



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ДЕПАРТАМЕНТ ПО ФИЗИКОМАТЕМАТИЧЕСКИ

И ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА”

Андрей Радославов Антонов

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПРОМЕНЛИВА СТРУКТУРА И ИМПУЛСИ

за придобиване на образователната и научна степен “доктор”

по научна специалност 4.5. Математика

(Математическо моделиране и приложение на математиката)

Научни ръководители: проф. д-р Ангел Борисов Дишлиев
доц. д-р Катя Георгиева Дишлиева

Научно жури:

1. доц. д-р Светослав Ненов - председател
2. проф. д-мн. Гани Стамов - рецензент
3. проф. д-р Маргарита Бонева - рецензент
4. доц. д-р Валентина Пройчева
5. проф. д-р Ангел Дишлиев

София, 2014

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от катедрен съвет на катедра Математика при Химикотехнологичен и металургичен университет (ХТМУ), град София, проведен на 17.01. 2014 г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 21.03.2014 г. от 14:00 часа в зала 424, сграда А на ХТМУ – София.

Основни данни за дисертационния труд:

- автор: гл. ас. Андрей Радославов Антонов;
- месторабота на автора: главен асистент в катедра Математика на ХТМУ;
- научни ръководители: проф. д-р Ангел Борисов Дишлиев и доц. д-р Катя Георгиева Дишлиева;
- заглавие: “Периодични решения на диференциални уравнения с променлива структура и импулси”;
- област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
- професионално направление: 4.5. Математика;
- научна специалност: Математическо моделиране и приложение на математиката;
- съдържание: увод, основно изложение, заключение, декларация, списък на публикациите на автора по дисертацията, библиография;
- брой параграфи в основното изложение: 7, разпределени в 2 глави;
- брой страници на дисертацията: 125;
- брой страници на основното изложение: 85;
- брой фигури: 12;
- брой публикации на автора, свързани с дисертационния труд: 2;
- брой литературни източници в библиографията: 313.

За удобство означенията и номерацията в автореферата и дисертационния труд са идентични.

Глава 0. Увод

Описание на основните математически обекти, изследвани в дисертационния труд: Разгледаните и изучавани в дисертационния труд математически проблеми се отнасят към фундаменталната и качествената теория на:

- системите автономни диференциални уравнения;
- системите автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси.

В този параграф на увода са разгледани по-подробно вторият тип системи диференциални уравнения, който е сравнително по-непопулярен. Освен това, вторият тип системи включва в себе си първия тип. Ще отбележим, че промяната на структурата и импулсните въздействия се осъществяват едновременно в едни и същи моменти, които се наричат моменти на превключване (виж например монографията [145]).

Един от възможните критерии за класификация на този тип уравнения (с променлива структура и импулси) е по начина на определяне на моментите на превключване. Съгласно този критерий са се обособили няколко класове, от които тук ще посочим следните:

1 клас. Моментите на превключване са предварително фиксирани. Този клас уравнения е най-популярен и най-пълно изучен (виж [8], [9], [10], [26], [171], [187], [242], [258] и [259]);

2 клас. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които траекторията анулира предварително зададени функции, дефинирани във фазовото пространство на системата от автономни диференциални уравнения. Тези функции се наричат превключващи (виж [143], [146], [147], [148], [154]; [199], [200] и [201]);

3 клас. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които траекторията среща предварително зададени множества (с възможно най-обща структура). Тези множества са дислоцирани във фазовото пространство на системата и се наричат превключващи (виж [97], [131], [132] и [235]);

4 клас. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които интегралната крива на изучаваната система анулира предварително зададени функции, дефинирани в разширеното фазово пространство на системата (виж [59], [60], [78] и [165]);

5 клас. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които интегралната крива среща предварително зададени множества, разположени в разширеното фазово пространство на системата. Най-често, тези множества представляват фамилия непресичащи се хиперповърхнини (виж [74], [80], [83], [106], [107], [108], [126], [134], [135], [141] и [246]);

6 клас. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които решението минимизира (максимизира) дадена функция или функционал (виж [32], [57], [58], [59], [60], [76], [77], [156], [157], [236], [256], [277], [280], [288] и [309]);

7 клас. Превключващите моменти имат случаен характер (виж [24], [254], [284] и [285]) и др.

В дисертационния труд се изучават системи диференциални уравнения от посочения по-горе 2 клас. По-подробно, тези системи включват следните обособени и взаимосвързани елементи:

1. Съвкупност от системи нелинейни автономни обикновени диференциални уравнения, описващи непрекъснатите етапи от динамиката на моделираните процеси. Системите имат вида:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

където:

- функциите $f_1, f_2, \dots \in C[G, R^n]$, т.е. десните страни на горните системи са непрекъснати функции в дефиниционното си множество,
- фазовото пространство G е непразна област (отворено и свързано множество) от R^n ,

- съответните начални задачи на горните системи притежават единствени решения в G ;
2. Условия за последователно определяне на моментите на превключване. В тези моменти, както казахме по-горе, се извършва смяната на структурата на системата от диференциални уравнения (по-точно извършва се смяна на дясната страна) и едновременно с това се реализират импулсните въздействия върху решенията. Моментите на превключване са последователни решения на системи от алгебрични уравнения, които имат вида:

$$\varphi_i(x(t)) = 0, \quad i=1,2,\dots,$$

където $x(t)$ е решението на съответната система диференциални уравнения, а функциите $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ са предварително зададени и се наричат превключващи функции. Както споменахме, те са съответни на елементите на дясната страна на системата $f_1, f_2, \dots$. Превключващите функции са непрекъснати в дефиниционните си множества $D_1, D_2, \dots$, които са част от фазовото пространство G . С други думи, $\varphi_i \in C[D_i, R]$, $D_i \subset G$, $i=1,2,\dots$. Моментите на превключване означаваме с $t_1, t_2, \dots$. Изпълнени са равенствата:

$$\varphi_1(x(t_1)) = 0, \varphi_2(x(t_2)) = 0, \dots;$$

3. Импулсни функции, които определят големините (и посоките) на импулсните въздействия. Тези въздействия аналитично се описват както следва:

$$x(t_i + 0) = J_i(x(t_i)), \quad i=1,2,\dots$$

Импулсните функции $J_1, J_2, \dots$ са непрекъснати върху съответните превключващи множества. Имаме $J_i \in C[\Phi_i, R^n]$, където превключващите множества имат вида

$$\Phi_i = \{x; \varphi_i(x) = 0\}, \quad i=1,2,\dots$$

Решенията на съответните начални задачи на разглежданите системи диференциални уравнения са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род (това са точките $t_1, t_2, \dots$), в които решенията са непрекъснати отляво.

Специфични особености и възникващи трудности при изучаване на математическите обекти от дисертацията: Специфичните особености, свързани с изследването на системите с променлива структура и импулси, а също така и възникващите трудности при тяхното изучаване, са следните:

- 1. Прекъснатост на решението на съответната начална задача:** Точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът“ е ограничен. Обикновено се предполага, че решението е непрекъснато отляво в точките на импулсно въздействие;
- 2. Загиване на решение или наличие на ефекта „биене“:** В тези случаи може да се достигне до ситуация, при която превключващите моменти на някое решение да притежават точка на сгъстяване. Следователно, решението не е продължимо надясно от тази точка. Това означава, че решението „загива“. Поради тази причина, при описаната по-горе ситуация, не може да се изучават различни аспекти на качествената теория на системите диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Като примери на качествени характеристики, които решенията не притежават (в описаната по-горе ситуация), тук ще посочим: различни асимптотични свойства на решенията, периодичност, устойчивост, еквивалентност на решенията и др.;
- 3. Загуба на свойството автономност:** Независимо, че десните страни на разглежданите системи не зависят от времето, т.е. системите са автономни, то се оказва, че решенията на съответните начални задачи са функции на началния момент, което означава, че свойството автономност се „загубва“. Действително, лесно се съобразява, че решенията зависят от моментите на превключване. С други

думи, всяко решение, в зависимост от началната точка, притежава специфични (съответни само на него) моменти на превключване. Това се дължи на факта, че превключващите моменти се получават като решения на алгебрични уравнения, в които участва конкретното решение. По този начин достигахме до извода, че решението зависи съществено от началния момент;

4. **Сливане на решения:** Обикновено сливанията се осъществяват след импулсно въздействие, което се осъществява върху поне едно от сливащите се решения. По-конкретно, след импулсно въздействие върху решението $x(t)$ в превключващия момент t_i , точката $x(t_i + 0) = J_i(x(t_i))$ попада върху тректорията на друго решение. Следователно, след момента на превключване t_i двете решения съвпадат;
5. **Промяна на превключващите моменти при промяна на началното условие:** Различните решения (с начални условия, които не съвпадат) имат различни превключващи моменти, включително при едното от тези решения е възможно да липсват превключващи моменти. Обикновено, такъв е случаят на нулевото решение, което (по принцип) не е подложено на импулсни въздействия;
6. **Промяна на превключващите моменти при смущаване на някои от елементите на системата:** В общия случай, решенията на изследваната начална задача и на съответната смутена начална задача (при едни и същи начални условия) имат различни превключващи моменти. Този ефект се наблюдава при смущения в превключващите функции или превключващи множества. Този факт означава, че съответните импулсни въздействия на основното и смутеното решение са различни по големина и направление. Това също така означава, че двете решения (в общия случай) се различават след първия превключващ момент;
7. **Натрупване на грешки:** Пертурбациите и неточностите при определяне на моментите на смяната на структурата (десните страни на системите), както и при определяне на големините и направленията на импулсните въздействия (които често се търсят с помощта на приблизителни методи), се „натрупват“ във времето. Те оказват съществено влияние при числово пресмятане на големината на решенията в даден момент, а също така и на неговото поведение. Така например, при неограничен брой на импулсните въздействия, тези „натрупани“ пертурбации могат да имат непреодолим характер и да доведат до формирането на решения, които се различават съществено от изучаваното „непертурбирано“ решение.

Преглед на основните резултати, свързани с изследваните математически обекти: Изследванията на системите диференциални уравнения с импулси условно можем да разпределим в три общи направления:

1. Пренасяне и обобщаване на някои резултати от диференциалните уравнения в "непрекъснатия случай" към уравненията с импулсни въздействия (виж [7], [11], [16], [17], [23], [27], [28], [31], [33], [35], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [52], [53], [61], [64], [67], [68], [69], [71], [72], [87], [88], [93], [95], [96], [140], [161], [167], [172], [174], [175], [177], [185], [186], [192], [203], [224], [231], [233], [234], [271], [273], [275] и др.);
2. Изследвания на специфични качества, характерни само за решенията на уравненията с импулсни въздействия и техните приложения (виж [83], [84], [89], [90], [91], [92], [112], [115], [119], [121], [136], [139], [142], [145], [166], [168], [169], [173], [183], [184], [204], [241], [242], [246], [250], [267], [268], [277], [280], [283], [287], [296], [298], [299] и др.);
3. Моделиране и оптимизиране на процеси от практиката с помощта на импулсни уравнения. При това изучаваните процеси могат да се опишат и изследват адекватно само с такъв тип уравнения (виж [51], [82], [109], [122], [123], [127], [195], [196], [214], [217], [219], [227], [228], [236], [238], [248], [260], [270], [274], [279], [304] и др.);

Изследванията за съществуване на периодични решения можем да отнесем към първото направление. Ще подчертаем изрично, че всички получени досега резултати се

отнасят предимно за диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие. Тук ще посочим следните научни статии: [50], [56], [73], [79], [85], [86], [114], [116], [117], [125], [133], [163], [180], [181], [182], [205], [206], [207], [209], [212], [223], [239], [240], [243], [250], [257], [264], [265], [278], [290], [292], [294], [297], [302], [305], [306], [308] и [310].

Моделирането на периодични процеси, подложени на дискретни (кратковременни) външни въздействия, се осъществява често с помощта на импулсни диференциални уравнения, които притежават периодични решения. Приложенията са предимно при изучаване на биологични и екологични процеси: [113], [128], [155], [156], [157], [160], [164], [189], [194], [208], [210], [211], [213], [215], [217], [220], [221], [222], [237], [255], [266], [271], [281], [286], [288], [289], [291], [293], [307], [313] и др.

Изследването на периодичните решения на импулсни системи диференциални уравнения е основната тема в монографията на Д. Байнов и П. Симеонов [99].

Изследванията в настоящата дисертация имат за цел да изучат въпроса за съществуване на периодични решения на импулсни системи с променливи импулсни моменти и променлива структура.

