

РЕЦЕНЗИЯ

Относно: Дисертация за придобиване на научна степен „доктор на науките“ по научна специалност 5.10. Химични технологии (Процеси и апарати в химическата и биологичната технология) на тема:

„Нелинейни и аномални приложни дифузионни модели: приближени решения, анализ, синтез и примери“,

представена от проф. д-р инж. Йордан Янков Христов.

Рецензент: проф. д-тн инж. Венцислав Димов Зимпаров – ТУ- Габрово

Настоящата рецензия ми е възложена с решение на научното жури на първото заседание на 02.04.2018 г. Предоставената ми дисертация представлява самостоятелен том със заглавие: „Нелинейни и аномални приложни дифузионни модели: приближени решения, анализ, синтез и примери“, с автор проф. д-р инж. Йордан Янков Христов, въвеждаща част, подготвяща читателя за навлизане в разглежданите проблеми, автореферат, копия на публикации, списък на цитирания и съпътстващи документи.

Още от самото начало бих искал да заявя, че не съм имал и нямам общи публикации с проф. Йордан Христов.

1. Кратки биографични данни и характеристика на научните интереси на кандидата

Йордан Янков Христов е роден на 07.09. 1954 в гр. Дупница През 1979 г. той завършва висше образование (магистър) в Технически Университет - София със специалност Електроинженер. През 1994 г. защитава дисертация на тема “Флуидизация с газ на феромагнитни насипни материали във външно магнитно поле” в ХТМУ и получава научната степен Кандидат на техническите науки (сега доктор) по специалността Химични технологии. От 1979 г. досега последователно е заемал следните позиции в катедра Инженерна химия на ХТМУ: **Инженер** (1979-1981), **Научен сътрудник** : (1981-1989), **Асистент** (1989-1992), **Главен асистент** (1992-1998), **Доцент** (1998-2014) и **Професор** (от 2014 – до сега).

Проф. Христов има над **172** научни публикации с над **1200** цитирания. **Информацията от основни бази за индексирание на научна информация за проф. Христов към Февруари , 2018 е:**

- **SCOPUS: h-index = 21**, базиран на **76** регистрирани документа (1990- 2018)
- **ISI Thomson Reuters: h-index = 16**, базиран на **73** регистрирани документа (1990- 2018)

Проф. Христов е Главен редактор на две международни научни списания **International Review of Chemical Engineering - Rapid Communications** (от 2009 до сега), **Praise Worthy Prize** <http://www.praiseworthyprize.com/ireche.htm> и на **International Journal on Advanced Materials And Technologies** (от 2012-досега), **Praise Worthy Prize** <http://www.praiseworthyprize.com/ireamt.htm>. Член е на редколегиите на 8 международни научни списания **Bio-Magnetic Research and Technology** (2002-2008), **Thermal Science** – (от 2003 - до сега) <http://thermalscience.vinca.rs/>, **Particuology** – 2004-2011 и от 2012 - present (second term) **ISI indexed journal** <http://www.journals.elsevier.com/particuology/editorial-board/>

Hacettepe Journal of biology and Chemistry (om 2007 – до сега) **ISI indexed journal** <http://www.hjbc.hacettepe.edu.tr/page/editorial-board>, **Communications to Fractional Calculus** (2012-2014) (Asian Academic Publisher Ltd., Hong Kong, China) (ISSN 2218-3892) <http://www.nonlinearscience.com/journal/2218-3892.php>, **British Journal of Engineering and Technology** (<http://www.bjet.baar.org.uk/Editorial-Board.html>), от 2012 до сега, **Progress in Fractional Differentiation and applications**

<http://www.naturalspublishing.com/show.asp?JorID=48&pgid=219> (от 2016 до сега), *Fractal and Fractional* (от 2017 до сега) <http://www.mdpi.com/journal/fractalfract/editors>. Бил е гост-редактор в 14 научни международни списания, а рецензент в 21

2. Преглед на дисертационния труд и анализ на резултатите

Съдържанието на дисертацията е изложено на 726 стр., от които въвеждаща част от 66 стр. и основен текст, в това число таблици, графики и списък на литература, общо 660 стр. От приложен отделен списък е видно, че части от дисертацията са станали достояние на научната общност у нас и чужбина чрез:

- 6 глави от книги, чийто пълен текст е отпечатан и публикуван в *Fractional Dynamics*, глава 5 (2015), *Frontiers in Fractional Calculus*, глави 3 и 10 (2017), и такива, на които предстои публикуване през 2018 г. в *Mathematical Methods in Engineering - Applications in Dynamics of Complex Systems*, *Mathematical Methods in Engineering – Theory*, както и една глава под печат в *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*;
- **20 авторски научни публикации**, от които **16 в списания с импакт фактор**, публикувани в: *Thermal Science* – 9 бр., *Heat Mass Transfer* – 2 бр., *J. Vibration and Control* – 1 бр., *Fundamenta Informaticae* – 1 бр., *Fluid Dynamics & Materials Processing* – 1 бр., *Math. Modelling of Natural Phenomena* – 1 бр. и 4 в международни реферирани списания: *Progr. Fract. Differ. Appl.* – 2 бр., *Mathematics in Natural Science* – 1 бр. и *Journal of Computational Complexity and Applications* – 1 бр.

Съдържанието на всички публикации е пряко свързано с темата на дисертацията. Прави впечатление, че от 16 публикации с импакт фактор, 14 (87.5%) са самостоятелни и само 2 (12.5%) са колективни, в които той е втори автор. Всички статии в международни реферирани списания са самостоятелни.

