1, 2, \dots$, в които се достига критичния минимум на информацията). Без съществени затруднения се вижда, че коефициентът β може да зависи допълнително и от количеството на информацията $I(t)$ в текущия момент t .

Основната разлика в постановките на изследванията, проведени тук и в предходните две глави, са следните две хипотези:

Девета хипотеза: Количеството на информацията за всяко $t \geq t_0$ е ограничено отдолу от положителна константа.

Математически горната хипотеза преформулираме така:

$$(\exists I_{\min} = \text{const} > 0): (I = I(t) \geq I_{\min}, t \geq t_0).$$

Тази константа по-нататък ще наричаме „критична стойност“ на количеството на информацията.

Освен това ще предполагаме че кратковременните дискретни обучения (попълване на информацията в паметта) се провеждат, когато количеството на информацията достигне критичната стойност. По-точно валидна е хипотезата:

Десета хипотеза: Всяко обучение се осъществява мигновено в моментите, в които количеството на информацията достига нейната критичната стойност.

С други думи, попълванията на информацията се провеждат скокообразно в моментите $t_1, t_2, \dots$, за които са валидни неравенствата:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots;$$

$$I(t_1) = I(t_2) = \dots = I_{\min};$$

$$I = I(t) > I_{\min}, t \geq t_0 \text{ и } t \neq t_i, i = 1, 2, \dots.$$

В настоящата глава ще предполагаме, че са валидни първа, четвърта, пета, шеста, седма, осма, девета и десета хипотези.

Новите означения в главата са:

- $I_{\min}$ е критичната стойност на количеството на информацията. Ще предполагаме, че $0 < I_{\min} < I_0$;
- $I(t; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta)$ е количество на информацията в паметта в момента $t \geq t_0$ при условия, че:
 - в началния момент t_0 количеството на информацията е I_0 ;
 - попълването на информацията се осъществява в моментите $t_1, t_2, \dots$, в които се достига критичната стойност на количеството на информацията;
 - валидно е неравенството

$$I(t; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta) > I_{\min}, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (3.1)$$

- изпълнени са равенствата

$$\begin{aligned} I(t_0; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta) &= I_0; \\ I(t_1; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta) &= I_{\min}; \\ I(t_2; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta) &= I_{\min}; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Общата задача, моделираща динамиката на информацията в паметта при условие, че нейното количество е над зададен критичен минимум, има вида

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(t - t_i)I, \quad I(t) > I_{\min}, \quad \text{m.e. } t_{i-1} < t < t_i; \quad (3.8)$$

$$I(t_i) = I_{\min}; \quad (3.9)$$

$$I(t_i + 0) = (1 + \beta(t_i)) \cdot I(t_i), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (3.10)$$

$$I(t_0) = I_0. \quad (3.11)$$

За решението на задачата (3.8) - (3.11) е валидна формулата

$$I(t; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta) = \begin{cases} I_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(\tau - t_0) d\tau\right), & t_0 \leq t \leq t_1; \\ (1 + \beta(t_1)) I_{\min} \exp\left(\int_{t_1}^t \alpha(\tau - t_1) d\tau\right), & t_1 < t \leq t_2; \\ \dots\dots\dots \\ (1 + \beta(t_i)) I_{\min} \exp\left(\int_{t_i}^t \alpha(\tau - t_i) d\tau\right), & t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots; \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Задачата (3.8) - (3.11), която е основен обект на изследване в настоящата глава, е типична начална задача за диференциални уравнения с импулсни въздействия в променливи импулсни моменти. Моментите на въздействия съвпадат с моментите, в които траекторията (интегралната крива) на съответната начална задача среща предварително фиксирано множество, разположено във фазовото (разширеното фазово) пространство. Това предварително фиксирано множество се нарича импулсно множество. В нашия случаи в моментите на импулсни въздействия $t_1, t_2, \dots$

интегралната крива $\gamma = \{(t, I(t; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta)); t > t_0\}$ на разглежданата начална задача (3.8) - (3.11) пресича импулсното множество $\varphi = \{(t, I_{\min}), t \geq t_0\}$. Можем да запишем равенството

$$\gamma \cap \varphi = \{(t_i, I_{\min}), i = 1, 2, \dots\}.$$

Решенията на съответните начални задачи за импулсни диференциални уравнения са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род, в които решенията са непрекъснати отляво. Ще отбележим съществена особеност на импулсните уравнения с **променливи** импулсни моменти. Импулсните моменти (за този клас уравнения) зависят от множество параметри на системата, от които тук ще посочим: началната точка (t_0, I_0) ; импулсното множество φ ; коефициентите на пропорционалност α и β . В общия случай, тези моменти са различни за всяко отделно решение. С други думи, импулсните моменти съществено зависят от решението. Това означава, че „близост“ между две различни решения не може да се очаква в достатъчно малки околности на импулсните моменти. Това се дължи на обстоятелството, че в тези околности е възможно едното от решенията да е извършило „импулсен скок“, а на другото решение такъв скок да предстои. Ще посочим няколко работи, които са посветени на качествената теория на споменатия клас уравнения: [48], [49], [50] и [91].

Ще използваме следните условия за параметрите на задачата (3.8) - (3.11):

Н3.1. Коефициентът α удовлетворява ограниченията:

Н3.1.1. Функцията $\alpha \in C[R^+, R^-]$;

Н3.1.2. Изпълнено е $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) = -\infty$;

Н3.1.3. Функцията α е ограничена отдолу, т.е.

$$(\exists \alpha_{\min} = \text{const} < 0) : (\forall t \geq 0) \Rightarrow (\alpha(t) \geq \alpha_{\min});$$

Н3.1.4. Функцията α е Липшицова с константа L_α , т.е.

$$(\forall t^*, t^{**} \geq 0) \Rightarrow |\alpha(t^*) - \alpha(t^{**})| \leq L_\alpha |t^* - t^{**}|.$$

Н3.2. Коефициентът β удовлетворява ограниченията:

Н3.2.1. Функцията $\beta \in C[R^+, R^+]$;

Н3.2.2. Функцията β е ограничена отдолу, т.е.

$$(\exists \beta_{\min} = \text{const} > 0) : (\forall t \geq 0) \Rightarrow (\beta(t) \geq \beta_{\min}).$$

Н3.2.3. Функцията β е Липшицова с константа L_β , т.е.

$$(\forall t^*, t^{**} \geq 0) \Rightarrow |\beta(t^*) - \beta(t^{**})| \leq L_\beta |t^* - t^{**}|.$$

При условията на следващата теорема интегралната крива γ на изучаваната задача пресича импулсното множество φ безбройно много пъти.

Теорема 3.1. Нека са валидни условията Н3.1.1, Н3.1.2 и Н3.2.1.

Тогава съществуват импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$, т.е. решението $I(t; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta)$ на задачата (3.8) - (3.11) достига критичната стойност $I_{\min}$ безбройно много пъти.

Теорема 3.2. Нека са валидни условията Н3.1.1, Н3.1.2, Н3.1.3, Н3.2.1 и Н3.2.2.