Приложения на изследваните уравнения с променлива структура и импулси при моделиране на динамични процеси от практиката: Този тип уравнения (с променлива структура и импулси) са удобен математически апарат за моделиране на динамични процеси, които се характеризират със следните две особености:

- Процесите са подложени на „кратковременни и интензивни“ външни въздействия (смущения, пертурбации). Предполага се, че времетраенето на външните смущения е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процеса;
- Непосредствено след тези импулсни пертурбации изучаваният процес продължава своето развитие, като се подчинява на нови, различни от предходните, правила и закони.

Ще отбележим (потвърдено от много автори), че интензивното развитие на теорията на диференциалните уравнения с импулси и с постоянна структура се дължи на многобройните им приложения: действието на амортизатор, подложен на ударни въздействия; колебанията на системи от махала при наличие на външни импулсни смущения; ударен модел на часовников механизъм; виброударни системи; билиардни движения на материални точки; релаксионни колебания на електромеханични системи; електронни схеми; затихващ осцилатор, подложен на импулсни въздействия; динамиката на системи за автоматично регулиране; смущения в клетъчни невронни мрежи; импулсни пертурбации в скоростта на развитие на кълбовидни бактерии, подчинени на закона на Schmalhausen; импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на изолирана популация; загиване на популации в резултат на импулсни въздействия; импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на общество от тип хищник-жертва; епидемиологията; „шокови“ изменения на цените на затворените пазари и др.

Както казахме по-горе, приложенията на диференциалните уравнения с променлива структура и без импулсни въздействия са предимно в теорията на управлението. Освен това с помощта на такива уравнения се изучават: задачи от фармакокинетиката; управление на орбитата на спътник с помощта на радиални ускорения; преминаването на твърдо тяло от флуид с дадена плътност във флуид с друга плътност; изменението на скоростта на химична реакция при прибавянето или отнемането на катализатор и др.

В настоящата дисертация са съчетани тези два типа диференциални уравнения.

Изучаването на скокообразно изменящи се процеси със смяна на законите на развитие е предмет на изследване в редица науки: механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. В тези случаи, използването на математически апарат под формата на моделиращи диференциални уравнения с променлива структура и импулси, като правило, е задължително.

Основни цели на дисертационния труд: Основните цели на дисертационния труд са три:

1. Въвеждат се и се изследват нови математически обекти и понятия, свързани със системите автономни обикновени диференциални уравнения: достижими множества, тотално достижими множества, начални множества на отрицателна и положителна достижимост, интегрални многообразия на достижимост, функция на достижимост и др. Изучени са следните основни свойства на тези обекти: отвореност и свързаност на началните множества на достижимост, топологична инвариантност на траекториите на разглежданите системи и др.
2. Изучени са някои елементи от качествената теория на системите автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Намерени са достатъчни условия за: продължимост на решенията, непрекъсната зависимост на тези решения относно началните условия, периодичност и др.
3. Приложение на теоретичните резултати върху известни математически модели. Като примери ще посочим: класическия модел на Lotka-Volterra от популационната динамика, модела на Volterra-Gause-Witt от популационната динамика, модела на R. Miller, описващ взаимодействието на съревноваващи се видове в обща хранителна среда, модела на Gompertz, описващ динамиката на изолирана популация, модела на осцилатор и др.

Изрично ще подчертаем, че проведените изследвания на свойствата на споменатите по-горе модели са възможни само благодарение на получените теоретични резултати в дисертационния труд.

Основни математически методи, използвани в дисертацията: Основните методи, използвани в дисертационния труд, са свързани с традиционния математически апарат на реалния анализ и в частност на диференциалните уравнения. Съществено се използва класическото неравенство на Gronwall и теоремата за непрекъсната зависимост на решенията на диференциални уравнения с постоянна структура и без импулси.

Съдържание: Дисертационният труд се състои от увод и две глави, като глава първа съдържа четири параграфа, а глава втора – три.

Глава I. Достижими множества. В първа глава се изучава широк клас нелинейни автономни системи обикновени диференциални уравнения. Във фазовото пространство G на всяка конкретна система от споменатия по-горе клас е зададено непразно множество Φ . Ако съществува точката $x_0 \in G \setminus \Phi$ такава, че решението $x(t; x_0)$ на системата с начална точка x_0 пресича множеството Φ , то това множество се нарича достижимо. Ако съществува положителна константа θ , такава, че, $x(\theta; x_0) \in \Phi$, то това множество се нарича положително достижимо, а точката x_0 се нарича начална точка на положителна достижимост. Аналогично се дефинират понятията отрицателно достижимо множество и начална точка на отрицателна достижимост. Ще обърнем внимание на факта, че е възможно едно и също множество Φ да е положително и отрицателно достижимо. Множествата от всички начални точки на отрицателна и положителна достижимост означаваме съответно с X_0^- и X_0^+ .

Основната цел в първа глава е да се изследват множествата на отрицателна и положителна достижимост.

В първия параграф на главата са въведени понятията достижимо множество, начална точка на достижимост, начално множество на достижимост и др. Намерени са условия за съществуване на началните множества на достижимост. Установена е тяхната структура. При естествени ограничения е показано, че множествата X_0^- и X_0^+

са отворени, а множеството $X_0 = X_0^- \cup X_0^+ \cup \Phi$ е отворено и свързано. Резултатите са демонстрирани с помощта на два примера. Първият от тях се отнася за класическия модел на Lotka-Volterra, а втория за модела на Volterra-Gause-Witt. Двата модела описват динамиката на развитие на съобщество от тип жертва-хищник. В първия от тях съобществото периодично повтаря състоянието си (количествата на биомасата на жертвата и хищника). В този модел съобществото притежава единствено положително равновесно състояние, което не е асимптотически устойчиво. Във втория модел се изследват съобщества, които притежават асимптотически устойчиво равновесно положение. Предложените в примерите множества на достижимост са отсечки, разположени във фазовите пространства на моделите. Смисълът и причината за избор на множествата на достижимост се изясняват в последните два параграфа на дисертацията. В явен вид са намерени началните множества на положителна достижимост. Върху моделите са приложени получените в началото на параграфа теореми. Установено е, че началните множества на достижимост са отворени. Резултатите от този параграф са публикувани в [247].

Във втория параграф на главата са продължени изследванията от предходния параграф. С помощта на достижимите множества е дефиниран клас от интегрални многообразия. Всеки клас от въведените многообразия се състои от всички траектории на системата автономни диференциални уравнения, които пресичат зададено достижимо множество. При промяна на достижимото множество се променя и съответното многообразие. Изучени са основни свойства на тези многообразия. По-точно, установени са връзки между началните точки на траекториите и топологичното им разположение относно началните множества на достижимост. Доказаните основни твърдения са реализирани върху уравнение, описващо вертикалните трептения на материална точка с ненулева маса, окачена на идеално пъргава пружина в изолирана среда, т.е. без триене и при отсъствие на постоянно действащи външни сили. Резултатите от този параграф са публикувани в [149].

В параграф 3 за всяка начална точка на положителна достижимост е дефинирана така наречената функция на достижимост. Дефиниционното множество на тази функция съвпада с X_0^+ . За всяка точка $x_0 \in X_0^+$ функционалната стойност е равна на времето, необходимо на решението $x(t; x_0)$ да достигне до множеството Φ , ако стартира от точката x_0 . В параграфа са изследвани някои качествени свойства (непрекъснатост, ограниченост и др.) на функцията на достижимост. Едно от основните ограничения на изучаваните автономни системи диференциални уравнения е същите да притежават равномерни Липшицови решения (виж [55], [81], [129], [140], [197], [261] и [262]). Накрая на параграфа е разгледан обобщен модел на взаимодействие (конкуренция) на два вида, разположени в една и съща хранителна среда. Моделът е взимстван от R. Miller [232]. Установена е непрекъснатост на функцията на достижимост, която е съответна на подходящо дефинирано множество на достижимост.

В параграф 4 са продължени изследванията от предходните параграфи и се изучава важна теоретична задача. По-точно, намерени са достатъчни условия, при които множеството от началните точки на достижимост съвпада с фазовото пространство на системата. Тогава ще казваме, че множеството Φ е тотално достижимо. Получените резултати намират приложение при изучаване на някои класове импулсни системи автономни диференциални уравнения с променливи импулсни моменти. Предполагаме, че импулсните моменти съвпадат с моментите, в които траекторията пресича множеството на достижимост Φ . Ако множеството е тотално достижимо, това означава, че всички решения на изследваната системи (от дефинирания по-горе клас) са подложени на импулсни въздействия. Само в този случай е възможно да се изследват въпроси, свързани с различни варианти на "широкото" понятие "близост" на решенията на тези импулсни системи. Действително, ако допуснем, че дадено решение е подложено на импулсно въздействие, а друго (независимо от близостта на началните точки) не достига Φ и следователно е без

импулси, то "близостта" (в какъвто и да е смисъл) между двете решения е нарушена след импулсния момент. Резултатите от параграфа са приложени върху конкретен пример. За разглежданата конкретна автономна система е установено съществуването на тотално достижимо множество.

§1. Топологични свойства на достижими множества за системи автономни диференциални уравнения

Разглеждаме следната начална задача

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

където: функцията $f: G \rightarrow R^n$; множеството $G \subset R^n$, $G \neq \emptyset$ и G е област (отворено и свързано множество); $x_0 \in G$. Решението на задачата (1.1) ще означаваме с $x(t; x_0)$. Траекторията на системата (1.1), заключена между точките $x(0; x_0) = x_0$ и $x(\theta; x_0)$, където $\theta \in R$, ще означаваме с $\gamma(\theta, x_0)$. Изпълнено е

$$\gamma(\theta, x_0) = \begin{cases} \{x = x(t; x_0); 0 \leq t < \theta\}, & \text{ако } \theta \geq 0, \\ \{x = x(t; x_0); \theta < t \leq 0\}, & \text{ако } \theta < 0. \end{cases}$$

В частност

$$\gamma(\infty, x_0) = \{x = x(t; x_0); 0 \leq t < \infty\} \quad \text{и} \quad \gamma(-\infty, x_0) = \{x = x(t; x_0); -\infty < t \leq 0\}.$$

Дефиниция 1.1. Нека е изпълнено:

1. $X_0^+ \subset G$, $\Phi \subset G$, $X_0^+ \neq \emptyset$ и $\Phi \neq \emptyset$.
2. За всяка точка $x_0 \in X_0^+$, решението $x(t; x_0)$ на началната задача (1.1) е дефинирано и единствено в интервала $[0, \infty)$.
3. Валидно е

$$(\forall x_0 \in X_0^+) (\exists \theta = \theta(x_0) > 0) : x(\theta; x_0) \in \Phi.$$

Тогава ще казваме, че:

Множеството Φ е положително достижимо от множеството X_0^+ чрез системата (1.1);

X_0^+ е начално множество на положителна достижимост на Φ чрез системата (1.1);

Всяка точка $x_0 \in X_0^+$ е начална точка на положителна достижимост на Φ чрез системата (1.1).

По аналогия дефинираме понятията: отрицателно достижимо множество от множеството X_0^- чрез системата (1.1), начално множество на отрицателна достижимост на Φ чрез системата (1.1) и начална точка на отрицателна достижимост на Φ чрез системата (1.1).

Тъй като в следващото изложение, въведените по-горе термини ще се отнасят само за множеството Φ и системата (1.1), то ще пропускаме тези уточнения. Освен това, отново за удобство, с X_0^+ и X_0^- ще означаваме съответно множествата от **всички** начални точки на положителна достижимост и **всички** начални точки на отрицателна достижимост. Накрая, множеството $X_0 = X_0^- \cup X_0^+ \cup \Phi$ ще наричаме начално множество на достижимост.

Ще предполагаме, че множеството

$$\Phi = \{x \in D; \varphi(x) = 0\} \subset G,$$

където $D \subset G$, D е област и функцията $\varphi: D \rightarrow R$

Въвеждаме следните условия:

H1.1. Съществува константа $C_{Lip} > 0$ такава, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| \leq C_{Lip} \|x' - x''\|.$$

H1.2. За всяка точка $x_0 \in G$, решението на задачата (1.1) съществува и е единствено в R .

H1.3. Функцията $\varphi \in C^1[D, R]$, множеството $\Phi = \{x \in D; \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$ и

$$(\forall x \in \Phi) \Rightarrow \langle \text{grad} \varphi(x), f(x) \rangle > 0.$$

H1.4. Множеството Φ е свързано.

По-нататък, многократно ще използваме функцията $\phi: \Delta \rightarrow R$, където $\phi(t) = \varphi(x(t; x_0))$ и $\Delta = \{t \in R; x(t; x_0) \in D\}$. Ако точката $x_0 \in D$, то функцията ϕ е дефинирана в околност на 0, т.е. $0 \in \Delta$. Освен това, в този случай е ясно, че $\phi(0) = \varphi(x(0; x_0)) = \varphi(x_0)$.

С помощта на горните условия формулираме следните основни резултати в параграфа.