Импакт факторът на списанията, в които са отпечатани научните публикации е както следва: *Thermal Science*: 2015 - 0.939; 2016 – 1.093; *Heat Mass Transfer*: 2016 - 1.233; *J. Vibration and Control*: 2016 – 2.101; *Fundamenta Informaticae*: 2016 – 0.687; *Fluid Dynamics & Materials Processing*: 2016 – 0.31; *Math. Modelling of Natural Phenomena*: 2016 – 0.952. Общият импакт фактор от всички публикации е над 15.0.

- **Представената дисертация е лично дело на нейния автор проф. Йордан Христов;**
- **Основните моменти от дисертацията посредством направените апробации и приложените публикации и по-специално тези от тях, които са цитирани, са станали достояние и оценени от широка научна общественост у нас и в чужбина.**

В този смисъл, представената дисертация отговаря напълно на определението за докторска дисертация като „самостоятелен авторски научен труд, чийто основни части са вече публикувани“.

Дисертацията разглежда добре дефинирани класове от дифузионни модели широко използвани в инженерната практика. Едномерните модели на нелинейна или аномална дифузия са свързани преди всичко с проблеми на нестационарна топлопроводност с използване на локални (от цял порядък) производни, а също така и на субдифузионни и супердифузионни проблеми, използващи нелокални по време и пространство производни със сингулярна памет.

Специално внимание е обърнато на дифузионни модели, моделирани с наскоро предложения интегрален оператор на Caputo-Fabrizio, използващ експоненциална несингулярна памет. Накрая са разгледани конкретни примери, където разработените технологии на решения се прилагат директно.

Основна цел на проведените изследвания е развитието на приближени аналитични решения в затворена форма, с директна приложимост в инженерната практика, позволяващи да се установят явни зависимости между основните параметри, контролиращи моделираните дифузионни процеси.

Текстът на дисертацията е структуриран в четири основни части, Част 1 - Част 4 и допълнително две части, Част А (предварителна информация) и Част В (основни резултати и приноси). Две неща правят впечатление по структурирането на дисертацията:

(i) включването на Част А, съдържаща предварителна информация за модели на нелинейна и аномална дифузия със и без инерция, дробно диференциално смятане и принцип на наследствеността (модели с изчезваща памет). Намирам за много удачно и полезно написването и включването в дисертацията на Част А, тъй като читателят трябва да бъде запознат с тези въпроси, за да бъде в състояние на разбере информацията, изложена в главите на Части 1-4.

(ii) разработването на главите на Части 1-4, като самостоятелни глави на книги, съдържащи въведение, основно тяло, изводи и литература, които могат да бъдат публикувани самостоятелно. Това прави предложения труд като типична дисертация от монографичен тип.

Целите на дисертацията са формулирани в две основни направления:

А. Приближени интегрални решения на нелинейни и аномални дифузионни модели;

В. Синтез на модели с нелокални производни, директно свързвани с практически важни инженерни проблеми.

В направление **А** са формулирани две основни подобласти на изследвания:

А.1. Получаване на приближени интегрални решения на нелинейни дифузионни модели, преди всичко случаи на нелинейна топлопроводност, с коефициенти на дифузия, зависещи от температурата (концентрацията);

А.2. Получаване на приближени интегрални решения на дифузионни модели с дробни по време и пространство производни със сингулярни ядра. Получаването на тези приближени решения изискват подобряване на техниките на интегралния метод, поради което са формулирани още две основни задачи, а именно:

А.3. Подобряване на техниките на интегриране така, че да работят както с локални, така и с нелокални по време производни, отчитайки особеностите на класическия метод на Гудман, където се използва правилото на Лайбниц за диференциране под знака на интеграла, неприложимо при нелокални производни.

А.4. Прилагане на интегралния метод към дифузионни уравнения с локални и нелокални по време производни, когато дифузионният член на уравнението е от висок ред. Резултатите от тези изследвания са демонстрирани чрез решения на известни нелинейни дифузионни модели, като конкретни задачи, с техния анализ и сравнение с известни от литературата. Те са организирани основно в Част 1 и Част 2, а примерите са представени в Част 4.

Изследванията от направление **А** разглеждат приближени аналитични решения и техния анализ и оформят първото основно направление в дисертацията.

В направление **В** (синтез на модели с нелокални производни) са разгледани въпроси, директно свързвани с практически важни инженерни проблеми. В това направление са формулирани две подобласти:

В.1. Нов извод на известното уравнение на Ward-Tordai и формулиране на универсално дробно-диференциално уравнение за повърхностна адсорбция на сърфактанти под дифузионен контрол. Това изследване е представено в Глава 2.8.

В.2. Анализи и синтез на модели с несингулярна памет. Нова област, възникнала през 2015 година, последвана от голям поток публикации с нови резултати и противоречия. Целите на изследванията в **В.2.** могат да се формулират като:

В.2.1. Анализ на съществуващите конструкции на интегрални оператори с несингулярна памет и физическата основа за тяхното използване;

В.2.2. Извод на модели на нестационарна дифузия на базата на конститутивни уравнения, използващи постановката на Cattaneo, при които дробни по време и пространство интегрални оператори се формулират по естествен път. Тези изследвания са предизвикани и мотивирани от големия брой публикации, използващи подхода на формална фракционализация и водещи до физически неадекватни резултати.

В.2.3. Критично изследване на дифузионни модели, конструирани чрез прилагане на подхода на формална фракционализация.

В.2.4. Реални примери на дифузионни процеси с релаксация, които водят до формулиране на интегрални оператори с експоненциални несингулярни ядра.