Тогава импулсните моменти (моментите на дискретно приемане на информация) $t_1, t_2, \dots$ не притежават точка на съгъстяване, т.е. $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Дефиниция 3.1. Ще казваме, че количеството на информация в паметта зависи непрекъснато от началното условие и нейната критична стойност, ако

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\forall \eta > 0)(\forall T > 0) \\ & (\forall t_0 > 0)(\forall I_0 > 0)(\forall I_{\min}^*, 0 < I_{\min} < I_0) \\ & (\forall \alpha \in C[R^+, R^-])(\forall \beta \in C[R^+, R^+]) \\ & (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, t_0, I_0, I_{\min}^*, \alpha, \beta) > 0): \\ & (\forall t_0^* > 0, |t_0^* - t_0| < \delta)(\forall I_0^* > 0, |I_0^* - I_0| < \delta) \\ & (\forall I_{\min}^*, 0 < I_{\min}^* < I_0^*, |I_{\min}^* - I_0| < \delta) \\ & \Rightarrow |I(t; t_0^*, I_0^*, I_{\min}^*, \alpha, \beta) - I(t; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta)| < \varepsilon, \\ & \text{при } t_0 \leq t \leq t_0 + T \text{ и } |t - t_i| > \eta, i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

По друг начин казано, за всеки две положителна константи ε, η и за всеки времеви интервал $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ с дължина $T > 0$ съществува положителна константа δ . Тази константа зависи от положителните константи ε и η , от дължината на времевия интервал T и от всички параметри на изучаваната начална задача. Константата е такава, че ако:

- две изходни начални точки (t_0^*, I_0^*) и (t_0, I_0) ;
 - две критични стойности на информацията $I_{\min}^*$ и $I_{\min}$
- се различават „достатъчно малко“ (по-точно, модулът на техните разлики е по-малък от константата δ), то съответните количества на информацията $I(t; t_0^*, I_0^*, I_{\min}^*, \alpha, \beta)$ и $I(t; t_0, I_0, I_{\min}, \alpha, \beta)$ се отличават „незначително“. По-прецизно, модулът на разликата на двете количества на информацията е по-малък от предварително избраната положителна константа ε . Произволно малката разлика между двете количества на информацията е за всяко t , което удовлетворява ограниченията:
- t е от посочения по-горе времеви интервал, т.е. $t_0 \leq t \leq t_0 + T$;
 - t е отдалечено от импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$ на разстояние не по-малко от произволно избраната положителна константа η , т.е. $|t - t_i| > \eta, i = 1, 2, \dots$.

Теорема 3.3. Нека са валидни условията Н3.1 и Н3.2.

Тогава количеството на информация зависи непрекъснато от началното условие и нейната критична стойност.

Резюме: Създаден е математически модел на динамиката на количеството на информацията с помощта на диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия от третия клас, разгледан в увода. Посочени са подходящи условия, при които количеството на информацията:

- достига многократно критичния минимум;
- моментите, в които се достига минимума не притежават точка на съгъстяване;

- зависи непрекъснато от началната точка (t_0, I_0) и критичния минимум на информацията $I_{\min}$.

Ще преформулираме част от получените математически резултати (теорема) в термините на изменението на количеството на информацията в паметта на абстрактен индивид при наличие на кратковременни дискретни попълвания на информацията и поддържане на минимално ниво на количеството на информацията.

Заклучение 3.1. От основните хипотези следва, че количеството на информацията е частично непрекъсната функция във времето. Стойностите на тази функция са не по-малки от предварително зададено минимално количество информация. Минималното количество на информацията се определя обикновено от работодателя във връзка с професионалните ангажименти на абстрактния индивид (в случая на абстрактния професионален изпълнител). Точките на прекъсване на количеството на информацията (скокообразното ѝ увеличение) съвпадат с моментите на прием на информация (обучения). Продължителностите на съответните обучения може условно да се приеме, че са „пренебрежимо кратки“ или мигновени.

В непрекъснатите части на развитие на количеството на информацията, се установява (чрез хипотезите), че то строго монотонно намалява. При тези основни хипотези повишаването на количеството на информацията се дължи единствено на кратковременните дискретни обучения.

Заклучение 3.2. Чрез основните хипотези се установява, че в течение на времето, като се вземе под внимание постоянната и незатихваща загуба на информацията, нейното количество достига критичното ниво $I_{\min}$ (виж Теорема 3.1). Ако експериментално се определи коефициентът на пропорционалност α , то е възможно да се предвидят (макар и приблизително) моментите, при които информацията ще достигне зададеното критично количество. Това означава, че е възможно предварително да се планират кратковременните дискретни обучения. Следователно е осъществимо в дългосрочен план да се изготви и реализира времеви график на дискретни кратковременни обучения (попълвания на информацията), при който количеството на информацията да се поддържа на подходящо високо ниво.

Интерес ще представлява изучаването на динамиката на количеството на информацията при условие, че нейното критично ниво $I_{\min}$ не е постоянна величина, а например $I_{\min}$ нараства с времето. Математически това означава, че минималното количество на информацията е функция на времето, т.е. имаме $I_{\min} = I_{\min}(t)$, $t \geq 0$. Както казахме, естествено е да се предполага, че функцията $I_{\min}$ е монотонно растяща, т.е. минимално допустимото количество на информацията расте с времето. Описаният в това заключение модел с променливо критично количество може да бъде обект на бъдещи научни изследвания.

Заклучение 3.3. Като имаме предвид общите качества на функцията, отразяваща количеството на информацията $I = I(t)$ в интервалите на гладкост и ако освен това направим естественото предположение, че коефициентът на попълване на информацията $\beta = \beta(t) > 0$, $t \geq 0$, при всяко обучение е ограничена отгоре функция, т.е.

$$(\exists \beta_{\max} = \text{const} > 0): (\beta(t) \leq \beta_{\max}, t \geq 0),$$

то лесно можем да установим, че количеството на информацията е също ограничена функция. Например, не е трудно да се съобрази, че е изпълнено неравенството

$$I(t) \leq (1 + \beta_{\max}) I_{\min}, t \geq 0.$$

Заклучение 3.4. От основните хипотези, при естествени и леснопроверими предположения следва, че кратковременните дискретни обучения са „разредени във времето“, т.е. между моментите на последователните кратковременни дискретни обучения има минимална дистанция (виж Теорема 3.2).

Заклучение 3.5. С помощта на основните хипотези е показано, че количеството на информацията в паметта зависи непрекъснато от началния момент t_0 , началното количество на информацията I_0 и минималното количество на информацията $I_{\min}$. По друг начин казано, нека разгледаме два процеса на изменение на количеството на информацията, които са поставени при едни и същи условия. Нека тези процеси се различават само в началните моменти, началните количества на информацията и минималните критични количества на информацията. Тогава, ако разликите в изброените параметри са „достатъчно малки“, то количествата на информацията в двата процеса се различават също „незначително“, във всеки момент след началото, който е „достатъчно отдалечен“ от моментите на прием на информация (виж Теорема 3.3).

Глава 4. Сравняване на количествата на информацията в паметта

Част от резултатите в тази глава са публикувани в работата:

Dishliev A. A., Girginov Ch., Dishlieva K., Comparison of quantities of information in the human memory, J. of Advances in Mathematics, Vol. 14, Issue 2, (2018), 8004-8012.

Изучен е математически модел на изменение на количеството на информацията в паметта на абстрактен представителен индивид при наличие на последователни във времето „кратковременни дискретни“ обучения (попълвания на информацията). Новото е, че количеството на информацията е решение на импулсно диференциално уравнение с **произволни** моменти на импулсни въздействия и смяна на структурата.

В настоящата глава ще приемем хипотезите: първа, четвърта, пета, шеста и седма от предходните глави.