Теорема 1.1. Нека са изпълнени условията:

1. Валидно е условието H1.2.
2. Множеството Φ е положително достижимо от множеството X_0^+ и точката $x_0 \in X_0^+$.

Тогава траекторията $\gamma(\theta, x_0) \subset X_0^+$, където положителната константа θ е определена така, че $x(\theta; x_0) \in \Phi$ и $x(t; x_0) \notin \Phi$ при $0 \leq t < \theta$.

Теорема 1.2. Нека са изпълнени условията:

1. Валидно е условието H1.2.
2. Функцията $\varphi \in C[D, R]$.
3. Множеството Φ е положително достижимо от множеството X_0^+ .

Тогава $X_0^+ \neq \emptyset$.

Теорема 1.3. Нека са изпълнени условията:

1. Валидно е условието H1.2.
2. Функцията $\varphi \in C[D, R]$.
3. Множеството Φ е положително достижимо от множеството X_0^+ .

Тогава $\Phi \subset \overline{X_0^+}$.

Теорема 1.4. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H1.1, H1.2 и H1.3.
2. Множеството Φ е положително достижимо от множеството X_0^+ .

Тогава X_0^+ е отворено множество.

Аналогични твърдения на Теорема 1.1-1.4 са верни и за отрицателно достижими множества.

Теорема 1.5. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H1.1, H1.2 и H1.3.
2. Множеството Φ е достижимо от множества X_0^+ и X_0^- .

Тогава множеството $X_0 = X_0^- \cup X_0^+ \cup \Phi$ е отворено.

Теорема 1.6. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H1.1-H1.4.

2. Множеството Φ е достижимо от множества X_0^- и X_0^+ .

Тогава $X_0 = X_0^- \cup X_0^+ \cup \Phi$ е свързано множество.

В края на параграфа са разгледани 2 илюстриращи примера. Първият от тях се отнася за класическия модел на Lotka-Volterra, а вторият за модела на Volterra-Gause-Witt. Двата модела описват динамиката на развитие на съобщество от тип жертва-хищник. И за двата модела в явен вид са намерени началните множества на положителна достижимост. Върху моделите са приложени получените в параграф 1 теореми. Установено е, че началните множества на достижимост са отворени.

§2. Един клас интегрални многообразия за системи автономни диференциални уравнения

Разглеждаме следната начална задача

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

където: функцията $f: G \rightarrow R^n$; множеството $G \subset R^n$, $G \neq \emptyset$ и G е област (отворено и свързано множество); $x_0 \in G$. Решението на задачата (2.1) ще означаваме с $x(t; x_0)$.

Въвеждаме условията:

H2.1. Съществува константа $C_{Lip} > 0$ такава, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| \leq C_{Lip} \|x' - x''\|.$$

H2.2. За всяка точка $x_0 \in G$ решението на задачата (2.1) съществува и е единствено в R .

Основните резултати в параграф 2 са следните теореми.

Теорема 2.1. Нека са изпълнени условията:

1. Валидно е условието H2.2.

2. Множеството Φ е достижимо от множеството X_0^+ и точката $x_0 \in X_0^+$.

Тогава траекторията $\gamma(-\infty, x_0) \subset X_0^+$.

Аналогично твърдение е изпълнено за множеството X_0^- .

По-нататък се използват условията:

H2.3. Функцията $\varphi \in C^1[D, R]$ и $\Phi = \{x \in D; \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$. Съществува константа $C_{\langle \text{grad} \varphi, f \rangle} > 0$ такава, че

$$(\forall x \in \Phi) \Rightarrow \langle \text{grad} \varphi(x), f(x) \rangle \geq C_{\langle \text{grad} \varphi, f \rangle}.$$

H2.4. Множеството Φ е свързано.

H2.5. Изпълнено е $\overline{\Phi} \setminus \Phi \subset \partial G$.

Теорема 2.2. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H2.1, H2.2 и H2.3.

2. Множеството Φ е достижимо от множеството X_0^+ и точката $x_0 \in X_0^+$.

Тогава траекторията $\gamma(\infty, x_0) \subset X_0$.

Теорема 2.3. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H2.1-H2.4.

2. Множеството Φ е (положително) достижимо от множеството X_0^+ .

3. Точката $x_0 \in (\partial X_0^+ \setminus \Phi) \cap G$.

Тогава траекторията $\gamma(\infty, x_0) \subset (\partial X_0 \setminus \Phi) \cap G$.

Твърдения аналогични на Теорема 2.2 и 2.3 са изпълнени за

множеството X_0^- .

Теорема 2.4. Нека са изпълнени условията H2.1-H2.5.

Тогава $\overline{\Phi} \setminus \Phi \subset \partial X_0$.

Като приложение в края на параграфа е разгледан пример на уравнение, описващо вертикалните трептения на материална точка с ненулева маса, окачена на идеално пъргава пружина в изолирана среда, т.е. без триене и при отсъствие на постоянно действащи външни сили. Непосредствените пресмятания потвърждават получените по-горе изводи.

§3. Функция на достижимост за системи автономни дифференциални уравнения

Въвеждаме следните означения и дефиниции:

Затворената отсечка с краища точките x и y ($x, y \in R^n$) ще бележим както следва

$$[x, y] = \{z_\lambda \in R^n; z_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Дефиниция 3.1. Ще казваме, че кривата γ е P -линейна, ако

$$\gamma = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{p-1}, x_p] = \bigcup_{i=1, \dots, p} [x_{i-1}, x_i].$$

С други думи, P -линейната крива се състои от P последователно свързани отсечки.

Дефиниция 3.2. Ще казваме, че областта $G \subset R^n$ е P -изпъкнала, ако

$$(\forall x, y \in G) \left(\exists \gamma; \gamma = \bigcup_{i=1, \dots, p} [x_{i-1}, x_i] \subset G \right) : x = x_0, y = x_p.$$

С други думи, всеки две точки от G е възможно да се свържат с P -линейна крива от G .

Дефиниция 3.3. Ще казваме, че областта $G \subset R^n$ е строго P -изпъкнала, $p \geq 2$, ако:

1. Областта G е P -изпъкнала;
2. Изпълнено е

$$(\exists x, y \in G) : (\forall \gamma \subset G, x \in \gamma, y \in \gamma) \Rightarrow (\text{кривата } \gamma \text{ не е } (p-1)\text{-линейна}).$$

С други думи, ако областта G е строго P -изпъкнала, то G не е $(p-1)$ -изпъкнала.

Дефиниция 3.5. Ще казваме, че областта G е ограничено-свързана, ако

$$(\exists l_0 = \text{const} > 0) (\forall x, y \in G) (\exists \gamma; x, y \in \gamma, \gamma \subset G) : l[\gamma] \leq l_0.$$

В горната дефиниция със символа $l[\gamma]$ е означена дължината на кривата γ .

Основен обект на изследване в този параграф е следната начална задача

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

където: функцията $f: G \rightarrow R^n$; множеството $G \subset R^n$, $G \neq \emptyset$ и G е област; $x_0 \in G$. Решението на задачата (3.1) ще означаваме с $x(t; x_0)$. Траекторията на системата (3.1), заключена между точките $x(0; x_0) = x_0$ и $x(\theta; x_0)$, $\theta \in R$, ще означаваме с $\gamma(\theta, x_0)$.

Дефиниция 3.6 [140]. Ще казваме, че решенията на системата (3.1) са равномерно Липшицово устойчиви, ако

$$(\exists L = \text{const} > 0) (\exists \delta_L \text{ const} > 0) : (\forall x_{01}, x_{02} \in G, \|x_{01} - x_{02}\| < \delta_L) \\ \Rightarrow \|x(t; x_{01}) - x(t; x_{02})\| < L \|x_{01} - x_{02}\|, t \geq 0.$$

Равномерната Липшицова устойчивост е въведена през 1986 от F. Dannan и S. Elaydi в [129].

Въвеждаме следните условия:

НЗ.1. Съществува константа $C_{Lip} > 0$ такава, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| \leq C_{Lip} \|x' - x''\|.$$

НЗ.2. Съществува константа $C_f > 0$ такава, че

$$(\forall x \in G) \Rightarrow \|f(x)\| \leq C_f.$$

НЗ.3. За всяка точка $x_0 \in G$ решението на задачата (3.1) съществува и е единствено в R .

НЗ.4. Функцията $\varphi \in C[D, R]$ и $\varphi \in C^1[\Phi, R]$, където областта $D \subset G$ и достижимото множество $\Phi = \{x \in D; \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$. Съществува константа $C_{\langle grad \varphi, f \rangle} > 0$ такава, че

$$(\forall x \in \Phi) \Rightarrow \langle grad \varphi(x), f(x) \rangle \geq C_{\langle grad \varphi, f \rangle}.$$

НЗ.5. Множеството Φ е свързано.

НЗ.6. Изпълнено е $\overline{\Phi} \setminus \Phi \subset \partial G$.

НЗ.7. Съществува константа $C_\varphi > 0$ такава, че

$$(\forall x \in D) \Rightarrow |\varphi(x)| \leq C_\varphi \rho(x, \Phi).$$

Дефиниция 3.7. Функцията $\Theta^+ : X_0^+ \rightarrow R^+$, която на всяка точка $x_0 \in X_0^+$ съпоставя положителна константа $\theta = \Theta(x_0)$, за която е изпълнено $x(\theta; x_0) \in \Phi$ и $x(t; x_0) \notin \Phi$ при $0 \leq t < \theta$ се нарича функция на достижимост.

С други думи, $(\forall x_0 \in X_0^+) (\exists \theta = \Theta^+(x_0) \in R^+)$:

- $x(\theta; x_0) \in \Phi$;

- $(\forall t, 0 \leq t < \theta = \Theta^+(x_0)) \Rightarrow x(t; x_0) \notin \Phi$.

По аналогичен начин се дефинира и функцията $\Theta^- : X_0^- \rightarrow R^-$.

Следващите две теореми са основни в параграфа.

Теорема 3.3. Нека са изпълнени условията НЗ.1-НЗ.7.

Тогава $\Theta^- \in C[X_0^-, R^-]$ и $\Theta^+ \in C[X_0^+, R^+]$.

Теорема 3.4. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1-НЗ.7.
2. Решенията на системата (3.1) са равномерно Липшицово устойчиви.
3. Областта X_0^+ е изпъкнала и ограничена.

Тогава функцията Θ^+ е ограничена в X_0^+ .

В края на параграф 3 като приложение е разгледан обобщеният модел на взаимодействие (конкуренция) на два вида, разположени в една и съща хранителна среда. Моделът е взимстван от R. Miller [232] и K. Gopalsamy [176]. При наложени естествени условия, продиктувани от популационната динамика и направени непосредствени пресмятания, се потвърждават резултатите в изведените по-горе теореми.

§4. Тотално достижими множества за системи автономни диференциални уравнения

Разглеждаме следната начална задача

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (4.1)$$

където: функцията $f: G \rightarrow R^n$; множеството $G \subset R^n$, $G \neq \emptyset$ и G е област (отворено и свързано множество); $x_0 \in G$. Решението на задачата (4.1) ще означаваме с $x(t; x_0)$.

Въвеждаме следните условия:

H4.1. Съществува константа $C_{Lip} > 0$ такава, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| \leq C_{Lip} \|x' - x''\|.$$

H4.2. Съществува константа $C_f > 0$ такава, че

$$(\forall x \in G) \Rightarrow \|f(x)\| \leq C_f.$$

H4.3. За всяка точка $x_0 \in G$ решението на задачата (4.1) съществува и е единствено в R .

H4.4. Функцията $\varphi \in C^1[D, R]$, където областта $D \subset G$ и достижимото множество

$$\Phi = \{x \in D; \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset.$$

Съществува константа $C_{\langle grad \varphi, f \rangle} > 0$ такава, че

$$(\forall x \in \Phi) \Rightarrow \langle grad \varphi(x), f(x) \rangle \geq C_{\langle grad \varphi, f \rangle}.$$

H4.5. Множеството Φ е свързано.

H4.6. Изпълнено е $\overline{\Phi} \setminus \Phi \subset \partial G$.

H4.7. Съществува константа $C_\varphi > 0$ такава, че

$$(\forall x \in D) \Rightarrow |\varphi(x)| \leq C_\varphi \rho(x, \Phi).$$

Нека множествата X_0^+ и X_0^- са начални множества съответно на положителна и отрицателна достижимост на Φ чрез системата (4.1) (виж Дефиниция 1.1). Разглеждаме функцията $\Theta^+: X_0^+ \rightarrow R^+$, която дефинираме както следва $(\forall x_0 \in X_0^+) (\exists \theta = \Theta^+(x_0) \in R^+)$:

- $x(\theta; x_0) \in \Phi$;

- $(\forall t, 0 \leq t < \theta = \Theta^+(x_0)) \Rightarrow x(t; x_0) \notin \Phi$.