Основните резултати, получени в дисертацията, могат да се систематизират както следва:

Част 1:

Глава 1.1. За първи път се предлага решение на дегенериращо дифузионно уравнение на нестационарна топлопроводност със степенен закон на изменение на коефициента на топлинна дифузия, чрез метода с просто интегриране. Чрез метода с просто интегриране се използва смяна на променливите и трансформация на изходния модел в уравнение на топлинна вълна.

Глава 1.2. За първи път се предлага решение на дегенериращо дифузионно уравнение на нестационарна топлопроводност, със степенен закон на изменение на коефициента на топлинна дифузия, чрез директно прилагане на интегрален метод. Постигнато е чрез трансформацията на нелинейния дифузионен член на моделното уравнение, което прави възможно използването на метода с двойно интегриране в неговата класическа форма.

Глава 1.3. Използван е интегралният метод за решаване на задача на нестационарна топлопроводност с линейно-зависещ от температурата коефициент на топлинна дифузия. Приложена е същата технология за трансформиране на дифузионния член, както в **Глава 1.2.**, като разликата е, че тук е използвана нова модификация на метода с двойно интегриране, която позволява прилагането на интегралния метод независимо от порядъка на дробната по време производна (локална или нелокална).

Дискутиран е проблемът с предварителното мащабиране на дифузионния коефициент и за този случай е получено интегрално решение чрез смяна на променливите. Получените аналитични решения са сравнени с числени такива и са тествани с параметри на реални материали.

Глава 1.4. е продължение на глава 1.3, при което функционалната зависимост на дифузионния коефициент (топлинна дифузия) от температурата е потенциално-степенна.

В **Глава 1.5** се представя алтернативен подход за решение на нестационарна топлопроводност чрез използване на второ уравнение от дробен порядък $1/2$. Този подход позволява да се избегне основният недостатък на метода с просто интегриране, а именно градиента на границата да се изчислява чрез апроксимиращия профил.

В **Глава 1.6** е демонстриран нов подход, чрез нова техника на интегралния метод, наречена метод с многократно интегриране. Същият е приложен за дифузионни уравнения от висок ред (висок порядък на производната на дифузионния член). Методът е демонстриран с решение на модела на Mullins за термично набраздяване на повърхности чрез механизъм на повърхностна дифузия.

Глава 1.7 представя интегрално решение на нелинейното уравнение на Mullins за термично набраздяване на повърхности чрез механизъм на изпарение-кондензация. Показана е

възможност за прилагане на метода с двойно интегриране, след предварителна трансформация на Broadbridge.

Част 2:

Глава 2.1. Представа демонстрация на метода на интегралния баланс, приложен към модели, съдържащи интеграли със сингулярна памет.

Глава 2.2. Показва се как методът на интегралния баланс, използващ техниката на двойно интегриране, е напълно приложим при решаване на линейното субдифузионно уравнение, както с производна на Riemann-Liouville така и с производна на Caputo. Показани и дискутирани са няколко подхода за определяне на оптималните експоненти на приближените решения. Приближените решения са сравнени с точните решения на Mainardi.

Глава 2.3. Развива се идеята, представена в Глава 2.2 и се показва приближено аналитично решение на нелинейно дегенериращо субдифузионно уравнение. Показано е ясно влиянието на параметъра на дробния порядък и степенния коефициент на дифузионния коефициент, а като следствие-конкурентното въздействие на субдифузията и дегенериращото дифузионно поведение върху развитието на приближените решения.

В **Глава 2.4.** се представя приближено интегрално решение на дробно по време дифузионно уравнение, от порядък $0 < \mu < 1$ с коефициент, зависещ от времето по степенен закон $D(t) = D_0 t^\beta$, където $0 < \beta < 1$. Формата на полученото решение, разпространяващо се в полу-безкрайна среда и оценено чрез анализ на втория момент, позволява да се заключи, че в зависимост от стойността на сумата $(\mu + \beta)$ уравнението моделира субдифузионен пренос ($\mu + \beta < 1$), супердифузионен пренос ($\mu + \beta > 1$) или Гаусова (нормална) дифузия за $(\mu + \beta = 1)$. Резултатът потвърждава основния резултат на Fa and Lenzi, че при субдифузионен пренос времето за първо преминаване е безкрайно.

В **Глава 2.5.** са показани приближени аналитични решения на нестационарно дифузионно уравнение с дробна по време пространствена производна на Riemann-Liouville и полубезкрайна област, в случая на задача на Дирихле. Използван е интегрален метод с две основни техники на интегриране *метод с просто (еднократно) интегриране (NBIM)* и *метод с двойно интегриране (DIM)*, и концепцията за крайна дълбочина на проникване на дифузанта.

В **Глава 2.6.** се представя приближено аналитично решение за задача с начално условие и дробна по пространство производна на Riemann-Liouville. Пространствената корелация на дифузионния коефициент е представена със степенна функция и се дискутира нейното отношение към възможните режими на бърза и бавна пространствена супердифузия. Основният извод от решенията е, че временното развитие на фронта на решението е по закона $t^{1/(\beta-\alpha)}$ и дълбочината на проникване на дифузанта контролирана от разликата $(\beta - \alpha)$, средноквадратичното преместване $\langle x^2 \rangle \equiv \delta^2 \equiv t^{2/(\beta-\alpha)}$. Този факт и анализът на поведението на приближените решения позволяват да се оцени ефекта на разликата $(\beta - \alpha)$ върху реда на подреждане на разпределенията (приближени решения) и моделираните транспортни режими.