Ще уточним Пета хипотеза: Превключващите моменти $t_1, t_2, \dots, t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, са произволни;

Тук въвеждаме следните нови хипотези:

Единадесета хипотеза: Изменението на количеството на информацията във всеки момент от интервалите на непрекъснатост $t_{i-1} < t < t_i$, $i = 1, 2, \dots$, е пропорционално на обема на информацията в същия момент.

Коефициентите на пропорционалност в тези интервали се изразяват чрез функциите $\alpha_{i-1} = \alpha_{i-1}(t)$, $t_{i-1} < t < t_i$, $i = 1, 2, \dots$.

Дванадесета хипотеза: След всяко дискретно обучение нарастването на количеството на информацията удовлетворява равенствата

$$\Delta I(t_i) = I(t_i + 0) - I(t_i) = I_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

В горното равенство положителните константи $I_1, I_2, \dots$ са зададени предварително. Ясно е, че нарастването на количеството на информацията е предварително зададено и не е пропорционално (както в предходните глави) на информацията в момента на попълването ѝ.

Тринадесета хипотеза: Количеството на информацията в паметта е ограничено отгоре.

Можем да кажем, че съществува капацитет на паметта. Нарастването на количеството на информацията в резултат на кратковременните дискретни обучения е ограничено отдолу, т.е. имаме минимален прием на информация.

Забележка 4.1. В глава 2 е формулирана Осма хипотеза със следното съдържание: След всяко обучение нарастването на количеството на информацията удовлетворява равенството

където $\beta = \beta(t, I(t)) > 0$, $t \geq t_0$, е предварително зададен функционален коефициент на пропорционално попълване на информацията. В глава 3 коефициентът β зависи само от времето t , т.е. $\beta = \beta(t) > 0$, $t \geq t_0$.

$$\beta(t_i, I(t_i)) = I_i / I(t_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

В тази глава, при условие че са валидни първа, четвърта, пета, шеста, седма, единадесета, дванадесета и тринадесета хипотези, можем да запишем следната начална задача за диференциални уравнения с произволни моменти на импулсните въздействия и променлива структура, която моделира динамиката на количеството на информацията в паметта:

$$I(t_0) = I_0. \quad (4.5)$$

$$I(t; t_0, t_1, \dots, I_0, I_1, \dots) = \begin{cases} I_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha_0(\tau - t_0) d\tau\right), & t_0 \leq t \leq t_1; \\ I_1^+ \exp\left(\int_{t_1}^t \alpha_1(\tau - t_1) d\tau\right), & t_1 < t \leq t_2; \\ \\ I_i^+ \exp\left(\int_{t_i}^t \alpha_i(\tau - t_i) d\tau\right), & t_i < t \leq t_{i+1}, i = 2, 3, \dots; \\ , \end{cases} \quad (4.6)$$

При условие, че импулсните въздействия са краен брой ще разгледаме две решения на задачата (4.3), (4.4), (4.5), които се различават както по превключващите моменти, така и по

големините на импулсните въздействия. Целта е да сравним асимптотично количеството на информацията, отразена с помощта на тези решения.

Теорема 4.1. Нека:

1. Изпълнени са условията Н4.1 и Н4.2.
2. Импулсните въздействия на задачата (4.3), (4.4), (4.5) са краен брой.

Тогава:

- За всеки две начални точки $(t_0^*, I_0^*), (t_0^{**}, I_0^{**}) \in R^+ \times R^+$;
 - за всеки краен брой импулсни въздействия i ;
 - за всеки две крайни редици от импулсни моменти $t_1^*, \dots, t_i^*, t_0^* < t_1^* < \dots < t_i^*$ и $t_1^{**}, \dots, t_i^{**}, t_0^{**} < t_1^{**} < \dots < t_i^{**}$;
 - за всеки две крайни редици от импулсни въздействия $I_1^*, \dots, I_i^* \in R^+$ и $I_1^{**}, \dots, I_i^{**} \in R^+$,
- за които е изпълнено

$$\begin{aligned} I_i^{*+} &= I(t_i^*; t_0^*, t_1^*, \dots, t_{i-1}^*, I_0^*, I_1^*, \dots, I_{i-1}^*) + I_i^* \\ &< I(t_i^{**}; t_0^{**}, t_1^{**}, \dots, t_{i-1}^{**}, I_0^{**}, I_1^{**}, \dots, I_{i-1}^{**}) + I_i^{**} = I_i^{**+} \end{aligned} \quad (4.7)$$

съществува константа T , $T > \max\{t_i^*, t_i^{**}\}$, такава че за всяко $t > T$ е изпълнено неравенството

$$I(t; t_0^*, t_1^*, \dots, t_i^*, I_0^*, I_1^*, \dots, I_i^*) < I(t; t_0^{**}, t_1^{**}, \dots, t_i^{**}, I_0^{**}, I_1^{**}, \dots, I_i^{**}).$$

Важно следствие от горната теорема е следното твърдение.

Теорема 4.2. Нека:

1. Изпълнени са условията Н4.1 и Н4.2.
2. Импулсните въздействия на задачата (4.3), (4.4), (4.5) са краен брой.

Тогава:

- за всеки краен брой импулсни въздействия i ;
- за всяка крайна редица от импулсни моменти $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1}$;
- за всеки два импулсни моменти t_i^* и t_i^{**} , които удовлетворяват неравенствата $t_{i-1} < t_i^* < t_i^{**}$;
- за всяка крайна редица от импулсни въздействия $I_1, \dots, I_i \in R^+$,

съществува константа T , $T > t_i^{**}$, такава че за всяко $t \geq T$ е изпълнено неравенството

$$I(t; t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i^*, I_0, I_1, \dots, I_i) > I(t; t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i^{**}, I_0, I_1, \dots, I_i).$$

Въвеждаме допълнително условието:

Н4.3. Изпълнено е

$$\int_0^\infty \alpha_{i-1}(\tau) d\tau = A_{i-1} = \text{const} < 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Забележка 4.3. От равенствата

$$\int_0^\infty \alpha_{i-1}(\tau) d\tau = A_{i-1}$$

следва съществуването на границите

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{i-1}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

С други думи от условие Н4.3 следва условие Н4.2. Това означава, че твърденията на горните две теореми няма да се променят, ако в тяхната формулировка условие Н4.2 заменим с условие Н4.3.

Ако кратковременните обучения са i на брой, то величината

$$I_{\infty} = I_i^+ \exp(A_i)$$

се нарича количество на остатъчната информация в паметта.

Добавяме още и следните условия:

Н4.4. Съществуват положителни константи $I_{\min}$ и $I_{\max}$, такива, че са валидни неравенствата

$$I_1 \geq I_{\min}, I_2 \geq I_{\min}, \dots \text{ и } I_1^+ \leq I_{\max}, I_2^+ \leq I_{\max}, \dots$$

Н4.5. Валидни са неравенствата

$$A_i \geq A_{i-1} + \ln \frac{I_{\max}}{I_{\min}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Теорема 4.3. Нека:

1. Изпълнени са условията Н4.1, Н4.3, Н4.4 и Н4.5.
2. Импулсните въздействия на задачата (4.3), (4.4), (4.5) са краен брой.

Разглеждаме две решения на задачата (4.3), (4.4), (4.5):

- $I(t; t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, I_0, I_1, \dots, I_{i-1})$ с $i-1$ на брой импулсни въздействия;
- $I(t; t_0, t_1, \dots, t_i, I_0, I_1, \dots, I_i)$ с i на брой импулсни въздействия.