По аналогичен начин се дефинира и функцията $\Theta^-: X_0^- \rightarrow R^-$.

Дефиниция 4.1. Ще казваме, че множеството Φ е тотално положително достижимо чрез системата (4.1), ако $X_0^+ = G$.

По аналогичен начин се дефинира и понятието тотално отрицателно достижимо множество.

Дефиниция 4.2. Ще казваме, че множеството Φ е тотално достижимо чрез системата (4.1), ако то е положително и отрицателно достижимо чрез същата система, т.е., ако $X_0^- = X_0^+ = G$.

Основните резултати в този параграф се съдържат в следните твърдения:

Теорема 4.2. Нека са изпълнени условията на Следствие 4.1.

Тогава $(\forall x_0 \in \partial X_0^+ \cap G) \Rightarrow \gamma(\infty, x_0) \cap (\overline{\Phi} \setminus \Phi) \neq \emptyset$.

Теорема 4.3. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H4.1-H4.7.
2. Решенията на системата (4.1) са равномерно Липшицово устойчиви.
3. Областите X_0^- и X_0^+ са ограничено-свързани.

Тогава множеството Φ е тотално достижимо.

Следствие 4.8. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н4.1-Н4.7.
2. Решенията на системата (4.1) са равномерно Липшицово устойчиви.
3. Областите X_0^- и X_0^+ са k -изпъкнали и ограничени.

Тогава множеството Φ е тотално достижимо.

В края на параграф 4 е разгледан конкретен пример. За разгледаната конкретна автономна система е установено съществуването на тотално достижимо множество.

Глава II. Продължими, непрекъснати и периодични решения на системи автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси

Във втора глава се изучава специален клас нелинейни автономни системи обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Дясната страна на всяка една от тези системи се избира последователно от редицата от функции $f_1(x), f_2(x), \dots$, дефинирани във фазовото пространство G . Съответни на дясната страна на системата са превключващите функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, дефинирани в съответни множества $D_1, D_2, \dots$, за които е изпълнено $D_1 \subset G, D_2 \subset G, \dots$. С помощта на превключващите функции са дефинирани така наречените превключващи множества, дислоцирани във фазовото пространство:

$$\Phi_1 = \{x \in G; \varphi_1(x) = 0\}, \Phi_2 = \{x \in G; \varphi_2(x) = 0\}, \dots$$

Съответни на дясната страна са и импулсните функции $J_1(x), J_2(x), \dots$, дефинирани съответно върху множествата $\Phi_1, \Phi_2, \dots$.

Поредната i -та промяна на дясната страна на системата (смяната на функциите f_i с f_{i+1}) и съответното импулсно въздействие върху решението

$$x(t_i) \rightarrow x(t_i + 0) = J_i(x(t_i))$$

се извършват в така наречения i -ти по ред момент на превключване $t_i, i = 1, 2, \dots$. Точно в този момент решението анулира превключващата функция φ_i , т.е.

$$\varphi_i(x(t_i)) = 0, i = 1, 2, \dots$$

Още веднъж ще подчертаем, че след всеки момент на превключване изучаваният процес продължава своето развитие, като се подчинява на нов закон на развитие (нова дясна страна на системата). Освен това, достигнатата стойност $x(t_i)$ в момента на превключване t_i се различава от началната точка $x(t_i + 0)$, от която стартира процесът след този момент. Това обстоятелство се дължи на дискретното импулсно въздействие върху решението, което се осъществява във всеки един момент на превключване. Този факт същевременно означава, че решението е прекъснато в моментите на превключване.

Диференциалните уравнения с променлива структура и импулси са въведени в [230]. Някои качествени свойства на техните решения са изучени в [119], [120], [122], [123], [137], [138], [150], [151], [152], [153], [227] и [249].

Основната цел във втора глава е да се изучат някои основни качества на системите диференциални уравнения с променлива структура и импулси, като продължимост на решенията, непрекъснатата зависимост от началните условия и съществуване на периодични решения.

В параграф 5 са намерени достатъчни условия, гарантиращи, че моментите на превключване на произволно решение не притежават точка на съгъстяване. Ако допуснем противното, т.е., че тези моменти притежават точка на съгъстяване, то е ясно,

че решението не е продължимо надясно от тази точка. Следователно, в този случай редица важни качествени характеристики на решенията не може да се изучават. Нещо повече, тези качества не е възможно да се дефинират коректно. Към споменатите качествени характеристики спадат: устойчивост, монотонност, осцилиране, периодичност, еквивалентност и т.н. В качеството на пример е показано, че един от няколкото варианта на достатъчни условия за продължимост на решенията на изследвания клас системи е валиден за конкретен импулсен модел на Gompertz. Характерно за този модел е, че превключващите функции, респективно превключващите множества и импулсните функции са подбрани така, че решението (количеството биомаса на изолираната популация) остава в предварително определени граници. Предполага се, че популацията се развива "оптимално" в някакъв смисъл, когато биомасата ѝ е в тези граници.

В параграф 6 са намерени достатъчни условия за непрекъсната зависимост на решенията на разглеждания клас уравнения относно началното условие. Специфична особеност на тези уравнения е, че моментите на смяната на дясната страна и импулсните въздействия (превключващите моменти) не са постоянни (предварително фиксирани), а зависят от началното условие. Следователно при промяна в началното условие се променят и моментите на превключване. В параграфа е показано, че при сравнително "малки" смущения в началното условие, превключващите моменти се променят също сравнително "малко". Въпреки това, във времевите интервали между съответните превключващи моменти на основното и смутеното решение не може да се изисква "близост" между тези две решения. Причина за това е, че едното решение е подложено на поредното импулсно въздействие, а другото – не.

В последния параграф 7 на дисертацията са получени основните резултати. Намерени са достатъчни условия за съществуване на поне едно периодично решение. Предполагаме, че решенията стартират от тотално достижимо множество Φ_k , $k > 1$. С други думи началната точка $x_0 \in \Phi_k$. След k на брой превключвания (смени на дясната страна и импулсни въздействия) решението $x(t; x_0)$ в момента t_k отново попада върху тотално достижимото множество Φ_k , т.е. $x(t_k; x_0) \in \Phi_k$. Показано е, че изображението $x_0 \rightarrow x(t_k; x_0)$ е непрекъснато изображение на Φ_k в Φ_k . С помощта на теоремата на L. Brouwer за неподвижната точка е установено съществуването на поне една точка $x_0 \in \Phi_k$ такава, че $x_0 = x(t_k; x_0)$. Това означава, че съответното решение е периодично с период t_k . Ще припомним, че периодичните решения на импулсните диференциални уравнения се използват при описание на повтарящи се процеси със скокообразни изменения. Този тип уравнения и съответните им решения са особено полезни при моделиране на биопроцеси и екопроцеси (виж [194], [208], [210], [221], [266], [281], [289], [291], [307] и [313]). В последния параграф на дисертацията е разгледана линеаризираната система на импулсен модел на Lotka-Volterra с променливи превключващи моменти. Установено е, че тази система притежава поне едно периодично решение.

§5. Неограничени моменти на превключване за системи автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси

Основен обект на изследване в параграф 5 е следната начална задача за системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \text{ м.е. } t_{i-1} < t < t_i; \quad (5.1)$$

$$x(t_i + 0) = J_i(x(t_i)), \quad \varphi_i(x(t_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (5.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (5.3)$$

където:

- Фазовото пространство G на разглежданата система е непразна област от R^n ;

- Функциите $f_i : G \rightarrow R^n$;
- Функциите $\varphi_i : G \rightarrow R$;
- Функциите $J_i : \Phi_i \rightarrow G$, където $\Phi_i = \{x \in G; \varphi_i(x) = 0\}$, $i = 1, 2, \dots$;
- Началната точка $x_0 \in G$.

Ще отбележим, че множествата Φ_i , $i = 1, 2, \dots$, се наричат превключващи. Решението на задачата (5.1), (5.2), (5.3) ще означаваме с $x(t; x_0)$. Изпълнено е:

1.1. При $0 = t_0 \leq t < t_1$ решението на разглежданата задача съвпада с решението $x_1(t; t_0, x_0)$ на задачата

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x), \quad x(t_0) = x_0 = x_0^+;$$

1.2. При $t_0 \leq t < t_1$ е изпълнено $\varphi_1(x(t; x_0)) = \varphi_1(x_1(t; t_0, x_0)) > 0$;

1.3. При $t = t_1$ имаме $\varphi_1(x(t_1; x_0)) = \varphi_1(x_1(t_1; t_0, x_0)) = \varphi_1(x_1) = 0$;

1.4. Валидно е равенството $x(t_1 + 0; x_0) = J_1(x(t_1; x_0)) = J_1(x_1(t_1; t_0, x_0^+)) = x_1^+$;

2.1. При $t_1 < t < t_2$ решението на задачата (5.1), (5.2), (5.3) съвпада с решението $x_2(t; t_1, x_1^+)$ на задачата

$$\frac{dx}{dt} = f_2(x), \quad x(t_1) = x_1^+;$$

2.2. При $t_1 < t < t_2$ е изпълнено $\varphi_2(x(t; x_0)) = \varphi_2(x_2(t; t_1, x_1^+)) > 0$;

2.3. При $t = t_2$ имаме $\varphi_2(x(t_2; x_0)) = \varphi_2(x_2(t_2; t_1, x_1^+)) = \varphi_2(x_2) = 0$;

2.4. При $t = t_2$ е валидно импулсното равенство $x(t_2 + 0; x_0) = J_2(x(t_2; x_0)) = J_2(x_2(t_2; t_1, x_1^+)) = x_2^+$ и т.н.

Времевите константи t_i , $i = 1, 2, \dots$, се наричат превключващи моменти. Въвеждаме означенията $x_i = x(t_i; x_0)$ и $x_i^+ = J_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$.

В произволен интервал на непрекъснатост от вида $t_{i-1} < t < t_i$ решението на задачата (5.1), (5.2), (5.3) стартира от точката $x_{i-1}^+ \in G$. В този интервал дясната страна на системата съвпада с функцията $f_i(x)$. В момента t_i , решението на разглежданата задача достига до превключващото множество Φ_i . В същия този момент t_i решението е подложено на импулсно въздействие. Това означава, че t_i е точка на прекъсване от първи род за функцията $x(t; x_0)$. Освен това, точно тогава се сменя дясната страна на системата. В следващия интервал на непрекъснатост на решението дясната страна на системата съвпада с функцията $f_{i+1}(x)$.

Въвеждаме условията:

H5.1. Функциите $f_i \in C[G, R^n]$, $i = 1, 2, \dots$.

H5.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in G) \Rightarrow \|f_i(x)\| \leq C_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H5.3. За всяка точка $x_0 \in G$ и за всяко $i=1,2,\dots$ решението $x_i(t; x_0)$ на началната задача

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad x(0) = x_0;$$

съществува и е единствено за $t \geq 0$.

H5.4. Съществуват константи $C_{Lip\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow |\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')| \leq C_{Lip\varphi_i} \|x' - x''\|, \quad i=1,2,\dots$$

H5.5. Съществуват константи $C_{J_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow |\varphi_{i+1}(J_i(x))| \geq C_{J_i}, \quad i=1,2,\dots$$

В този параграф можем да подчертаем следните теореми.

Теорема 5.1. Нека са изпълнени условията H5.1-H5.5.

Тогава, ако редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{J_i}}{C_{f_{i+1}} C_{Lip\varphi_{i+1}}}$ е разходящ, то моментите на превключване

за системата (5.1), (5.2) не притежават точка на съгъстяване.

В следващата теорема условието H5.4 ще заменим със следното условие.

H5.6. Съществуват константи $C_{\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in G) \Rightarrow |\varphi_i(x)| \leq C_{\varphi_i} \rho(x, \Phi_i), \quad i=1,2,\dots$$

Теорема 5.2. Нека са изпълнени условията H5.1, H5.2, H5.3, H5.5 и H5.6.

Тогава, ако редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{J_i}}{C_{f_i} C_{\varphi_i}}$ е разходящ, то моментите на превключване за

системата (5.1), (5.2) не притежават точка на съгъстяване.

В следващата теорема ще използваме следните условия.

H5.7. Съществуват константи $C_{D_i} > 0$ и области $D_i, \Phi_i \subset D_i \subset G$, такива, че

$$(\forall x \in \partial D_i \cap G) \Rightarrow |\varphi_i(x)| \geq C_{D_i}, \quad i=1,2,\dots$$

H5.8. Изпълнено е

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow J_i(x) \in G \setminus D_{i+1}, \quad i=1,2,\dots$$

Теорема 5.3. Нека са изпълнени условията H5.1, H5.2, H5.3, H5.6, H5.7 и H5.8.