Глава 2.7. Тази глава разглежда приближено аналитично решение на задача с начални условия в случай на пространствено-добен диференциален дифузен модел чрез синергетична комбинация на интегрален метод и метод на най-малките квадрати. Полученото решение ясно демонстрира, че реципрочната стойност на разликата между дробния порядък β и пространствената експонента на дифузионния коефициент α , контролира дифузионния процес и определя преходите от субдифузионен към супердифузионен механизъм на пренос. Оптималната експонента на приближения профил е практически независима от пространствената

експонента на дифузионния коефициент α , но намалява с нарастване на дробния порядък β , като демонстрира почти линейна зависимост. Потенциално степенната функционална зависимост на дифузионния коефициент от пространствената координата, предложен в тази работа, позволява да се дефинира дробно число на Фурие. Това позволява да се види ефекта на дробното число на Фурие и развитието на решението за малки, умерени и големи времена.

Глава 2.8. Показан е напълно нов извод да уравнението на Ward-Tordai за адсорбция на сърфактанти, изцяло с апарата на дробното диференциално смятане. Основният резултат е формулирането на унифицирано нелинейно дробно диференциално уравнение от порядък $1/2$, моделиращо адсорбция на сърфактанти в режим на дифузионен контрол.

Част 3:

Глава 3.2. Това е първият извод на уравнение за нестационарна дифузия чрез ядро на Jeffrey, показващо естествено възникване на демпфиращ член с интегрален оператор, съвпадащ с формулировката Caputo-Fabrizio.

Глава 3.3. Формулирани са: *модел с пространствена памет* и *пространствен интегрален оператор* (понякога наричан механично *производна*) с експоненциално ядро, от тип Caputo и са представени аналитични решения за случай на стационарна дифузия. Дефинирана е връзка между геометричния размер на участъка с пространствена памет и дробния параметър на интегралния оператор.

Глава 3.4. Направен е извод на дробно-диференциален модел на Додсън чрез конститутивен подход, свързващ потока и градиента посредством интеграл с експоненциална памет, в постановка на Cattaneo. Формулиран е дифузионен модел със сложна памет, включваща едновременно релаксационни ефекти за големи и малки времена. Дефинирана е функционалната връзка между дробния параметър и дифузионното число на Deborah.

Глава 3.5. Анализиран е проблемаът с формалната фракционализация на дифузионното уравнение и възникващите противоречия, когато производната по време в класическия модел на Фурие (Фик) се замени формално с оператора (по време) на Caputo-Fabrizio, приеман условно за дробна производна.

Глава 3.6. Направен анализ на основния проблем: какъв тип памет се моделира чрез експоненциалното ядро, използвано в оператора на Caputo-Fabrizio? Използван е обобщеният модел на разтеглената експоненциална функция на Kohlrausch.

Глава 3.7. Представени са модели на реални проблеми, където експоненциалната релаксационна функция е получена експериментално или в резултат на развитие на модел. Това дава основание за по-нататъшно развитие на този тип модели чрез нови формулировки на интегралния оператор на Caputo-Fabrizio.

Част 4:

Глава 4.1. Получени са приближени интегрални решения на нелинейното дифузионно уравнение на Додсън, както от цял порядък, така и на формално фракционализирани версии. Показано е, че е възможно решение чрез автомоделна променлива след начална нелинейна трансформация.

Това са първите получени до сега решения, при които временната еволюция на фронта на дифузия може да се изрази в явен вид. Използването на оператора на Caputo-Fabrizio позволява да се получи формално фракционализиран модел и прилагайки метода на интегралния баланс директно да се генерира не-Болцманова автомоделна променлива, която включва дифузионния коефициент и скоростната константа (реципрочна на дефинираното релаксационно време τ).

Тъй като уравнението на Додсън е оригинално конституирано да предсказва крайната дълбочина на проникване на дифузионния слой, с използване на производната на Caputo-

Fabrizio, резултатите са в явен вид и физически адекватни. Още повече, това решение позволява директно да се свърже дробният порядък на фракционализираното уравнение с физически дефинираната скоростна константа (реципрочна на релаксационното време).

Глава 4.2. Решена е първата задача на Стокс, за модели от цял и дробен порядък, за флуид на Casson с използване на различни видове дробни (по време) производни. Направен е критичен анализ на използваните до този момент модели и са проведени експериментни чрез формална фракционализация и дефиниране на конститутивни уравнения. Приближените решения са получени чрез интегрален метод и параболичен апроксимиращ профил с недефинирана експонента. Дискутиран е проблемът с коректната фракционализация на моделните уравнения. Получени са приближени решения за случаите на модели от цял порядък и дробно-диференциални аналози, и е анализирана физическата адекватност на резултатите.

Глава 4.3. представя решение на първата задача на Стокс чрез метод на двойно интегриране, когато релаксацията се моделира със смесена производна по време-пространство. Разгледани са два основни случая: модел от цял порядък и дробно-диференциален модел. За модел, върху който е показана ефективността на DIM, е уравнението на ненютонов флуид от втори клас (ред).

Този подход позволява за се получи физически ясно решение, с добре дефинирани автомоделни променливи, отчитащи както Нютоновите така и Ненютоновите ефекти на нестационарното решение. По-точно, решението показва, че течението се контролира от две безизмерни променливи: Болцманова автомоделна променлива, отразяваща вискозното поведение на флуида и число на Deborah, свързано с еластичните ефекти. Показано е, че числото на Deborah е независима променлива, контролираща течението, тъй като при първата задача на Стокс отсъства мащаб за дължина, позволяващ да се дефинира характеристично време на процеса.