Тогава:

- за всяко i ;
- за всяка крайна редица от импулсни моменти $t_1 < \dots < t_i$;
- за всяка крайна редица от импулсни въздействия $I_1 > 0, \dots, I_i > 0$,

съществува константа T , $T > t_i$, такава че за всяко $t \geq T$ е изпълнено

$$I(t; t_0, t_1, \dots, t_i, I_0, I_1, \dots, I_i) > I(t; t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, I_0, I_1, \dots, I_{i-1}).$$

Резюме: Основните резултати се отнасят до сравняване на количествата на информацията в два различни модела, допускащи попълване на информацията в произволни моменти. Сравненията са валидни за времеви моменти, които са достатъчно отдалечени от началото. В сравняваните модели се допускат различия само в:

- моментите на попълване на информацията;
- големините на дискретните попълвания на информацията.

В следващите няколко бележки ще представим тълкувание на получените математически резултати в термините, използвани при съхранението на информацията в паметта.

Заклучение 4.1. Да разгледаме два различни модела на дискретно попълване на информацията.

Двата модела не се различават (или напълно съвпадат) относно:

- броя на попълванията на информацията (броя на обученията);
- коефициентите на съхранение на информацията (последното означава, че разглежданите варианти за попълване на информацията се отнасят за един и същи абстрактен индивид).

Двата модела е допустимо да се различават в следните характеристики:

- началните условия, т.е. начален момент и начално количество на информацията в паметта;
- моментите, в които се осъществяват дискретните попълвания на информацията;
- големините на допълване на информацията при дискретните обучения;
- количествата на информацията след последното попълване на информацията.

Тогава (след достатъчно дълъг период от време) количеството на информацията има по-голям обем при модела с по-голямото количество на информацията след последното попълване (виж Теорема 4.1). С други думи, количеството на информацията в паметта, пресметната непосредствено след последното обучение, е основен фактор за обема на информацията в бъдещето развитие. Предходните попълвания на информацията (преди последното попълване) имат второстепенно значение.

Заклучение 4.2. Отново да разгледаме два отличаващи се модела на дискретно попълване на информацията.

Двата варианта не се различават, т.е. напълно съвпадат по следните параметри:

- началните условия;
- броя на външните попълвания на информацията;
- коефициентите на съхранение на информацията;
- големините на изменение на информацията при дискретните обучения;
- от първия до предпоследния момент, в които се осъществяват дискретните попълвания на информацията;

Двата модела (варианта на попълване на информацията) е допустимо да се различават единствено по:

- последния момент на обучение.

Тогава (след достатъчно дълъг период от време) обемът на информацията е по-голям при варианта с по-късно попълване на количеството на информацията (виж Теорема 4.2).

Заклучение 4.3. Разглеждаме два модела на дискретно попълване на информацията.

Двата варианта не се различават или съвпадат следните техни елементи:

- началните условия;
- коефициентите на съхранение на информацията;
- големините на изменение на информацията при дискретните обучения;
- от първия до предпоследния момент, в които се осъществяват дискретните попълвания на информацията;

Двата модела (варианти на попълване на информацията) е допустимо да се различават по:

- броя на обученията.

Тогава (след достатъчно дълъг период от време) обемът на информацията е по-голям при варианта с още едно (допълнително) попълване на количеството на информацията (виж Теорема 4.3).

Глава 5. определяне на коефициента на съхранение на информацията в паметта

Резултатите от главата са публикувани в статиите:

Dishliev A. A. (junior), Girginov Ch., Dishlieva K., Determining the coefficients of storing information in the human memory, International Journal of Sciences: Basic and Applied Research, (2018), Vol. 42, No 2, 113-120.

Abou Habib M., Dishliev A. A. (junior), Numerical method for determining the coefficient of storing information, Science, Engineering & Education (2019), (to appear).

Въведена е методика за приближено намиране на коефициента на съхранение на информацията в паметта. Методът е ефективен и подходящ само в случай, че:

- по време на моделирания процес на съхранение на информацията задължително се провежда многократно попълване на информацията;
- коефициентът на съхранение на информацията не се променя след всяко от попълванията на информацията.

В глава 1 беше получена връзка между величините α - коефициент на съхранение на информацията и I - количество на информацията (виж (1.2):

$$I(t; t_0, I_0) = I_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(\tau - t_0) d\tau\right)$$

Ще обърнем внимание на следните изводи, получени в дисертацията:

Извод 1: От горните две величини за управлението на процеса на съхранение на информацията е по-полезно познаването на количеството на информацията I във всеки момент $t > t_0$;

Извод 2: От посочените две величини (коэффициент на съхранение на информацията α и количество на информацията I) по-напред трябва да намерим количеството на информацията I . Това се осъществява чрез:

- реализиране на няколко еднотипни експерименти (представляващи дискретни замервания на количеството на информацията);
- апроксимиране на резултатите от експериментите и приблизително намиране на количеството на информацията в даден интервал.

Извод 3: След численото намиране на количеството на информацията, като следствие от (1.2) може да се получи коефициентът на пропорционалност (съхранение на информацията);

Извод 4: При отсъствие на кратковременни обучения намирането на коефициента α няма практическа значимост, тъй като (както казахме по-горе) за управляващия процеса е важно да знае количеството на информацията в паметта, а не съответния коефициент на пропорционалност. Следователно, ако се намери функцията $I = I(t)$, няма смисъл да се търси допълнително коефициента на съхранение на информацията. Изрично ще подчертаем, че направеният извод е валиден само при отсъствие на допълнителни обучения;

Извод 5: При наличие на допълнителни обучения приблизителното намиране на количеството на информацията трябва да се извърши многократно - отделно във всеки интервал на непрекъснато изменение на информацията. Това налага много по обем тестови замервания на информацията и многократно решаване на подобни апроксимационни задачи. В този случай намирането на коефициента на съхранение на информацията е смислена задача, защото след като се сдобием с него, то многократно ще приложим равенство (1.2) (разбира се с различни начални условия – специфични за всеки един от интервалите на непрекъснатост).

Методът е реализиран в конкретен вариант. За целта са представени и анализирани множество тестове в подходящо избрана група от обучаеми (в конкретния случай – студенти).

Резюме: Предложен е следният алгоритъм за намиране на коефициента на съхранение на информацията:

Алгоритъм 5.1.

1. Определяме броя на наблюденията n ;
2. Определяме моментите на провеждане на експериментите $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$;
3. Определяме броя на участниците в наблюденията $k_1, k_2, \dots, k_n$;
4. Определяме относителните тегла на участниците в наблюденията $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1k_1}$,
 $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2k_2}, \dots, \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nk_n}$;
5. Определяме частите на съхранената информация от участниците в експериментите
 $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1k_1}, p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2k_2}, \dots, p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nk_n}$;
6. Пресмятаме константите $I_1, I_2, \dots, I_n$ по формулата

$$I_i = \lambda_{i1} p_{i1} + \lambda_{i2} p_{i2} + \dots + \lambda_{ik_i} p_{ik_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$
7. Пресмятаме константите $A_1 = \ln I_1, A_2 = \ln I_2, \dots, A_n = \ln I_n$;

8. За табличната функция, зададена чрез Таблица 5.2, определяме вида на апроксимиращото параметричното семейство $\varphi(a, b, \dots)$;
9. Чрез метода на най-малките квадрати определяме функцията $A(t; a, b, \dots) \in \varphi(a, b, \dots)$ (локализираме параметрите);
10. Намираме приближението на търсената функция $\alpha(t; a, b, \dots) = \frac{d}{dt} A(t; a, b, \dots)$.