Тогава, ако редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{D_i}}{C_{f_i} C_{\varphi_i}}$ е разходящ, то моментите на превключване за

системата (5.1), (5.2) не притежават точка на съгъстяване.

Като приложение на получените резултати в края на параграфа е разгледано импулсното уравнение на Gompertz. Показано е, че разглежданият математически модел удовлетворява условията на Теорема 5.1.

§6. Непрекъснати решения на системи автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси

Основен обект на изследване в параграф 6 е следната начална задача за системи автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \text{ m.e. } t_{i-1} < t < t_i; \quad (6.1)$$

$$x(t_i + 0) = J_i(x(t_i)), \quad \varphi_i(x(t_i)) = 0, \quad i=1,2,\dots; \quad (6.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (6.3)$$

където:

- Фазовото пространство G на системата (6.1), (6.2) е непразна област от R^n ;

- Функциите $f_i : G \rightarrow R^n$;
- Функциите $\varphi_i : D_i \rightarrow R$, където областите $D_i \subset G$ и $D_i \neq \emptyset$;
- Функциите $J_i : \Phi_i \rightarrow G \setminus D_{i+1}$, където $\Phi_i = \{x \in D_i; \varphi_i(x) = 0\}$;
- Началната точка $x_0 \in G$.

Решението на задачата (6.1), (6.2), (6.3) ще означаваме с $x(t; x_0)$.

За $i = 1, 2, \dots$, разглеждаме следните начални задачи за системи автономни диференциални уравнения с постоянна структура и без импулси:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad x(0) = x_{0i}. \quad (6.4)$$

Функциите $f_i : G \rightarrow R^n$, $i = 1, 2, \dots$, са елементи от дясната страна на системата с променлива структура (6.1). Началните точки $x_{0i} \in G$. Решенията на всяка една от началните задачи (6.4) ще означаваме съответно с $x_i(t; 0, x_{0i})$, $t \in R$, $i = 1, 2, \dots$.

При основните разглеждания ще изискваме да са валидни следните предположения:

Предположение 6.1. Всяко едно от множествата Φ_i е тотално положително достижимо чрез системата (6.4), $i = 1, 2, \dots$.

Предположение 6.2. Моментите на превключване $t_1, t_2, \dots$, където $0 < t_1 < t_2 < \dots$, не притежават точка на съгъстяване.

Нека е валидно Предположение 6.1. Тогава разглеждаме функциите $\Theta_i^+ : G \rightarrow R^+$, които за всяко $i = 1, 2, \dots$ дефинираме както следва ($\forall x_{0i} \in G$) ($\exists \theta = \Theta_i^+(x_{0i}) \in R^+$):

- $x_i(\theta; 0, x_{0i}) \in \Phi_i$,
- ($\forall t, 0 \leq t < \theta = \Theta_i^+(x_{0i})$) $\Rightarrow x_i(t; 0, x_{0i}) \notin \Phi_i$.

Предположение 6.3. Функциите $\Theta_i^+ \in C[G, R^+]$, $i = 1, 2, \dots$.

Въвеждаме условията:

Н6.1. Съществуват константи $C_{Lip f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|f_i(x') - f_i(x'')\| \leq C_{Lip f_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Н6.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in G) \Rightarrow \|f_i(x)\| \leq C_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Н6.3. За всяко $i = 1, 2, \dots$ решенията на системата (6.4) съществуват и са единствени в R .

Н6.4. За всяко $i = 1, 2, \dots$ решенията на системите (6.4) са равномерно Липшицово устойчиви.

Н6.5. Функциите $\varphi_i \in C[\overline{D_i}, R]$ и $\varphi_i \in C^1[\Phi_i, R]$, където множествата $\Phi_i = \{x \in D_i; \varphi_i(x) = 0\} \neq \emptyset$. Съществуват константи $C_{\langle grad \varphi_i, f_i \rangle} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow \langle grad \varphi_i(x), f_i(x) \rangle \geq C_{\langle grad \varphi_i, f_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Н6.6. Множествата Φ_i , $i = 1, 2, \dots$, са свързани.

Н6.7. Изпълнени са включванията $\overline{\Phi_i} \setminus \Phi_i \subset \partial G$, $i = 1, 2, \dots$.

Н6.8. Съществуват константи $C_{\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in D_i) \Rightarrow |\varphi_i(x)| \leq C_{\varphi_i} \cdot \rho(x, \Phi_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Н6.9. Съществуват константи $C_{Lip\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow |\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')| \leq C_{Lip\varphi_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Н6.10. Съществуват константи $C_{D_{i+1}} > 0$ такива, че:

$$(\forall x \in \partial D_{i+1} \cap G) \Rightarrow |\varphi_{i+1}(x)| \geq C_{D_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Н6.11. Функциите $J_i \in C[\Phi_i, G \setminus D_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots$

Н6.12. Областта G е ограничено-свързана.

Н6.13. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{D_{i+1}}}{C_{f_{i+1}} C_{Lip\varphi_{i+1}}}$ е разходящ.

Като следствие от параграф 4 ще формулираме следната теорема, в която са дадени достатъчни условия, при които е валидно Предположение 6.1.

Теорема 6.1. Нека са изпълнени условията Н6.1-Н6.8 и Н6.12.

Тогава всяко едно от множества Φ_i , $i = 1, 2, \dots$, е положително тотално достижимо чрез съответната система (6.4).

В горната теорема условие Н6.12 можем да заменим с условието.

Н6.14. Областта G е P -изпъкнала и ограничена.

Условия, при които е валидно Предположение 6.2, са дадени в параграф 5. Като следствие получаваме следната теорема.

Теорема 6.2. Нека са изпълнени условията Н6.1, Н6.2, Н6.3, Н6.5, Н6.9, Н6.10, Н6.11 и Н6.13.

Тогава, моментите на превключване за началната задача (6.1), (6.2), (6.3), независимо от началната точка $x_0 \in G$, не притежават точка на съгъстяване.

Следващата теорема е равносилна на Предположение 6.3. Получаваме я като следствие от параграф 3 и параграф 4.

Теорема 6.3. Нека са изпълнени условията Н6.1-Н6.8 и Н6.12.

Тогава $X_i^+ = G$ и функциите $\Theta_i^+ \in C[G, R^+]$, $i = 1, 2, \dots$

Дефиниция 6.1. [150]. Ще казваме, че решението $x(t; x_0)$ на задачата (6.1), (6.2), (6.3) зависи непрекъснато от началната точка, ако

$$(\forall x_0 \in G) (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) (\forall T = \text{const} > 0)$$

$$(\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon, \eta, T) > 0) : (\forall x_0^* \in G, \|x_0^* - x_0\| < \delta)$$

$$\Rightarrow \|x(t; x_0^*) - x(t; x_0)\| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |t - t_i| > \eta, \quad i = 1, 2, \dots$$

Ще обърнем внимание на специфична особеност на горната дефиниция за непрекъснатата зависимост. При разглеждания тип диференциални уравнения (по-конкретно с променливи импулсни моменти) различните решения срещат превключващите (достижимите) множества в различни моменти. С други думи, в общия случай са изпълнени неравенствата $t_1^* \neq t_1$, $t_2^* \neq t_2, \dots$. Това означава, че в отворените интервали с краища моментите t_i^* и t_i , $i = 1, 2, \dots$, едното решение е подложено на импулсно въздействие в левия край на интервала, а другото решение – в десния край. Следователно в общия случай двете решения не са "близки" в посочените интервали. Поради тази причина, в околности на импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$ с радиуси η не се изисква "близост" между тези две решения.

Основния резултат в този параграф е следната теорема.

Теорема 6.4. Нека са изпълнени условията Н6.1-Н6.13.

Тогава решението на задачата (6.1), (6.2), (6.3) зависи непрекъснато от началната точка.

§7. Периодични решения на системи автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси

Основен обект на изследване в параграф 7 е следната начална задача за системи автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \text{ m.e. } t_{i-1} < t < t_i; \quad (7.1)$$

$$x(t_i + 0) = J_i(x(t_i)), \quad \varphi_i(x(t_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (7.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (7.3)$$

където:

- Фазовото пространство G на разглежданата система е непразна област от R^n ;
- Функциите $f_i: G \rightarrow R^n$;
- Функциите $\varphi_i: D_i \rightarrow R$, където областите $D_i \subset G$ и $D_i \neq \emptyset$;
- Функциите $J_i: \Phi_i \rightarrow G \setminus D_{i+1}$, където $\Phi_i = \{x \in D_i; \varphi_i(x) = 0\}$;
- Началната точка $x_0 \in G$.

Решението на задачата (7.1), (7.2), (7.3) ще означаваме с $x(t; x_0)$. Разглеждаме множеството $(i = 1, 2, \dots)$ от следните начални задачи за системи автономни диференциални уравнения с постоянна структура и без импулси:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad x(0) = x_{0i}. \quad (7.4)$$

Функциите $f_i: G \rightarrow R^n$, $i = 1, 2, \dots$, са елементи (принадлежат) на дясната страна на системата с променлива структура (7.1). Началните точки $x_{0i} \in G$. Решенията на всяка една от началните задачи (7.4) ще означаваме съответно с $x_i(t; 0, x_{0i})$, $t \in R$, $i = 1, 2, \dots$.

Ще използваме условията:

H7.1. Съществуват константи $C_{Lip f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|f_i(x') - f_i(x'')\| \leq C_{Lip f_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots.$$

H7.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in G) \Rightarrow \|f_i(x)\| \leq C_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

H7.3. За всяко $i = 1, 2, \dots$ решенията на системата (7.4) съществуват и са единствени в R .

H7.4. За всяко $i = 1, 2, \dots$ решенията на системите (7.4) са равномерно Липшицово устойчиви.

H7.5. Функциите $\varphi_i \in C^1[D_i, R]$. Множествата $\Phi_i = \{x \in D_i; \varphi_i(x) = 0\} \neq \emptyset$.

Съществуват константи $C_{\langle grad \varphi_i, f_i \rangle} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow \langle grad \varphi_i(x), f_i(x) \rangle \geq C_{\langle grad \varphi_i, f_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

H7.6. Множествата Φ_i , $i = 1, 2, \dots$, са свързани.

H7.7. Изпълнени са включванията $\overline{\Phi_i} \setminus \Phi_i \subset \partial G$, $i = 1, 2, \dots$.

H7.8. Съществуват константи $C_{\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in D_i) \Rightarrow |\varphi_i(x)| \leq C_{\varphi_i} \cdot \rho(x, \Phi_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

H7.9. Съществуват константи $C_{Lip\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow |\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')| \leq C_{Lip\varphi_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots$$

H7.10. Съществуват константи $C_{D_{i+1}} > 0$ такива, че:

$$(\forall x \in \partial D_{i+1} \cap G) \Rightarrow |\varphi_{i+1}(x)| \geq C_{D_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H7.11. Функциите $J_i \in C[\Phi_i, G \setminus D_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots$

H7.12. Областта G е ограничено-свързана.

H7.13. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{D_{i+1}}}{C_{f_{i+1}} C_{Lip\varphi_{i+1}}}$ е разходящ.

Най-важните резултати в цялата дисертация се съдържат в следните две теореми.

Теорема 7.1. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H7.1-H7.13.
2. Съществува множество H такова, че:
 - 2.1. H е затворено и $H \subset G$;
 - 2.2. $(\forall x_0 \in H)(\forall t \in R^+) \Rightarrow x(t; x_0) \in H$.
 - 2.3. $(\exists k \in N)$ такова, че множеството $H \cap \Phi_k$ е изпъкнало.

Тогава $(\exists x_0 \in H \cap \Phi_k) : x(t_k; x_0) = x_0$.

Въвеждаме условието.

H7.14. Областта G е P -изпъкнала и ограничена.

Като следствие от горната Теорема 7.1, ще формулираме условия за съществуване на периодично решение на основната задача (7.1), (7.2), (7.3).

Теорема 7.2. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията на Теорема 7.1.
2. Валидни са равенствата:

$$f_{i+k}(x) = f_i(x), \quad x \in G; \quad D_{i+k} = D_i; \quad \varphi_{i+k}(x) = \varphi_i(x), \quad x \in D_i; \quad J_{i+k}(x) = J_i(x), \quad x \in \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots$$
3. Валидно е равенството $J_k(x) = x$ при $x \in \Phi_k$.

Тогава съществува начална точка $x_0 \in H \cap \Phi_k$ такова, че решението на задачата (7.1), (7.2), (7.3) е периодично с период t_k .