Глава 4.4. Получени са явни приближени решения, в затворена форма, на радиационното дифузионно уравнение чрез прилагане на метод на интегралния баланс с двойно интегриране. Решени са проблеми, свързани със скок в повърхностната температура и променящи се във времето гранични условия. Експонентата на апроксимиращия профил и грешката на апроксимация се определят директно чрез минимизация на остатъчната функция на моделното уравнение.

Глава 4.5. Разглежда дробно-диференциален модел от 4-ти порядък на повърхностна дифузия (субдифузия) като вариант на уравнението на Mullins. Получено е приближено интегрално решение чрез метода с многократно интегриране (MIM), който е предложен от автора. Методът позволява да се реши приближено субдифузионното уравнение с висок порядък на дифузионния член и дава възможност да се види физическата адекватност на получените резултати: чрез оценка на решенията относно ширината и дълбочината на браздата и влиянието на дробния параметър върху развитието на процеса на повърхностна дифузия.

Глава 4.6. Представено е ново интегрално решение на задача, свързана с кинетиката на дифузионно контролирана адсорбция (дифузионен контрол в макропорите на адсорбента) и моделирана чрез квадратична нелинейност на Fujita, която води до правоъгълни изотерми на Лангмюр.

Новото приближено решение използва концепцията за крайна дълбочина на проникване на дифузанта и практически правоъгълна форма на концентрационния профил. Решението използва апроксимиращ параболичен профил с недефинирана експонента. Анализът на решението позволява да се определи оптималната експонента на апроксимиращия профил като функция на нелинейния параметър на концентрационната зависимост на Fujita.

Получени са ефективни приближени решения на модела, формулиран от Ruthven. Получените резултати са сравнени с известните аналитични решения от литературата и експериментални резултати на Ruthven.

Имах възможност да се запозная с част от съдържанието на дисертацията в нейни предишни редакции, както и да изкажа становище по отделни аспекти и текстове. Също така бях и вътрешен рецензент при предварителната защита. Моите бележки бяха коментирани и приети от автора и затова няма да се връщам на тях. Критични забележки по същество към съдържанието на рецензираната дисертация нямам.

След направения анализ на съдържанието на рецензираната дисертация бих могъл да обобщя и класифицирам по следния начин постиженията на дисертанта:

3. Оценка на съответствието на автореферата и дисертационния труд

Представеният автореферат правилно и ясно отразява основните резултати приноси на дисертацията

4. Характеристика и оценка на приносите в дисертационния труд

Оценката на приносите на дисертацията ще бъде направена в реда на представяне на резултати по части и глави, както следва:

4.1. Приноси на резултатите представени в от Част 1

1. Получени са интегрални решения на нестационарна топлопроводност със степенен закон на изменение на коефициента на топлинна дифузия (**Глава 1.1** и **Глава 1.2**)

2. Получени са интегрални решения на нестационарна топлопроводност с линейна (**Глава 1.3**) и потенциално-степенна (**Глава 1.4**) зависимост на топлинния дифузионен коефициент от температурата. Авторът е използвал предложен от него метод с двойно интегриране (Double Integration Method, **DIM**), позволяващ се работи както с локални така и с нелокални производни по време.

3. Предложен е **метод с многократно интегриране (MIM)**, който е иновативен и приложим към дифузионни уравнения от висок ред (висок порядък на производната на дифузионни член) (**Глава 1.6**). Ясно е показано, че методът с просто интегриране и методът с двойно интегриране (**DIM**) са частни случаи на **MIM**.

4. С успешно прилагане на метода с двойно интегриране (**DIM**) е получено интегрално решение на нелинейното уравнение на Mullins за термично набраздяване на повърхности чрез механизъм на изпарение-кондензация (**Глава 1.7**).

4.2. Приноси на резултатите представени в от Част 2

1. Успешно е приложен интегрален метод за приближени решения на субдифузионни уравнения с постоянен (**Глава 2.2**), степенен (**Глава 2.3**) и зависещ от времето (**Глава 2.4**) дифузионен коефициент.

2. Интегралният метод е развит в посока на приближени решения на супердифузионни уравнения с постоянен (**Глава 2.5**), степенен (**Глава 2.6**) и потенциално степенен (**Глава 2.7**) дифузионен коефициент.

3. Направен е нов извод на Ward-Tordai е формулирано унифицирано нелинейно дробно диференциално уравнение от порядък $1/2$, моделиращо адсорбция на сърфактанти в режим на дифузионен контрол (**Глава 2.8**).

4.3. Приноси на резултатите представени в от Част 3

1. Получени (изведени) са едномерни дифузионни модели с временна (**Глава 3.2**) и пространствена (**Глава 3.3**) експоненциална памет при използване на конститутивен подход на Cattaneo по време и пространство .

2. Ясно е показано как интегралният оператор на Caputo-Fabrizio възниква като демпфиращ член в дифузионно уравнение (**Глава 3.2** и **Глава 3.3**). Статията стояща в основата на тази е с най-много цитати (48).

3. Направена е постановка за топлопроводност с пространствена експоненциална памет и са получени аналитични решения за стационарен процес (**Глава 3.3**).

4. Показан е успешно проведен **и иновативен извод** на дробно-диференциален модел на Додсън, чрез конститутивен подход свързващ потока и градиента, чрез интеграл с експоненциална памет (**Глава 3.4**). Показано е, че този обобщен модел се редуцира до известното уравнение на Додсън при големи времена на релаксация. Формулиран е модел с две паметни за малки и големи времена, съответно, при едновременно действие на различни релаксационни процеси.