τ_1	τ_2	$\dots$	τ_n
$A_1 = \ln I_1$	$A_2 = \ln I_2$	$\dots$	$A_n = \ln I_n$

Таблица 5.2

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Алимов Ю., О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями, Автоматика и телемеханика, (1961), Том 22, № 7, 817-830.
2. Андронов А., Витт А., Хайкин С., Теория колебаний, Наука, Москва, (1981).
3. Бабицкий В., Крупенин В., Колебания в сильно нелинейных системах, Наука, Москва, (1985).
4. Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях, Научная думка, Москва, (1988).
5. Борисенко С., Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсным воздействием, Укр. Математический журнал, (1983), Том 35, № 2, 144-150.
6. Борисенко С., Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсным воздействием, Дифференциальные уравнения, (1986), Том 22, № 5, 884-886.
7. Завалишин С., Сесекин А., Дрозденко С., Динамические системы с импульсной структурой, Средне Урал. кн. изд-во, Свердловск, (1983).
8. Завалишин С., Сесекин А., Импульсные процессы: Модели и приложения, Наука, Москва, (1991).
9. Калитин Б., О колебаниях маятника с ударным импульсом, часть 1, Дифференциальные уравнения, (1969), Том 5, № 7, 1267-1274.
10. Калитин Б., О колебаниях маятника с ударным импульсом, часть 2, Дифференциальные уравнения, (1970), Том 6, № 12, 2174-2181.
11. Калитин Б., О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением, Дифференциальные уравнения, (1971), Том 7, № 3, 540-542.
12. Каранджулов Л., Стоянова Я., Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, Весці НАН Беларусі, (2003), Том 2, 59-61.
13. Каранджулов Л., Стоянова Я., Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, Дифференциальные уравнения, (2004), Том 40, № 3, 310-323.
14. Кобринский А. Е., Кобринский А. А., Выбродарные системы, Наука, Москва, (1973).
15. Козлов Р., К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, Дифференциальные уравнения, (1974), Том 10, № 7, 1264-1271.
16. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, Дифференциальные уравнения, (1967), Том 3, № 3, 395-409.
17. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями II, Дифференциальные уравнения, (1967), Том 3, № 5, 869-878.
18. Мильман В., Мышкис А., Об устойчивости движения при наличии толчков, Сиб. Математический журнал, (1960), Том 1, № 2, 233-237.

19. Мильман В., Мышкис А., Случайные толчки в линейных динамических системах, Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, Киев, Изд-во АН УССР, (1963), 64-81.
20. Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью, Институт математики НАН Украины, Киев, (2007).
21. Плотников В., Китанов Н., Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления, Кибернетика и системный анализ, (2002), Том 5, 71-81.
22. Рожко В., Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах, Дифференциальные уравнения, (1975), Том 11, № 6, 1005-1012.
23. Самойленко А., Перестюк Н., Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, Вища школа, Киев, (1987).
24. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях, Дифференциальные уравнения, (1979), Том 15, № 10, 1814-1823.
25. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Наука, Москва, (1985).
26. Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, Мир, Москва, (1971).
27. Agarwal R., O'Regan D., A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem, Applied Mathematics and Computation, (2003), Vol. 161, № 2, 433-419.
28. Agarwal R., O'Regan D., Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, Applied Mathematics and Computation, (2000), Vol. 114, № 1, 51-59.
29. Ahmad S., Stamov G., Almost periodic solutions of N-dimensional impulsive competitive systems, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.
30. Ahmad S., Stamova I., Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2008), Vol. 69, № 3, 786-791.
31. Akhmet M., Alzabut J., Zafer A., Perron's theorem for linear impulsive differential equations with distributed delay, J. of Computational and Applied Mathematics, (2006), Vol. 193, № 1, 204-218.
32. Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2006), Vol. 7, № 5, 1255-1267.
33. Akhmet M., On the smoothness of solutions of impulsive autonomous systems, Nonlinear Analysis, (2005), Vol. 60, № 2, 311-324.
34. Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., Control over linear pulse systems, Ukrainian Mathematical J., (1995), Vol. 47, № 3, 360-368.
35. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, Computers & Mathematics with Applications, (2002), Vol. 43, № 10-11, 1203-1218.
36. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, International J. of Differential Equations and Applications, (2000), Vol. 3, № 4, 7-18.
37. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2000), Vol. 39, № 4, 483-497.
38. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems in population dynamics, Applicable Analysis, (1999), Vol. 69, № 3&4, 207-221.
39. Anokhin A., Berezansky L., Braverman E., Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1995), Vol. 193, 923-941.
40. Antonov A., Dishliev A. A., Dishliev A. B., Nenov S., Mathematical modelling of discontinuous processes, Scientific Research Publishing, Delaware, USA and Wuhan, China, (2017).
41. Aubin J., Mathematical methods of game and economic theory, Courier Corporation, (2007).

42. Baek H., *Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies*, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008), Article ID 752403, 18 p.
43. Bainov D., Covachev V., *Impulsive differential equations with a small parameter*, World Scientific, Singapore, (1994).
44. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations*, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, (1991), Vol. 12, № 2, 149-161.
45. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1994), Vol. 187, № 3, 790-808.
46. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument*, *Kodai Mathematical J.*, (1997), Vol. 20, № 2, 120-126.
47. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument*, *Aplicable Analysis*, (1996), Vol. 63, № 3&4, 287-297.
48. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument*, *J. of Applied Analysis*, (1998), Vol. 4, № 2, 215-230.
49. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillating solutions of nonlinear impulsive differential equations with a deviating argument*, *Note di Matematica*, (1995), Vol. 15, № 1, 45-54.
50. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument*, *J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, (1998), Vol. 11, № 1, 95-102.
51. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations*, *Multivariate Approximation and Splines*, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.
52. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations*, *Indian J. of Pure and Applied Mathematics*, (1999), Vol. 30, № 9, 893-910.
53. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Applied Mathematics and Computation*, (1990), Vol. 39, № 1, 37-48.
54. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences*, (1989), Vol. 42, № 12, 29- 32.
55. Bainov D., Dishliev A., Stamov G., *Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations*, *Kumamoto J. of Mathematics*, (1997), Vol. 10, 1-10.
56. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations*, *Annali dell'Università di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche*, (1995), Vol. 41, 45-54.
57. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Lipschitz quasistability of impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations*, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1996), Vol. 70, № 2, 267-277.
58. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics*, *ANZIAM J.*, (2002), Vol. 43, 525-539.
59. Bainov D., Dishliev A., *The phenomenon beating of the solutions of impulsive functional differential equations*, *Communications in Applied Analysis*, (1997), Vol. 1, № 4, 435-442.