В края на параграф 7 получените резултати са приложени върху линеаризиран модел на импулсната система на Lotka-Volterra. Импулсните въздействия се извършват само върху жертвата и се състоят в дискретни отнемания на част от нейната биомаса. Превключващите множества са еднотипни и са избрани така, че биомасата на жертвата да е максимална при достигането им от траекторията на системата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящия дисертационен труд са получени следните по-важни резултати:

1. Изследвани са начални задачи за системи автономни диференциални уравнения. Въведени са и са изследвани понятията:
 - достижимо множество (отрицателно, положително и тотално);
 - начално множество на достижимост;
 - функция на достижимост и др;
 - интегрални многообразия, съответни на множествата на достижимост.
 Получени са достатъчни условия, при които:

- началните множества на достижимост съществуват;
 - началните множества на достижимост са отворени и свързани;
 - функцията на достижимост е непрекъсната и ограничена;
 - интегралните многообразия, които са съответни на множествата на достижимост, притежават специфични топологични качества.
2. Изследвани са начални задачи за системи автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Намерени са достатъчни условия, при които:
 - превключващите моменти на всяко решение не притежават точка на съгъстяване и максималният интервал на съществуване е неограничен;
 - решенията зависят непрекъснато от началните условия;
 - системите автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси притежават поне едно периодично решение.
 3. Получените теоретични резултати са приложени върху конкретни математически модели:
 - класически модел на Lotka-Volterra от популационната динамика;
 - импулсен модел на Lotka-Volterra с променливи моменти на превключване;
 - класически модел на Volterra-Gause-Witt от популационната динамика;
 - модел на R. Miller, описващ взаимодействието на съревноваващи се видове в обща хранителна среда;
 - класически модел на Gompertz, моделиращ развитието на изолирана популация;
 - класически модел на осцилатор в изолирана среда.

ДЕКЛАРАЦИЯ

1. Резултатите и сведенията от увода са предварителни и се основават на различни литературни източници, които са надлежно посочени.
2. Резултати от параграфите с номера: 1 и 2 са публикувани в две научни статии. В авторския колектив на всяка една от тях участва гл. ас. Андрей Радославов Антонов. Списъкът на тези публикации е даден непосредствено след настоящата декларация.
3. Резултатите в останалите пет параграфа са нови и се публикуват за първи път тук.

СПИСЪК

на публикации по дисертационния труд

1. Petkova S., Antonov A., Chukleva R., Reachable sets for homogenous systems of differential equations and their topological properties, American J. of Applied Mathematics, Vol. 1, № 4, (2013), 49-54.
2. Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., A class of integral manifolds for autonomous systems of differential equations, German J. of Advanced Mathematical Sciences, Vol. 1, № 1, (2013), 11-19.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Андронов А., Витт А., Хайкин С., Теория колебаний, Наука, Москва, (1981).
2. Анохин А., О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений, ДАН СССР, Том 286, № 5, (1986), 1037-1040.
3. Афанасьев В., Колмановский В., Носов В., Математическая теория конструирования систем управления, Высшая школа, Москва, (1999).
4. Бабицкий В., Крупенин В., Колебания в сильно нелинейных системах, Наука, Москва, (1985).
5. Баутин Н., Теория точечных преобразований и динамическая теория часов, Труды ICNO V, АН УССР, Киев, Том 2, (1963), 29-54.
6. Боголюбов Н., Митропольский Ю., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Наука, Москва, (1974).
7. Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях, Научова думка, Москва, (1988).

8. Борисенко С., Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсными воздействиями, Украинский Математический Журнал, Том 35, № 2, (1983), 144-150.
9. Борисенко С., Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсными воздействиями, Дифференциальные Уравнения, Том 22, № 5, (1986), 884-886.
10. Гургула С., Перестюк Н., Об второго метода Ляпунова для систем с импульсными воздействиями, Доклады АН Укр. ССР, Сер. А, Том 10, (1982), 11-14.
11. Завалицин С., Сесекин А., Дрозденко С., Динамические системы с импульсной структурой, Средне Урал. кн. Изд-во, Свердловск, (1983).
12. Завалицин С., Сесекин А., Импульсные процессы: Модели и приложения, Наука, Москва, (1991).
13. Калигин Б., О колебаниях маятника с ударными импульсами, Дифференциальные Уравнения, Том 5, № 7, (1969), 1267-1274.
14. Калигин Б., О колебаниях маятника с ударными импульсами, часть 2, Дифференциальные Уравнения, Том 6, № 12, (1970), 2174-2181.
15. Калигин Б., О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением, Дифференциальные Уравнения, Том 7, № 3, (1971), 540-542.
16. Каранджулов Л., Стоянова Я., Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, Весці НАН Беларусі, Том 2, (2003), 59-65.
17. Каранджулов Л., Стоянова Я., Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, Дифференциальные Уравнения, Том 40, № 3, (2004), 310-323.
18. Кобринский А. А., Выброударные системы, Наука, Москва, (1973).
19. Козлов Р., К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, Дифференциальные Уравнения, Том 10, № 7, (1974), 1264-1275.
20. Крылов Н., Боголюбов Н., Введение в нелинейную механику, Изд-во УССР, Киев, (1937).
21. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, Дифференциальные Уравнения, Том 3, № 3, (1967), 395-409.
22. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями II, Дифференциальные Уравнения, Том 3, № 5, (1967), 869-878.
23. Мильман В., Мышкис А., Об устойчивости движения при наличии толчков, Сибирский Математический Журнал, Том 1, № 2, (1960), 233-237.
24. Мильман В., Мышкис А., Случайные толчки в линейных динамических системах, Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, Киев, Изд-во АН УССР, (1963), 64-81.
25. Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью, Институт математики НАН Украины, Киев, (2007).
26. Плотников В., Китанов Н., Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления, Кибернетика и системный анализ, Том 5, (2002), 71-85.
27. Плотников В., Китанов П., Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами, Украинский Математический Журнал, Том 49, № 11, (1997), 1504-1511.
28. Плотников В., Плотникова Л., Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами, Украинский Математический Журнал, Том 47, № 11, (1995), 1526-1532.
29. Попов Е., Динамика систем автоматического регулирования, Гостехиздат, Москва, (1964).
30. Рожко В., Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах, Дифференциальные Уравнения, Том 11, № 6, (1975), 1005-1012.
31. Самойленко А., Перестюк Н., Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями, Дифференциальные Уравнения, Том 10, № 11, (1974), 2001-2010.
32. Самойленко А., Перестюк Н., Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями, Вища шк., Киев, (1987).
33. Самойленко А., Перестюк Н., О методе усреднения в системах с импульсными воздействиями, Украинский Математический Журнал, Том 24, № 3, (1974), 411-418.
34. Самойленко А., Перестюк Н., Трофимчук С., Проблема "биений" в импульсных системах, Институт математики АН УССР, Киев, (1990).
35. Самойленко А., Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, Украинский Математический Журнал, Том 13, № 3, (1961), 85-94.
36. Филатов А., Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, "ФАН", Узбекской ССР, Ташкент, (1971).
37. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях, Дифференциальные Уравнения, Том 15, № 10, (1979), 1814-1823.
38. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Наука, Москва, (1985).
39. Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, Мир, Москва, (1971).
40. Хатсон В., Пим Д., Приложения функционального анализа и теории операторов, Мир, Москва, (1983).
41. Цыпкин Я., Критерии абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента, ДАН СССР, Том 155, № 5, (1964), 1029-1032.
42. Черноусько Ф., Акуленко Л., Соколов Б., Управление колебаниями, Наука, Москва, (1980).
43. Agarwal R., Franco D., O'Regan D., Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations, Equations Mathematicae, Vol. 69, № 1-2, (2005), 83-96.
44. Agarwal R., O'Regan D., A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem, Applied Mathematics and Computation, Vol. 161, № 2, (2003), 433-449.
45. Agarwal R., O'Regan D., Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, Applied Mathematics and Computation, Vol. 114, № 1, (2000), 51-59.
46. Ahmad B., Sivasundaram S., Dynamics and stability of impulsive hybrid setvalued integro-differential equations with delay, Nonlinear Analysis, Vol. 65, № 11, (2006), 2289-2293.

47. Ahmad B., Sivasundaram S., *Instability criteria for impulsive hybrid state dependent delay integrodifferential systems*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 11, № 2, (2010), 750-758.
48. Ahmad B., Sivasundaram S., *The monotone iterative technique for impulsive hybrid set valued integro-differential equations*, *Nonlinear Analysis*, Vol. 65, № 12, (2006), 2260-2276.
49. Ahmad S., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E., *Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 290, № 2, (2004), 436-451.
50. Ahmad S., Stamov G., *Almost periodic solutions of N-dimensional impulsive competitive systems*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 10, № 3, (2009), 1846-1853.
51. Ahmad S., Stamova I., *Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 69, № 3, (2008), 786-795.
52. Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., *An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 7, № 5, (2006), 1255-1267.
53. Akhmet M., *On the smoothness of solutions of impulsive autonomous system*, *Nonlinear Analysis*, Vol. 60, № 2, (2005), 311-324.
54. Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., *Control over linear pulse systems*, *Ukrainian Mathematical J.*, Vol. 47, № 3, (1995), 360-368.
55. Alessandrini G., Vessella S., *Lipschitz stability for the inverse conductivity problem*, *Advances in Applied Mathematics*, Vol. 35, № 2, (2005), 207-241.
56. Alzabut J., *Existence of periodic solutions of a type of nonlinear impulsive delay differential equations with a small parameter*, *J. of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 15, (2008), 13-21.
57. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., *I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model*, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 43, № 10-11, (2002), 1203-1218.
58. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., *Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model*, *International J. of Differential Equations and Applications*, Vol. 3, № 4, (2000), 7-18.
59. Angelova J., Dishliev A., *Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 39, № 4, (2000), 483-497.
60. Angelova J., Dishliev A., *Optimization problems in population dynamics*, *Applicable Analysis*, Vol. 69, № 3&4, (1999), 207-221.
61. Anokhin A., Berezansky L., Braverman E., *Exponential stability of linear delay impulsive differential equations*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 193, (1995), 923-941.
62. Baek H., *Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies*, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008), Article ID 752403.
63. Bailey J., Shafer S., *A simple analytical solution to the three-compartment pharmacokinetic model suitable for computer-controlled infusion pumps*, *Biomedical Engineering*, Vol. 38, № 6, (1991), 522-525.
64. Bainov D., Covachev V., *Impulsive differential equations with a small parameter*, *World Scientific*, Singapore, (1994).
65. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations*, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, Vol. 12, № 2, (1991), 149-161.
66. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 187, № 3, (1994), 790-808.
67. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument*, *Kodai Mathematical J.*, Vol. 20, № 2, (1997), 120-126.
68. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument*, *Applicable Analysis*, Vol. 63, № 3&4, (1996), 287-297.
69. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument*, *J. of Applied Analysis*, Vol. 4, № 2, (1998), 215-230.
70. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillation of the bounded solutions of impulsive differential-difference equations of second order*, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 114, № 1, (2000), 61-68.
71. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument*, *J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, Vol. 11, № 1, (1998), 95-102.
72. Bainov D., Dimitrova M., Petrov V., *Oscillatory properties of solutions of impulsive differential equations with several retarded argument*, *Georgian Mathematical J.*, Vol. 5, № 3, (1998), 201-212.
73. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *An application of the method of quasilinearization for a periodic problem for systems of nonlinear differential equations*, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, Tome 50, № 11-12, (1997), 21-22.
74. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations*, *Multivariate Approximation and Splines*, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.
75. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations*, *Indian J. of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 30, № 9, (1999), 893-910.
76. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamic control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 24, № 6, (1990), 681-692.
77. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences*, Tome 42, № 12, (1989), 29-32.
78. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 39, № 1, (1990), 37-48.
79. Bainov D., Dishliev A., Stamov G., *Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations*, *Kumamoto J. of Mathematics*, Vol. 10, (1997), 1-10.
80. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations*, *Annali dell'Università di Ferrara, Sez. VII-Sc. Mat.*, Vol. 41, (1995), 45-54.
81. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Lipschitz quasistability of impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations*, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 70, № 2, (1996), 267-277.

82. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics, ANZIAM J., Vol. 43, (2002), 525-539.
83. Bainov D., Dishliev A., Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, International J. Systems Science, Vol. 21, № 12, (1990), 2637-2643.
84. Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., Partial averaging for impulsive differential equations with supremum, Georgian Mathematical J., Vol. 3, № 1, (1996), 11-26.
85. Bainov D., Hristova S., The method of quasilinearization for the periodic boundary value problem for systems of impulsive differential equations, Applied Mathematics and Computation, Vol. 117, №1, (2001), 73-85.
86. Bainov D., Hristova S., Hu S., Lakshmikantham V., Periodic boundary value problems for systems of first order impulsive differential equations, Differential and Integral Equations Vol. 2, № 1, (1989), 37-43.
87. Bainov D., Kolev D., Nakagawa K., The control of the blowing-up time for the solution of the semilinear parabolic equation with impulsive effect, J. of the Korean Mathematical Society, Vol. 37, № 5, (2000), 793-802.
88. Bainov D., Kostadinov S., Minh N., Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations, Science Culture Technology Publishing, (1994).
89. Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations, International J. of Theoretical Physics, Vol. 36, № 2, (1996), 383-393.
90. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., L_p -equivalence of linear and nonlinear impulsive differential equations in a Banach space, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Vol. 36, (1992), 17-33.
91. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space, International J. of Theoretical Physics, Vol. 28, № 7, (1989), 797-814.
92. Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument, J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 194, № 3, (1995), 612-639.
93. Bainov D., Kulev G., Stamova I., Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations, SUT J. of Mathematics, Vol. 1, (1995), 55-71.
94. Bainov D., Kulev G., Stamova I., Instability of solutions of impulsive systems of differential equations, International J. of Theoretical Physics, Vol. 35, № 8, (1996), 1799-1804.
95. Bainov D., Milusheva S., Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses, J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 95, № 1, (1983), 85-105.
96. Bainov D., Milusheva S., Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 32, (1981), 237-254.
97. Bainov D., Nenov S., Limit sets of impulsive dynamical systems, Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations, (1994), 31-34.
98. Bainov D., Simeonov P., Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions, World Scientific, Singapore, (1995).
99. Bainov D., Simeonov P., Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1993).
100. Bainov D., Simeonov P., Integral inequalities and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
101. Bainov D., Simeonov P., Oscillation theory of impulsive differential equations, International Publications, FL, (1998).
102. Bainov D., Simeonov P., System with impulse effect: Stability theory and applications, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
103. Ballinger G., Liu X., Permanence of population growth model with impulsive effects, Mathematics and Computer Modeling, Vol. 26, № 12, (1997), 59-72.
104. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Impulsive differential equations and inclusions, Contemporary Mathematics and its Applications, Hindawi Publishing Corporations, Vol. 2, (2006).
105. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces, Applicable Analysis, Vol. 80, № 3, (2001), 353-365.
106. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., Impulsive functional differential equations with variable times, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 47, № 10-11, (2004), 1659-1665.
107. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay, International J. of Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, № 1, (2005), 130-148.
108. Benchohra M., Ouahab A., Impulsive neutral functional differential equations with variable times, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Vol. 55, № 6, (2003), 679-693.
109. Berezansky L., Braverman E., On Impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications, J. of Differential Equations and Applications, Vol. 10, № 9, (2004), 851-868.
110. Branicky M., Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, Automatic Control, IEEE Transactions on, Vol. 43, № 4, (1998), 475-482.
111. Braverman E., Mamdani R., Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment, J. of Mathematical Biology, Vol. 57, № 3, (2008), 413-434.
112. Chellaboina V., Bhat S., Haddad W., An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems, Nonlinear Analysis, Vol. 53, № 3-4, (2003), 527-550.
113. Chen G., Shen J., Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A, Vol. 14, (2007), 177-188.
114. Chen J., Tisdell C., Yuan R., On the solvability of periodic boundary value problems with impulse, J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 331, № 2, (2007), 902-912.
115. Chen S., Qi J., Jin M., Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 46, № 8-9, (2003), 1281-1287.
116. Chérif F., Pseudo almost periodic solutions of impulsive differential equations with delay, Differential Equations and Dynamical Systems, Vol. 21, № 1, (2013), DOI 10.1007/s 12591-012-0156-0.
117. Chu J., Nieto J., Impulsive periodic solutions of first-order singular differential equations, Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 40, № 1, (2008), 143-150.

118. Chua L., Yang L., *Cellular neural networks: Applications, Circuits and Systems*, IEEE Transactions on, Vol. 35, (1988), 1273-1290.
119. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses in respect of switching functions* International J. of Applied Science and Technology, Vol. 1, № 5, (2011), 46-59.
120. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions*, International J. of Differential Equations and Applications, Vol. 11, № 1, (2012), 57-80.
121. Chukleva R., Dishliev A., *On the continuous dependence of the switching moments of trajectories*, Proceedings of the Jubilee Scientific Conference with International Participation Dedicated to the, 50th Anniversary of the Smolyan Branch of Plovdiv University, Vol. 2, Part 2, (2012), 75-80.
122. Chukleva R., Dishlieva K., Dishliev A., *Continuous dependence of dying solutions of systems differential equations with variable structure and impulses*, J. of Advanced Research on Scientific Computing, Vol. 5, № 3, (2013), 11-21.
123. Chukleva R., *Modeling using differential equations with variable structure and impulses*, International J. of Pure and Applied Mathematics, Vol. 72, № 3, (2011), 343-364.
124. Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).
125. Cook C., Kroll J., *The existence of periodic solutions to certain impulsive differential equations*, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 44, № 5-6, (2002), 667-676.
126. Cordova-Lepe F., *Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics*, Biomat 2006, International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
127. D'onofrio A., *Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model*, Mathematical Biosciences, Vol. 179, № 1, (2002), 57-72.
128. Dai B., Su H., Hu D., *Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Vol. 70, № 1, (2009), 126-134.
129. Dannan F., Elaydi S., *Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations*, J of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 113, (1986), 562-577.
130. DeCarlo R., Zak S., Matthews G., *Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial*, Proceedings on the IEEE, Vol. 76, № 3, (1988), 212-232.
131. Dimov H., Nenov S., Petkova S., *Continuous dependence of the solutions of impulsive dynamical systems from the initial conditions*, J. of the University of Chemical Technology and Metallurgy, Vol. 36, № 1, (2001), 103-112.
132. Dimov H., Nenov S., *Some features of uncontinuable solutions of impulsive dynamical systems*, Extracta Mathematicae, Vol. 11, № 3, (1996), 443-456.
133. Ding W., Mi J., Han M., *Periodic boundary value problems for the first order impulsive functional differential equations*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 165, № 2, (2005), 433-446.
134. Dishliev A., Bainov D., *Conditions for the absence of the phenomenon "beating" for systems of impulse differential equations*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, Vol. 13, № 3, (1985), 237-256.
135. Dishliev A., Bainov D., *Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces*, J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 135, № 2, (1988), 369-382.
136. Dishliev A., Bainov D., *Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the initial condition and a parameter in the presence of beating*, International J. of Systems Science, Vol. 19, № 5, (1988), 669-682.
137. Dishliev A., Bainov D., *Continuous dependence on the initial condition of the solution of a system of differential equations with variable structure and with impulses*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University, Vol. 23, № 6, (1987), 923-936.
138. Dishliev A., Bainov D., *Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure*, International J. of Theoretical Physics, Vol. 29, № 6, (1990), 655-675.
139. Dishliev A., Bainov D., *Differentiability on a parameter and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses*, Österreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Wien, Band 196, Heft 1-3, (1987), 69-96.
140. Dishliev A., Bainov D., *Investigation of the Lipschitz stability via limiting equations*, Dynamics and Stability of Systems, Vol. 5, № 2, (1990), 59-64.
141. Dishliev A., Bainov D., *Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with impulses*, Applicable Analysis, Vol. 18, № 1&2, (1984), 67-73.
142. Dishliev A., Bainov D., *Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations*, International J. of Theoretical Physics, Vol. 31, № 2, (1992), 363-372.
143. Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments*, International J. of Pure and Applied Mathematics, Vol. 70, № 1, (2011), 39-64.
144. Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right-hand side*, Communications in Applied Analysis, Vol. 10, № 2, (2006), 149-159.
145. Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., *Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications*, Academic Publications, Ltd. (2011).
146. Dishliev A., Dishlieva K., *Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations*, International J. of Pure and Applied Mathematics, Vol. 70, № 2, (2011), 167-187.
147. Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves*, Acta Mathematica Scientia, Vol. 32, № 3, (2012), 1035-1052.
148. Dishlieva K., *Differentiability of solutions of impulsive differential equations with respect to the impulsive perturbations*, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications, Vol. 12, № 6, (2011), 3541-3551.
149. Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., *A class of integral manifolds for autonomous systems of differential equations*, German J. of Advanced Mathematical Sciences, Vol. 1, № 1, (2013), 11-19.
150. Dishlieva K., Dishliev A., Chukleva R., Petkova S., *Continuous dependence on the impulsive effects of dying solutions of systems differential equations with variable structure and impulses*, European J. of Mathematical Sciences, Vol. 2, № 2, (2013), 215-228.

151. Dishlieva K., Dishliev A., Girginov C., Petkova S., Continuous dependence in case of permanent active effects on the partially bounded solutions of differential equations with variable structure, *J. of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, Vol. 5, № 2, (2013), 16–33.
152. Dishlieva K., Dishliev A., Limitations of the solutions of differential equations with variable structure and impulses using sequences of Lyapunov functions, *J. of Advanced Research in Applied Mathematics*, Vol. 5, № 2, (2013), 39-52.
153. Dishlieva K., Dishliev A., Petkova S., Death of the solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, *International J. of Differential Equations and Applications*, Vol. 11, № 3, (2012), 169-181.
154. Dishlieva K., Impulsive differential equations and applications, *J. Applied & Computational Mathematics*, Vol. 1, № 6, (2012), 1-3.
155. Dong L., Chen L., Shi P., Periodic solutions for a two-species nonautonomous competition system with diffusion and impulses, *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 32, № 5, (2007), 1916-1926.
156. Dong L., Sun L., Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 8, № 2, (2007), 572-578.
157. Dou J., Lu L., Optimal control for periodic ecosystem with impulsive harvest, *2011 International Conference on Agricultural and Biosystems Engineering, Advances in Biomedical Engineering*, Vol. 1-2, (2011), 87-90.
158. Elaydi S., Yakubu A., Global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking, *J. Difference Equations and Applications*, Vol. 8, № 6, (2002), 537-549.
159. Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth, *The J. of Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, Vol. 32, (1991), 382-400.
160. Feng C., Huang Z., Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
161. Fenner L., Pinto M., On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect, *Nonlinear Analysis*, Vol. 38, № 3, (1999), 307-325.
162. Filippov A., *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1988).
163. Franco D., Nieto J., Maximum principles for periodic impulsive first order problems, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 88, № 1, (1998), 149-159.
164. Frigon M., O'Regan D., First order impulsive initial and periodic problems with variable moments, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 233, № 2, (1996), 730-739.
165. Frigon M., O'Regan D., Impulsive differential equations with variable times, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 26, № 12, (1996), 1913-1922.
166. Frigon M., O'Regan D., Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, Vol. 8, № 2, (2001), 149-159.
167. Fu X., Li X., Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time, *Mathematics and Computer Modeling*, Vol. 48, № 5-6, (2008), 776-786.
168. Gao S., Chen L., Nieto J., Torres A., Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, *Vaccine*, Vol. 24, № 35-36, (2006), 6037-6045.
169. Gao S., Teng Z., Nieto J., Torres A., Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay, *J. of Biotechnology*, (2007), Article ID 64870.
170. Gao W., Hung, J., Variable structure control of nonlinear systems: a new approach, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Vol. 40, № 1, (1993), 45-55.
171. Georgieva A., Kostadinov S., L_p -equivalence of impulsive differential equations, *SUT J. of Mathematics*, Vol. 33, № 2, (1997), 291-301.
172. Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the L_p -equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, *Turkish J. of Mathematics*, Vol. 32, (2008), 451-466.
173. Girginov C., Petkova S., Zahariev A., Breakdown phenomena during anodization of aluminum in galvanostatic and voltastatic regimes, *Bulletin of Electrochemistry*, Vol. 22, № 7, (2006), 325-328.
174. Gladilina R., Ignatyev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, *International Applied Mechanics*, Vol. 44, № 2, (2008), 228-237.
175. Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, *Rocky Mountain J. of Mathematics*, Vol. 26, № 1, (1996), 165-173.
176. Gopalsamy K., *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1992).
177. Gopalsamy K., Zhang B., On delay differential equations with impulses, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 139, № 1, (1989), 110-122.
178. Guo H., Chen L., Time-limited pest control of a Lotka-Volterra model with impulsive harvest, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 10, № 2, (2009), 840-848.
179. Hartman F., *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).
180. He Z., He X., Periodic boundary value problems for first order impulsive integro-differential equations of mixed type, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 296, № 1, (2004), 8-20.
181. He Z., Yu J., Periodic boundary value problem for first-order impulsive functional differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 138, № 2, (2002), 205–217.
182. He Z., Yu J., Periodic boundary value problem for first-order impulsive ordinary differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 272, № 1, (2002), 67-78.
183. Henderson J., Thompson H., Smoothness of solutions for boundary value problems with impulse effects, II, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 223, № 10, (1996), 61-69.
184. Hristova S., Bainov D., Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations, *Rocky Mountain J. of Mathematics*, Vol. 23, № 2, (1993), 609-618.
185. Hristova S., Kulev G., Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 132, № 2, (2001), 399-407.
186. Hristova S., Roberts L., Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 34, № 7-8, (2001), 839-847.