5. Ясно са показани функционалните връзки между дробния параметър на интегралния оператор Caputo-Fabrizio с геометричната характеристика за зоната с пространствена памет (**Глава 3.3**) и с дифузионното число на Deborah (**Глава 3.4**)

4.4. Приноси на резултатите представени в от Част 4

Получени са приближени интегрални решения на практически важни задачи свързани с технологични процеси, а именно :

1. Уравнение на Додсън за дифузия в твърди материали (**Глава 4.1**), нестационарно течение на неньютонов флуид (**Глава 4.3**), радиационно дифузионно уравнение (**Глава 4.4**), субдифузионно уравнение на повърхностна дифузия свързано с процеса на термично набраздяване (**Глава 4.5**).

2. Получено е ново решение свързано с кинетиката на дифузионно контролирана (в макропорите) адсорбция, съгласно модела на Ruthven с квадратична нелинейност на Fujita (**Глава 4.6**).

3. Дискутиран е проблемът с формалната фракционализация на моделните уравнения и физическата адекватност на този подход чрез първа задача на Стокс за флуид на Casson (**Глава 4.2**).

В **Част В**, която е организирана на края на дисертацията, се разглеждат в кондензиран вид основните резултати от изследванията и свързаните с тях научни приноси. **В Част В е представен обобщен анализ на получените резултати в четири основни направления, а именно:**

- **Приложения на интегралния метод към нелинейни и аномални дифузионни модели с локални и нелокални производни и развитие на негови модификации.**
- **Извод (синтез) на дифузионни модели на физични процеси с памет.**
- **Анализ на дифузионни модели с нелокална (сингулярна и несингулярна памет)**
- **Получаване на приближени решения на практически важни задачи.**

В заключение, на базата на горният анализ и на отражението на резултатите в научната литература (където те са цитирани), приемам всички научни и научно-приложни приноси на дисертацията като.

5. Мнение за публикациите на дисертанта по темата на дисертационния труд

5.1. Новост за науката:

5.1.1. Нови методи, хипотези и др.

Разширяване на областта на приложение на интегралния метод към получаване на приближени решения в затворена форма, на:

1. **Нелинейни дифузионни уравнения с локални производни. Резултатите са публикувани в:**

- Hristov J., An Approximate Analytical (Integral-Balance) Solution to A Nonlinear Heat Diffusion Equation, *Thermal Science*, 19(2) (2015), pp. 723-733.
- Hristov J., Integral solutions to transient nonlinear heat (mass) diffusion with a power-law diffusivity: a semi-infinite medium with fixed boundary conditions, *Heat Mass Transfer*, 52 (3) (2016), pp.635-655.
- Hristov J., An Alternative Integral-Balance Solution to Transient Diffusion of Heat (Mass) by time-Fractional Semiderivatives and Semiintegrals: Fixed boundary conditions, *Thermal Science*, 20 (2016),6, pp. 1867-1878.
- Antoine Fabre, Jordan Hristov, On the integral-balance approach to the transient heat conduction with linearly temperature-dependent thermal diffusivity, *Heat Mass Transfer*, January 2017, Vol. 53, No. 1, pp 177–204.
- Fabre,A. Hristov, J., Bennacer, R.,Transient heat conduction in materials with linear power-law temperature-dependent thermal conductivity: Integral-Balance Approach, *Fluid Dynamics & Materials Processing*, Vol.12, No.1, pp.69-85, 2016.
- Hristov J., The Heat Radiation Diffusion Equation: Approximate explicit analytical solutions by improved integral-balance method, *Thermal Science*, 22 (2018) in press, DOI: 10.2298/TSCI171011308H.
- Hristov J., On the integral-balance solvability of the nonlinear Mullins model, *Applied Mathematics and Computing*, ICMC 2018, Varanasi, India, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, in press.

2. Нелинейни дифузионни уравнения с нелокални производни (със сингулярни ядра) в случай на бавна (степенна зависимост на дифузионния коефициент). Резултатите са публикувани в:

- Hristov J., Approximate solutions to time-fractional models by integral balance approach, Chapter 5, In: *Fractional Dynamics* , C. Cattani, H.M. Srivastava, Xia-Jun Yang, (eds), De Gruyter Open, 2015, pp.78-109.
- Hristov J., Integral-balance solution to nonlinear subdiffusion equation, Chapter 3, in *Frontiers in Fractional Calculus*, 2017 , S. Bhalekar, Ed., Bentham Science Publishers, 2017, pp.71-106.
- Hristov J., Integral-balance approach to 1-D space-fractional model, in: *Mathematical Methods in Engineering - Applications in Dynamics of Complex Systems*, eds. Kenan Taş, Dumitru Baleanu and J.A.T. Machado (will be published by Springer in 2018).
- Hristov J., A transient flow of a non-Newtonian fluid modelled by a mixed time-space derivative: An improved integral-balance approach, in: *Mathematical Methods in Engineering - Theory*, eds. Kenan Taş, Dumitru Baleanu and J.A.T. Machado (will be published by Springer in 2018).
- Hristov J., Diffusion Models with Weakly Singular Kernels in the Fading Memories: How the Integral-Balance Method can be Applied?, *Thermal Science*, 19(3) (2015), pp. 947-957.
- Hristov J., Double Integral-Balance Method to the Fractional Subdiffusion Equation: Approximate solutions, optimization problems to be resolved and numerical simulations, *J. Vibration and Control* (SAGE), 23(2017),7,pp. 2795-2818.
- Hristov J., An approximate solution to the transient space-fractional diffusion equation: Integral-balance approach, optimization problems and analyzes, *Thermal Science*, 21 (2017), 1A, pp. 309-321.
- Hristov J., Transient space-fractional diffusion with a power-law superdiffusivity: Approximate integral-balance approach, *Fundamenta Informaticae (IOS Press)* , 151 (2017) 1-4, pp. 371–388.
- Hristov J., Subdiffusion model with time-dependent diffusion coefficient: Integral-balance solution and analysis, *Thermal Science*, 21 (2017) 1A, pp.69-80.
- Hristov J., Space-fractional diffusion with a potential power-law coefficient: Transient approximate solution, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 3, No. 1, 19-39 (2017).
- Hristov J., The non-linear Dodson diffusion equation: Approximate solutions and beyond with formalistic fractionalization, *Mathematics in Natural Sciences*, 1(1) (2017), pp.1-17.