60. Bainov D., Dishliev A., *Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses*, *International J. Systems Science*, (1990), Vol. 21, № 12, 2637-2643.
61. Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., *Partial averaging for impulsive differential equations with supremum*, *Georgian Mathematical J.*, (1996), Vol. 3, № 1, 11-26.
62. Bainov D., Kostadinov S., Minh N., *Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations*, *Science Culture Technology Publishing*, (1994).
63. Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., *Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations*, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 36, № 2, 383-393.
64. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., *Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space*, *International J. of Theoretical Physics*, (1989), Vol. 28, № 7, 797-814.
65. Bainov D., Kulev G., Stamova I., *Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations*, *SUT J. of Mathematics*, (1995), Vol. 1, 55-71.
66. Bainov D., Kulev G., Stamova I., *Instability of solutions of impulsive systems of differential equations*, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 35, № 8, 1799-1804.
67. Bainov D., Milusheva S., *Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses*, *J. of Mathical Analysis and Applications*, (1983), Vol. 95, № 1, 85-101.
68. Bainov D., Milusheva S., *Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses*, *Zeitschrift fur Angawandte Mathematik und Physik*, (1981), Vol. 32, 237-254.
69. Bainov D., Nenov S., *Limit sets of impulsive dynamical systems*, *Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations*, (1994), 31-34.
70. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions*, *World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong*, (1995).
71. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications*, *Longman Scientific & Technical, Harlow*, (1993).
72. Bainov D., Simeonov P., *Integral inequalities and applications*, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, (1992).
73. Bainov D., Simeonov P., *Oscillation theory of impulsive differential equations*, *International Publications, FL*, (1998).
74. Bainov D., Simeonov P., *System with impulse effect: Stability theory and applications*, *Ellis Horwood, Chichester*, (1989).
75. Ballinger G., Liu X., *Permanence of population growth model with impulsive effects*, *Mathematics and Computer Modeling*, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.
76. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive differential equations and inclusions*, *Contemporary Mathematics and its Applications, Hindawi Publishing Corporations*, Vol. 2, (2006).
77. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces*, *Applicable Analysis*, (2001), Vol. 80, № 3, 353-361.
78. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 47, № 10-11, 1659-1661.
79. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay*, *International J. of Applied Mathical Sciences*, (2005), Vol. 2, № 1, 130-148.
80. Benchohra M., Ouahab A., *Impulsive neutral functional differential equations with variable times*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2003), Vol. 55, № 6, 679-693.
81. Berezansky L., Braverman E., *On Impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications*, *J. of Differential Equations and Applications*, (2004), Vol. 10, № 9, 851-868.

82. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V., *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for industrial and applied mathematics, (1994).
83. Chen F., Wen X., *Oscillation of N-order linear differential equations with impulses*, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2006), Vol. 29, № 3, (in Chinese).
84. Chen G., Shen J., *Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks*, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A*, (2007), Vol. 14, 177-188.
85. Chen J., Tisdell C., Yuan R., *On the solvability of periodic boundary value problems with impulse*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 331, № 2, 902-912.
86. Chen S., Qi J., Jin M., *Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2003), Vol. 46, № 8-9, 1281-1287.
87. Cheng D., Yan J., *Global existence and asymptotic behavior of solution of second-order nonlinear impulsive differential equations*, *International J. of Mathematics and Mathematical Sciences*, (2001), Vol. 25, № 3, 175-182.
88. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses in respect of switching functions*, *International J. of Applied Science and Technology*, (2011), Vol. 1, № 5, 46-59.
89. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2012), Vol. 11, № 1, 57-80.
90. Chukleva R., Dishliev A., *On the continuous dependence of the switching moments of trajectories*, *Proceedings of the Jubilee Scientific Conference with International Participation Dedicated to the, 50th Anniversary of the Smolyan Branch of Plovdiv University*, (2012), Vol. 2, Part 2, 75-80.
91. Chukleva R., *Modeling using differential equations with variable structure and impulses*, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 72, № 3, 343-364.
92. Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).
93. Cooper R., *Introduction to queueing theory*. North Holland, (1981).
94. Cordova-Lepe F., *Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics*, *Biomat 2006, International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
95. D'onofrio A., *Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model*, *Mathematical Biosciences*, (2002), Vol. 179, № 1, 179, 57-72.
96. Dai B., Su H., Hu D., *Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.
97. Dannan F., Elaydi S., *Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations*, *J of Mathematical Analysis and Applications*, (1986), Vol. 113, 562-577.
98. DeCarlo R., Zak S., Matthews G., *Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial*, *Proceedings on the IEEE*, (1988), Vol. 76, № 3, 212-232.
99. Dhage B., Boucherif A., Ntouyas S., *On periodic boundary value problems of first-order perturbed impulsive differential inclusions*, *Electronic J. of Differential Equations*, (2004), Vol. 2004, № 84, 1–9.
100. Dishliev A., Bainov D., *Conditions for the absence of the phenomenon "beating" for systems of impulse differential equations*, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, (1985), Vol. 13, № 3, 237-256.
101. Dishliev A., Bainov D., *Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.

102. Dishliev A., Bainov D., Continuous dependence on the initial condition of the solution of a system of differential equations with variable structure and with impulses, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University*, (1987), Vol. 23, № 6, 923-936.
103. Dishliev A., Bainov D., Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1990), Vol. 29, № 6, 655-671.
104. Dishliev A., Bainov D., Differentiability on a parameter and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses, *Osterreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, (1987), Wien, Band 196, Heft 1-3, 69-96.
105. Dishliev A., Bainov D., Investigation of the Lipschitz stability via limiting equations, *Dynamics and Stability of Systems*, (1990), Vol. 5, № 2, 59-64.
106. Dishliev A., Bainov D., Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with impulses, *Applicable Analysis*, (1984), Vol. 18, № 1&2, 67-73.
107. Dishliev A., Bainov D., Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 363-372.
108. Dishliev A., Dishlieva K., Abou Habib M., Mathematical model of dynamics of the amount of information in human memory, *American J. of Education*, (2017), Vol. 123, № 4 (1.2), 1073-1081.
109. Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical model of the amount of information in the human memory for short time discrete trainings, *Science and Educational Studies*, (2018), Vol. VIII, № 1 (29), 229-244.
110. Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical training model maintaining minimum amount of information in the memory, *London review of education and science*, (2017), Vol. 22, № 2, 323-340.
111. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 1, 39-64.
112. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right-hand side, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, № 2, 149-159.
113. Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications, *Academic Publications, Ltd.* (2012).
114. Dishliev A. A. (junior), Girginov Ch., Dishlieva K., Comparison of quantities of information in the human memory, *J. of Advances in Mathematics*, (2018), Vol. 14, № 2, 8004-8012.
115. Dishliev A. A. (junior), Girginov Ch., Dishlieva K., Determining the coefficients of storing information in the human memory, *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research*, (2018), Vol. 42, No 2, 113-120.
116. Dishlieva K., Antonov A., Hausdorff metric and differential equations with variable structure and impulses, *Technical University - Sofia*, (2015).
117. Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves, *Acta Mathematica Scientia*, (2012), Vol. 32, № 3, 1035-1052.
118. Dishlieva K., Dishliev A. A., Stability of impulsive differential equations with random impulsive moments, *International J. of Science, Technology and Management*, ISSN (online): 2394-1537, (2015), Vol. 4, № 5, 162-172.
119. Dishlieva K., Dishliev A. A., Unlimited Moments of Switching for Differential Equations with Variable Structure and Impulses, *Advances in Mathematics - Scientific Journal*, ISSN 1857-8365, (2015), Vol. 4, № 1, 11-19.
120. Dishlieva K., Dishliev A. B., Dishliev A. A., Optimal impulsive effects and maximum intervals of existence of the solutions of impulsive differential equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and*

- Impulsive Systems, Series B Applications & Algorithms*, ISSN 1492-8760 (print), 1918 2538 (electronic), (2015), Vol. 22, 465-489.
121. Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., A class of integral manifolds for autonomous systems of differential equations, *German J. of Advanced Mathematical Sciences*, (2013), Vol. 1, № 1, 11-19.
 122. Dishlieva K., On the qualitative theory of differential equations with random impulsive moments, *International J. of Science, Technology and Management*, (2015), Vol. 4, № 4, 172-180.
 123. Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth, *The J. of Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, (1991), Vol. 32, 382-400.
 124. Feng C., Huang Z., Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
 125. Fenner L., Pinto M., On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 38, № 3, 307-321.
 126. Filippov A., *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1988).
 127. Franco D., Nieto J., Maximum principles for periodic impulsive first order problems, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1998), Vol. 88, № 1, 149-159.
 128. Frigon M., O'Regan D., First order impulsive initial and periodic problems with variable moments, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1996), Vol. 233, № 2, 730-739.
 129. Frigon M., O'Regan D., Impulsive differential equations with variable times, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (1996), Vol. 26, № 12, 1913-1922.
 130. Frigon M., O'Regan D., Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, (2001), Vol. 8, № 2, 149-159.
 131. Fu X., Li X., Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time, *Mathematics and Computer Modeling*, (2008), Vol. 48, № 5-6, 776-786.
 132. Georgieva A., Kostadinov S., L_p -equivalence of impulsive differential equations, *SUT J. of Mathematics*, (1997), Vol. 33, № 2, 291-301.
 133. Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the L_p -equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, *Turkish J. of Mathematics*, (2008), Vol. 32, 451-466.
 134. Gladilina R., Ignatyev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, *International Applied Mechanics*, (2008), Vol. 44, № 2, 228-237.
 135. Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, *Rocky Mountain J. of Mathematics*, (1996), Vol. 26, № 1, 165-173.
 136. Gopalsamy K., Zhang B., On delay differential equations with impulses, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.
 137. He Z., Ge W., Oscillation in second order linear delay differential equations with nonlinear impulses, *Mathematica Slovaca*, (2002), Vol. 59, № 3, 331-341.
 138. Henderson J., Thompson H., Smoothness of solutions for boundary value problems with impulse effects, II, *Mathematical and Computer Modeling*, (1996), Vol. 223, № 10, 61-69.
 139. Hristova S., Bainov D., Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations, *Rocky Mountain J. of Mathematics*, (1993), Vol. 23, № 2, 609-618.
 140. Hristova S., Kulev G., Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2001), Vol. 132, № 2, 399-407.
 141. Hristova S., Roberts L., Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, (2001), Vol. 34, № 7-8, 839-847.

142. Hristova S., Stefanova K., Practical stability of impulsive differential equations with “supremum” by integral inequalities, *European J. of Pure and Applied Mathematics*, (2012), Vol. 5, № 1, 30-44.
143. Ignatyev A., On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 1, 53-72.
144. Jia J., Li C., A Predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195, 15 p.
145. Jiao J., Chen L., Cai S., Dynamical analysis on a single population model with state-dependent impulsively unilateral diffusion between two patches, *Advances in Difference Equations*, (2012), 2012:155 Doi: 10.1186/1687-1847-2012-155.
146. Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey, *Applied Mathematics and Mechanics*, (2008), Vol. 29, № 5, 653-663.
147. Jin Z., Zhien M., Maoan H., The existence of periodic solutions of the n -species Lotka-Volterra competitions system with impulsive, *Chaos Solitons & Fractals*, (2004), Vol. 22, № 1, 181-188.
148. Karandjulov L., Stoyanova Y., Problem of Cauchy for linear singularly perturbed impulsive systems, *Miskolc Mathematical Notes*, (2002), Vol. 3, № 1, 25-37.
149. Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator, *Rostocker Mathematisches Kolloquium*, (1999), Vol. 53, 51-59.
150. Kulev G., Bainov D., On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct methods, *Dynamics and stability of systems*, (1990), Vol. 110, № 3, 149-162.
151. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
152. Lakshmikantham V., Liu X., Stability for impulsive differential systems in terms of two measures, *Applied Mathematics and Computations*, (1989), Vol. 29, № 1, 89-98.
153. Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., Hybrid systems with time scales and impulses, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2147-2152.
154. Lan H.-Y., Nieto J., On initial value problems for first-order implicit impulsive fuzzy differential equations, *Dynamic Systems and Applications*, (2009), Vol. 18, 677-686.
155. Li J., Nieto J., Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 226-236.
156. Li X., Oscillation properties of second order delay differential-difference equations with impulses, *Advances in Applied Mathematical Analysis*, (2008), Vol. 3, № 1, 55-66.
157. Liu B., Teng Z., Liu W., Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.
158. Liu L., Ye Y., Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses, *International J. of Computational and Mathematical Sciences*, (2011), Vol. 5, № 4, 229-231.
159. Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y., Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2002), Vol. 271, № 1, 124-188.
160. Liu X., Chen L., Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator, *Chaos Solitons & Fractals*, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.
161. Liu X., Chen L., Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.
162. Liu X., Li G., Luo G., Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.
163. Liu X., Stability results for impulsive differential systems with application to population growth models, *Dynamical Stability Systems*, (1994), Vol. 9, № 2, 163-174.

164. Luo Z., Shen J., *Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional*, *Applied Mathematics Letters*, (2009), Vol. 22, № 2, 163-169.
165. Meng X., Chen L., Li Q., *The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients*, *Applied Mathematics and Computation*, (2008), Vol. 198, № 1, 361-374.
166. Meng X., Chen L., *Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays*, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 2, 179-196.
167. Meng X., Jiao J., Chen L., *The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 2, 1255-1267.
168. Meng X., Li Z., Nieto J., *Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment*, *J. of Mathematical Chemistry*, (2010), Vol. 47, № 1, 123-144.
169. Milev N., Bainov D., *Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure*, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 353-361.
170. Milev N., Bainov D., Roach G., *Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (1989), Vol. 11, № 2, 271-278.
171. Milev N., Bainov D., *Stability of linear impulsive differential equations*, *Computers & Mathematics with Applications*, (1990), Vol. 20, № 12, 35-41.
172. Naulin R., Pinto M., *Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 208, № 2, 281-297.
173. Nenov S., Bainov D., *Impulsive dynamical systems*, *Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations*, (1992), 145-166.
174. Nenov S., *Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics*, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 36, № 7, 881-890.
175. Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., *Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects*, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2009), Vol. 224, № 2, 544-551.
176. Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., *The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator*, *BioSystems*, (2009), Vol. 98, № 2, 67-72.
177. Nieto J., *Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 205, № 2, 423-433.
178. Nieto J., O'Regan D., *Variational approach to impulsive differential equations*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 680-690.
179. Nieto J., Rodrigues-Lopez R., *Boundary value problems for a class of impulsive functional equations*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2008), Vol. 55, № 12, 2715-2731.
180. Nieto J., Rodríguez-López R., *Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.
181. Paden B., Sastry S., *A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators*, *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, (1987), Vol. 34, № 1, 73-82.
182. Pandit S., Deo S., *Differential systems involving impulses*, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
183. Perestyuk M., Chernikova O., *Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations*, *Ukrainian Mathematical J.*, (2008), Vol. 60, № 1, 91-107.