3. Нелинейни дифузионни уравнения с нелокални производни (със сингулярни ядра) в случай на бърза дифузия (с нелинейности на Fujita). Резултатите са публикувани в:

- Hristov J., A new closed-form approximate solution to diffusion with quadratic Fujita's non-linearity: The case of diffusion controlled sorption kinetics relevant to rectangular adsorption isotherms, *Heat Mass Transfer*, Submitted, July, 2017 (under review).

4. Създадена е модификация на метода с двойно интегриране (DIM), позволяваща използване на метода при решения на модели с локални и нелокални производни по време. Резултатите са публикувани в:

- Hristov J., Approximate solutions to time-fractional models by integral balance approach, Chapter 5, In: *Fractional Dynamics*, C. Cattani, H.M. Srivastava, Xia-Jun Yang, (eds), De Gruyter Open, 2015, pp.78-109.
- Hristov J., Integral-balance solution to nonlinear subdiffusion equation, Chapter 3, in *Frontiers in Fractional Calculus*, 2017, S. Bhalekar, Ed., Bentham Science Publishers, 2017, pp.71-106.
- Hristov J., Diffusion Models with Weakly Singular Kernels in the Fading Memories: How the Integral-Balance Method can be Applied?, *Thermal Science*, 19(3) (2015), pp. 947-957. ;
- Hristov J., Double Integral-Balance Method to the Fractional Subdiffusion Equation: Approximate solutions, optimization problems to be resolved and numerical simulations, *J. Vibration and Control* (SAGE), 23(2017),7,pp. 2795-2818.
- Hristov J., Integral solutions to transient nonlinear heat (mass) diffusion with a power-law diffusivity: a semi-infinite medium with fixed boundary conditions, *Heat Mass Transfer*, 52 (3) (2016) , pp.635-655.
- Hristov J., An Alternative Integral-Balance Solution to Transient Diffusion of Heat (Mass) by time-Fractional Semiderivatives and Semiintegrals: Fixed boundary conditions, *Thermal Science*, 20 (2016) 6, pp. 1867-1878.
- Antoine Fabre, Jordan Hristov, On the integral-balance approach to the transient heat conduction with linearly temperature-dependent thermal diffusivity, *Heat Mass Transfer*, January 2017, Vol. 53, No. 1, pp 177–204.
- Fabre, A. Hristov, J., Bennacer, R., Transient heat conduction in materials with linear power-law temperature-dependent thermal conductivity: Integral-Balance Approach, *Fluid Dynamics & Materials Processing*, Vol.12, No.1, pp.69-85, 2016.
- Hristov J., The heat radiation diffusion equation: Approximate explicit analytical solutions by improved integral-balance method, *Thermal Science*, 22 (2018) in press, DOI: 10.2298/TSCI171011308H.

5. Предложен е метод с многократно интегриране (MIM), позволяващ прилагането му към дифузионни уравнения от висок ред. Класическият метод на Гудман и DIM са частни случаи на MIM. Резултатите са публикувани в:

- Hristov J., Multiple integral-balance method: Basic idea and an example with Mullins model of thermal grooving, *Thermal Science*, 21 (2017), pp.1555-1560.
- Hristov J., Fourth-order fractional diffusion model of thermal grooving: Integral approach to approximate closed form solution of the Mullins model, *Math. Model. Nature Phenomena*, 12 (2017),6, pp.xxx-xxx.

6. Направен е нов извод на уравнението Ward-Tordai и е формулирано унифицирано дробно уравнение от порядък $1/2$, моделиращо адсорбцията на сърфактанти под дифузионен контрол. Резултатите са публикувани в:

- Hristov J., A unified nonlinear fractional equation of the diffusion-controlled surfactant adsorption: Reappraisal and new Solution of the Ward-Tordai Problem, *Journal of King Saud University-Science*, Vol. 28, No. 1, January 2016, Pages 7–13.

7. Направен е извод на дифузионни модели с несингулярна памет, в духа на оператора на Капуто и Фабрицио, чрез конститутивни уравнения с експоненциална памет. Резултатите са публикувани в:

- Hristov J., Derivatives with non-singular kernels: From the Caputo-Fabrizio definition and beyond: Appraising analysis with emphasis on diffusion models, Chapter 10, in *Frontiers in Fractional Calculus*, 2017, S. Bhalekar, Ed., Bentham Science Publishers 2017, pp.270-342.

- Hristov J., Transient Heat Diffusion with a Non-Singular Fading Memory: From the Cattaneo Constitutive Equation with Jeffrey's kernel to the Caputo-Fabrizio time-fractional derivative, *Thermal Science*, 20 (2) (2016), pp.765-770.

- Hristov J., Steady-State Heat Conduction in A Medium with Spatial Non-Singular Fading Memory: Derivation of Caputo-Fabrizio space-fractional derivative with Jeffrey's kernel and analytical solutions, *Thermal Science*, 2017, Vol. 21, No. 2, pp. 827-839.