184. Petkova S., Antonov A., Chukleva R., Reachable sets for homogenous systems of differential equations and their topological properties, *American J. of Applied Mathematics*, (2013), Vol. 1, № 4, 49-54.
185. Petkova S., On the fundamental theory of impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2013), Vol. 12, № 2, 121-129.
186. Plotnikov V., Ivanov R., Kitanov N., Method of averaging for impulsive differential inclusions, *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, (1998), Vol. 12, 43-51.
187. Rogovchenko Y., Nonlinear Impulse evolution systems and applications to population models, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 207, № 2, 300-311.
188. Rouche N., Habets P., Laloy M., *Stability theory by Liapunov's direct method*, New York: Springer-Verlag, (1977).
189. Samoilenko A., Stanzhytskyi O., *Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations*, World scientific series on nonlinear science, (2011).
190. Samojlenko A., Perestyuk N., *Impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, (1995).
191. Shen J., Li J., Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.
192. Shuai Z., Bai L., Wang K., Optimization problems for general simple population with n-impulsive harvest, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 329, № 1, 634-646.
193. Simeonov P., Bainov D., Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations, *Tamkang J. of Mathematics*, (1991), Vol. 22, № 3, 275-284.
194. Simeonov P., Bainov D., Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (1988), Vol. 31, № 2, 353-368.
195. Smith L., Wahl L., Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects, *Bulletin of Mathematical Biology*, (2005), Vol. 67, № 4, 783-813.
196. Stamov G., *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, (2012).
197. Stamov G., Stamova I., Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay, *Applied Mathematical Modeling*, (2007), Vol. 31, № 7, 1263-1270.
198. Stamov G., Stamova I., Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2001), Vol. 258, № 2, 371-379.
199. Stamova I., Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations, (2008), *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, (2008), Vol. 77, 331-341.
200. Stamova I., Emmenegger G.-F., Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets, *International J. of Applied Mathematics*, (2004), Vol. 15, № 3, 271-290.
201. Stamova I., On the stability of an impulsive differential-difference population model, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, 285-291.
202. Stamova I., Parametric stability of impulsive functional differential equations, *J. of Dynamical and Control Systems*, (2008), Vol. 14, № 2, 235-250.
203. Stamova I., *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2009).
204. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations, *Electronic J. of Differential Equations*, (2008), Vol. 48, 1-10.

205. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2001), Vol. 130, № 1-2, 163-171.
206. Stamova I., Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 612-623.
207. Sun S., Chen L., Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, *Applied Mathematics and Computation*, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.
208. Vasundhara D., Basic results in impulsive set differential equations, *Nonlinear Studies*, (2003), Vol. 10, № 3, 259-271.
209. Wang F., Pang G., Shen L., Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.
210. Wang H., Feng E., Xiu Z., Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.
211. Wang W., Shen J., Luo Z., Partial survival and extinction in two competing species with impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.
212. Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.
213. Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.
214. Xian X., O'Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, *Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems*, (2008), Vol. 2008, Article ID 197201.
215. Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, *Mathematics and Computer Modeling*, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.
216. Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.
217. Yang Z., Xu D., Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, (2005), Vol. 52, 517-521.
218. Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential p -stability of impulsive stochastic differential equations with delays, *Physics Letters A*, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.
219. Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.
220. Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.
221. Zavalishchin S., Seseikin A., *Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
222. Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Advances in Complex Systems*, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.
223. Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, *Mathematical and Computer Modelling*, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.
224. Zhang X., Shuai Z., Wang K., Optimal impulsive harvesting policy for single population, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651.

225. Zhao A., Lakshmikantham V., *Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses*, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дисертацията са получени следните по-важни резултати:

1. Намерен е клас линейни диференциални уравнения (без импулси), който е адекватен математически модел на динамиката на количеството информация в паметта. Получени са лесно проверяеми условия, при които количеството информация в паметта:
 - се изменя слабо,
 - е равномерно устойчиво,
 - е Липшицово устойчиво,
2. Посочен е клас линейни диференциални уравнения с импулсни въздействия във фиксирани моменти, който е подходящ математически модел на изменението на количеството на информацията в паметта при наличието на последователни във времето „кратковременни дискретни“ обучения, т.е. скокообразни попълвания на информацията в паметта. Предложени са няколко лесно проверяеми ограничения, свързани с параметрите на модела, при които количеството на информацията зависи непрекъснато от количествата на многократните нейни попълвания;
3. Предложен е клас импулсни диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия. Чрез тях е изучен процес на изменение на количеството на информацията в паметта със следните специфични особености:
 - количеството на информация в паметта през изучавания период е не по-малко от фиксиран критичен минимум,
 - попълването на информацията се осъществява чрез последователни във времето „кратковременни и дискретни“ обучения.Посочени са подходящи условия, свързани с параметрите на модела, при които количеството на информацията зависи непрекъснато от началната точка и критичния минимум на информацията;
4. Въведена е методика за приближено намиране на коефициента на съхранение на информацията в паметта. Методът е реализиран в конкретен вариант.

ДЕКЛАРАЦИЯ

относно авторските права на представените в дисертацията резултати

1. Резултатите и сведенията от увода са получени предварително от други изследователи. Представеният в увода материал се базира на различни литературни източници, по-голямата част от които са надлежно посочени.
2. Резултатите от глава 1 са публикувани в статията:
Dishliev A., Dishlieva K., Abou Habib M., Mathematical model of dynamics of the amount of information in human memory, American J. of Education, Vol. 123, Issue 4 (1.2), (2017), 1073-1081.
3. Резултатите от глава 2 са публикувани в статията:
Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical model of the amount of information in the human memory for short time discrete trainings, Science and Educational Studies, Vol. VIII, Issue 1 (29), (2018), 229-244.
4. Резултатите от глава 3 са публикувани в статията:
Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical training model maintaining minimum amount of information in the memory, London review of education and science, Vol. 22, Issue 2, (2017), 323-340.
5. По-голямата част от резултатите от глава 5 са публикувани в статията:
Dishliev A. A. (junior), Girginov Ch., Dishlieva K., Comparison of quantities of information in the human memory, J. of Advances in Mathematics, (2018), Vol. 14, № 2, 8004-8012.
6. Резултатите от глава 5 са публикувани в статиите:
Dishliev A. A. (junior), Girginov Ch., Dishlieva K., Determining the coefficients of storing information in the human memory, International Journal of Sciences: Basic and Applied Research, (2018), Vol. 42, No 2, 113-120.
Abou Habib M., Dishliev A. A. (junior), Numerical method for determining the coefficient of storing information, Science, Engineering & Education (2019), (to appear).

СПИСЪК

на публикации с автор Мариана Георгиева Факелова - Абу Хабиб,
на които се основава дисертационния труд

1	IF 0,925	<i>Dishliev A., Dishlieva K., Abou Habib M., Mathematical model of dynamics of the amount of information in human memory, American J. of Education, (2017), Vol. 123, № 4 (1.2), 1073-1081.</i>
2	IF 5,405	<i>Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical model of the amount of information in the human memory for short time discrete trainings, Science and Educational Studies, (2018), Vol. VIII, № 1 (29), 229-244.</i>
3	IF 5,253	<i>Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical training model maintaining minimum amount of information in the memory, London review of education and science, (2017), Vol. 22, № 2, 323-340.</i>
4		<i>Abou Habib M., Dishliev A. A. (junior), Numerical method for determining the coefficient of storing information, Science, Engineering & Education (2019), (to appear).</i>

БЛАГОДАРНОСТИ:

1. Изказвам благодарност на моето семейство за проявената морална подкрепа при изготвянето на дисертационния труд;
2. Изказвам благодарности на моите научни ръководители проф. дмн Ангел Дишлиев и доц. д-р Катя Дишлиева за постановката на дисертационната тема и за проявената помощ и загриженост при реализиране на изследванията;
3. Благодаря на д-р Андрей Антонов за оказаното съдействие при изготвянето на чертежите, свързани с настоящата дисертация, както и за внимателното прочитане на целия ръкопис на дисертацията и отстраняването на редица неточности.

Мариана Факелова - Абу Хабиб