8. Направен е нов извод на уравнението на Додсън за дифузия в твърди тела от позицията на конститутивни уравнения с експоненциална памет и е формулиран модел с две експоненциални ядра. Резултатите са публикувани в:

- Hristov J., Derivation of fractional Dodson's equation and beyond: Transient mass diffusion with a non-singular memory and exponentially fading-out diffusivity, *Progr. Fract. Differ. Appl.* (2017) vol.3, N04, 255-270.

- Hristov J., The non-linear Dodson diffusion equation: Approximate solutions and beyond with formalistic fractionalization, *Mathematics in Natural Sciences*, 1(1) (2017), pp.1-17.

5. 2. Нови факти за науката:

- Извод на дифузионни модели с несингулярна памет, в духа на оператора на Капуто и Фабрицио, чрез конститутивни уравнения с експоненциална памет.

- Извод на уравнението на Додсън за дифузия в твърди тела от позицията на конститутивни уравнения с експоненциална памет и формулиран модел с две експоненциални ядра.

- Решени са ефективно нелинейното радиационно уравнение и уравнението на Додсън (точно и приближено).

- Изложеният материал в Глави 3.2,3.3,3.4 са нови факти, постигнати с нови методи.

5.3. Обогаляване на съществуващи знания

- Направен е нов извод на уравнението Ward-Tordai и е формулирано унифицирано дробно уравнение от порядък $1/2$, моделиращо адсорбцията на сърфактанти под дифузионен контрол.

- Направен е нов извод на уравнението на Додсън за дифузия в твърди тела от позицията на конститутивни уравнения с експоненциална памет и е формулиран модел с две експоненциални ядра.

5.4. Оценка на типа публикации лежащи в основата на дисертацията

От приложен отделен списък е видно, че части от дисертацията са станали достояние на научната общност у нас и чужбина чрез:

6 глави от книги, чийто пълен текст е отпечатан и публикуван в *Fractional Dynamics*, глава 5 (2015), *Frontiers in Fractional Calculus*, глави 3 и 10 (2017), и такива, на които предстои публикуване през 2018 г. в *Mathematical Methods in Engineering - Applications in Dynamics of Complex Systems*, *Mathematical Methods in Engineering – Theory*, както и една глава под печат в *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*;

20 авторски научни публикации, от които 16 в списания с импакт фактор, публикувани в: *Thermal Science* – 9 бр., *Heat Mass Transfer* – 2 бр., *J. Vibration and Control* – 1 бр., *Fundamenta Informaticae* – 1 бр., *Fluid Dynamics & Materials Processing* – 1 бр., *Math. Modelling of Natural Phenomena*

- 1 бр. и 4 в международни реферирани списания: *Progr. Fract. Differ. Appl.* – 2 бр., *Mathematics in Natural Science* – 1 бр. и *Journal of Computational Complexity and Applications* – 1 бр.

Съдържанието на всички публикации е пряко свързано с темата на дисертацията. Прави впечатление, че от 16 публикации с импакт фактор, 14 (87.5%) са самостоятелни и само 2 (12.5%) са колективни, в които той е втори автор. Всички статии в международни реферирани списания са самостоятелни.

Импакт факторът на списанията, в които са отпечатани научните публикации е както следва: *Thermal Science*: 2015 - 0.939; 2016 – 1.093; *Heat Mass Transfer*: 2016 - 1.233; *J. Vibration and Control*: 2016 – 2.101; *Fundamenta Informaticae*: 2016 – 0.687; *Fluid Dynamics & Materials Processing*: 2016 – 0.31; *Math. Modelling of Natural Phenomena*: 2016 – 0.952. Общият импакт фактор от всички публикации е над 15.0.

5.5. Цитирания на резултатите на дисертацията

Приложеният списък от цитирани авторски публикации показва наличие на 178 цитирания в международни списания. Няма само цитирания. Тази справка ми дава пълното основание да твърдя, че:

- **Представената дисертация е лично дело на нейния автор проф. Йордан Христов;**
- **Основните моменти от дисертацията посредством направените апробации и приложените публикации и по-специално тези от тях, които са цитирани, са станали достояние и оценени от широка научна общественост у нас и в чужбина.**

6. Критични бележки и коментари

Нямам критични бележки и коментари по текста на дисертацията и публикациите върху които тя е изградена

7. Лично впечатление за дисертанта

Познавам професор Христов и неговите отлични професионални изяви повече от 15 години. Няма общи изследвания с дисертанта, но се гордея че съм рецензент на този богат на резултати и идеи научен труд

8. Заключение

В заключение смятам, че поставените в началото на дисертацията задачи са решени, а целите са постигнати.

Всичко написано от мен по-горе ми дава пълното основание да твърдя, че представената от проф. д-р Йордан Янков Христов дисертация за получаване на научната степен „Доктор на техническите науки“ по научна специалност 5.10. „Химични технологии“ (Процеси и апарати в химическата и биологичната технология) на тема: „Нелинейни и аномални приложни дифузионни модели: приближени решения, анализ, синтез и примери“ съдържа достатъчни по значимост приноси и има всички качества за получаване на научната степен „Доктор на техническите науки“, изисквани от ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и Правилника за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в ХТМУ-София.

Ето защо с пълна убеденост предлагам на уважаваните от мен членове, научното жури да приеме и оцени положително дисертацията, представена от проф. д-р инж. Йордан Янков Христов и му присъди научната степен „Доктор на техническите науки“ по научна специалност 5.10. „Химични технологии“ (Процеси и апарати в химическата и биологичната технология).

30.05.2018 г.

Рецензент:

/проф. д-р инж. В. Зимпаров/