187. Hristova S., Stefanova K., Practical Stability of Impulsive Differential Equations with "Supremum" by Integral Inequalities, *European J. of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 5, № 1, (2012), 30-44.
188. Hung J., Gao W., Hung J., Variable structure control: a survey, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Vol. 40, № 1, (1993), 2-22.
189. Huo H-F., Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 48, № 12, (2004), 1833-1846.
190. Ignatyev A., On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 69, № 1, (2008), 53-72.
191. Jia J., Li C., A predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195.
192. Jiao J., Chen L., Cai S., Dynamical analysis on a single population model with state-dependent impulsively unilateral diffusion between two patches, *Advances in Difference Equations*, (2012), 2012:155 Doi: 10.1186/1687-1847-2012-155.
193. Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 29, № 5, (2008), 653-663.
194. Jin Z., Zhen M., Maoan H., The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competitions system with impulsive, *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 22, № 1, (2004), 181-188.
195. Juang G., Lu Q., Impulsive state feedback control of a predator-prey model, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 200, № 1, (2007), 193-207.
196. Juang G., Lu Q., The dynamics of a prey-predator model with impulsive state feedback control, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B*, Vol. 6, (2006), 1310-1320.
197. Klibanov M., Yamamoto M., Lipschitz stability of an inverse problem for an acoustic equation, *Applicable Analysis*, Vol. 85, № 5, (2006), 515-538.
198. Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator, *Rostocker Mathematisches Kolloquium*, Vol. 53, (1999), 51-59.
199. Kulev G., Bainov D., Global stability of sets for systems with impulses, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 29, № 3, (1989), 255-270.
200. Kulev G., Bainov D., On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct methods, *Dynamics and Stability of Systems*, Vol. 110, № 3, (1990), 149-162.
201. Kulev G., Bainov D., Stability of sets for systems with impulses, *Tamkang J. of Mathematics*, Vol. 19, № 2, (1988), 13-22.
202. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
203. Lakshmikantham V., Liu X., Stability for impulsive differential systems in terms of two measures, *Applied Mathematics and Computations*, Vol. 29, № 1, (1989), 89-98.
204. Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., Hybrid systems with time scales and impulses, *Nonlinear Analysis*, Vol. 65, № 11, (2006), 2147-2152.
205. Li J., Nieto J., Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 325, № 1, (2007), 226-236.
206. Li J., Shen J., Periodic boundary value problems for delay differential equations with impulses, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 193, № 2, (2006), 563-573.
207. Li W.-T., Huo H.-F., Existence and global attractivity of positive periodic solutions of functional differential equations with impulses, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 59, № 6, (2004), 857-877.
208. Li W.-T., Huo H.-F., Global attractivity of positive periodic solutions for an impulsive delay periodic model of respiratory dynamics, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 174, № 2, (2005), 227-238.
209. Li X., Lin X., Jiang D., Zhang X., Existence and multiplicity of positive periodic solutions to functional differential equations with impulse effects, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 62, № 4, (2005), 683-701.
210. Li Y., Lu L., Global exponential stability and existence of periodic solution of Hopfield-type neural networks with impulses, *Physics Letters A*, Vol. 333, № 1-2, (2004), 62-71.
211. Li Y., Lu L., Zhu X., Existence of periodic solutions in n-species food-chain system with impulsive, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 7, № 3, (2006), 414-431.
212. Li Y., Positive periodic solutions of nonlinear differential systems with impulses, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 68, № 8, (2008), 2389-2405.
213. Li Y., Xing W., Existence of positive periodic solution of a periodic cooperative model with delays and impulses, *International J. of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 2006, (2006), Article ID 38617.
214. Lin D., Hui J., The best dosage scheme on multiple rapid vein injection, *J. of Biological Systems*, Vol. 15, № 3, (2007), 355-364.
215. Liu B., Teng Z., Liu W., Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations, *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 31, № 2, (2007), 356-370.
216. Liu B., Zhang Y., Chen L., The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning integrated pest management, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2005), Vol. 6, № 2, (2005), 227-243.
217. Liu L., Ye Y., Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses, *International J. of Computational and Mathematical Sciences*, Vol. 5, № 4, (2011), 229-235.
218. Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y., Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 271, № 1, (2002), 124-188.
219. Liu X., Chen L., Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator, *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 16, № 3, (2003), 11-20.
220. Liu X., Chen L., Global behaviors of a generalized periodic impulsive logistic system with nonlinear density dependence, *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 10, № 3, (2005), 329-340.
221. Liu X., Chen L., Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 289, № 1, (2004), 279-291.
222. Liu X., Li G., Luo G., Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 325, № 1, (2007), 715-723.

223. Liu Y., Ge W., Stability theorems and existence results for periodic solutions of nonlinear impulsive delay differential equations with variable coefficients, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 57, № 3, (2004), 363-399.
224. Luo Z., Shen J., Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 22, № 2, (2009), 163-169.
225. Meng X., Chen L., Li Q., The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 198, № 1, (2008), 361-374.
226. Meng X., Chen L., Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays, *International J. of Biomathematics*, Vol. 1, № 2, (2008), 179-196.
227. Meng X., Jiao J., Chen L., The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 9, № 2, (2008), 1255-1267.
228. Meng X., Li Z., Nieto J., Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment, *J. of Mathematical Chemistry*, Vol. 47, № 1, (2010), 123-144.
229. Milev N., Bainov D., Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, Vol. 31, № 2, (1992), 353-361.
230. Milev N., Bainov D., Roach G., Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 11, № 2, (1989), 271-278.
231. Milev N., Bainov D., Stability of linear impulsive differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 20, № 12, (1990), 35-41.
232. Miller R., Pattern and process in competition, *Advances in Ecological Research*, Vol. 4, (1976), 1-74.
233. Milusheva S., Bainov D., Justification of the averaging method for a class of functional-differential equations with impulses, Vol. s2-25, № 2, (1982), 309-331.
234. Naulin R., Pinto M., Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 208, № 2, (1997), 281-297.
235. Nenov S., Bainov D., Impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations*, (1992), 145-166.
236. Nenov S., Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics, *Nonlinear Analysis*, Vol. 36, № 7, (1999), 881-890.
237. Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 224, № 2, (2009), 544-555.
238. Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator, *BioSystems*, Vol. 98, № 2, (2009), 67-72.
239. Nieto J., Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 205, № 2, (1997), 423-433.
240. Nieto J., Impulsive resonance periodic problems of first order, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 15, № 4, (2002), 489-493.
241. Nieto J., O'Regan D., Variational approach to impulsive differential equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 10, № 2, (2009), 680-690.
242. Nieto J., Rodríguez-López R., Boundary value problems for a class of impulsive functional equations, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 55, № 12, (2008), 2715-2731.
243. Nieto J., Rodríguez-López R., Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 318, № 2, (2006), 593-610.
244. Paden B., Sastry S., A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators, *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, Vol. 34, № 1, (1987), 73-82.
245. Pandit S., Deo S., Differential systems involving impulses, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
246. Perestyuk M., Chernikova O., Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations, *Ukrainian Mathematical J.*, Vol. 60, № 1, (2008), 91-107.
247. Petkova S., Antonov A., Chukleva R., Reachable sets for homogenous systems of differential equations and their topological properties, *American J. of Applied Sciences*, Vol. 1, № 4, (2013), 49-54.
248. Petkova S., Girginov C., Petkov T., Electrical breakdowns during formation of anodic oxide films on aluminum, *Advances in Natural Science: Theory and Applications*, Vol. 2, № 1, (2013), 23-30.
249. Petkova S., On the fundamental theory of impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Differential Equations and Applications*, Vol. 12, № 2, (2013), 121-129.
250. Qian D., Li X., Periodic solutions for ordinary differential equations with sublinear impulsive effects, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 303, № 1, (2005), 288-303.
251. Rogovchenko Y., Nonlinear Impulse evolution systems and applications to population models, *J. Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 207, № 2, (1997), 300-315.
252. Saito Y., The necessary and sufficient condition for global stability of a Lotka-Volterra cooperative or competition systems with delays, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 268, № 1, (2002), 109-124.
253. Samojlenko A., Perestyuk N., *Impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, (1995).
254. Sanz-Serna J., Stuart A., Ergodicity of dissipative differential equations subject to random impulses, *J. of Differential Equations*, Vol. 155, № 2, (1999), 262-284.
255. Shen J., Li J., Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 10, № 1, (2009), 227-243.
256. Shuai Z., Bai L., Wang K., Optimization problems for general simple population with n-impulsive harvest, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 329, № 1, (2007), 634-646.
257. Simeonov P., Bainov D., Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations, *Tamkang J. of Mathematics*, Vol. 22, № 3, (1991), 275-284.
258. Simeonov P., Bainov D., Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Vol. 31, № 2, (1988), 353-368.
259. Simeonov P., Bainov D., Estimates for Cauchy matrix of perturbed linear impulsive equations, *Chinese J. of Mathematics*, Vol. 1, (1993), 73-80.

260. Smith L., Wahl L., Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects, *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 67, № 4, (2005), 783-813.
261. Soliman A., Lipschitz stability with perturbing Liapunov functionals, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 17, № 8, (2004), 939-944.
262. Soliman A., On stability of perturbed impulsive differential systems, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 133, № 1, (2002), 15-117.
263. Stamov G., *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, (2012).
264. Stamov G., Existence of almost periodic solutions for strong stable impulsive differential equations, *IMA J. of Mathematical Control and Information*, Vol. 18, № 2, (2001), 153-160.
265. Stamov G., Separated and almost periodic solutions for impulsive differential equations, *Note di Matematica*, Vol. 20, № 2, (2000-2001), 105-113.
266. Stamov G., Stamova I., Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 31, № 7, (2007), 1263-1270.
267. Stamov G., Stamova I., Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 258, № 2, (2001), 371-379.
268. Stamova I., Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Vol. 77, (2008), 331-345.
269. Stamova I., Emmenegger G.-F., Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets, *International J. of Applied Mathematics*, Vol. 15, № 3, (2004), 271-290.
270. Stamova I., On the stability of an impulsive differential-difference population model, *Communications in Applied Analysis*, Vol. 10, (2006), 285-291.
271. Stamova I., Parametric stability of impulsive functional differential equations, *J. of Dynamical and Control Systems*, Vol. 14, № 2, (2008), 235-250.
272. Stamova I., *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2009).
273. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations, *Electronic J. of Differential Equations*, Vol. 48, (2008), 1-10.
274. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 130, № 1-2, (2001), 163-171.
275. Stamova I., Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 325, № 1, (2007), 612-623.
276. Sun S., Chen L., Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 184, № 2, (2007), 617-623.
277. Tang S., Cheke R., Xiao Y., Optimal impulsive harvesting on non-autonomous Beverton-Holt difference equations, *Nonlinear Analysis*, Vol. 65, № 12, (2006), 2311-2341.
278. Vatsala A., Sun Y., Periodic boundary value problems of impulsive differential equations, *Applicable Analysis*, Vol. 44, № 3-4, (1992), 145-158.
279. Wang F., Pang G., Shen L., Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 216, № 1, (2008), 279-296.
280. Wang H., Feng E., Xiu Z., Optimality control of the nonlinear impulsive system in fed-batch fermentation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 68, № 1, (2008), 12-23.
281. Wang Q., Dai B., Chen Y., Multiple periodic solutions of an impulsive predator-prey model with Holling-type IV functional response, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 49, № 9-10, (2009), 1829-1836.
282. Wang W., Shen J., Luo Z., Partial survival and extinction in two competing species with impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 10, № 3, (2009), 1243-1254.
283. Wang X., Song Q., Song X., Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 33, № 11, (2009), 4231-4240.
284. Wu S., Duan Y., Oscillation, stability, and boundedness of second-order differential systems with random impulses, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 49, № 9-10, (2005), 1375-1386.
285. Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, Vol. 20, № 1, (2004), 147-154.
286. Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 8, № 1, (2007), 204-221.
287. Xian X., O'Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, *Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems*, (2008), Vol. 2008, Article ID 197205.
288. Xiao Y., Chen D., Qin H., Optimal impulsive control in periodic ecosystem, *Systems & Control Letters*, Vol. 55, № 7, (2006), 558-565.
289. Yan J. Existence and global attractivity of positive periodic solution for an impulsive Lasota-Ważewska model, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 279, № 1, (2003), 111-120.
290. Yan J., Existence of positive periodic solutions of impulsive functional differential equations with two parameters, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 327, № 2, (2007), 854-868.
291. Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, *Mathematics and Computer Modeling*, Vol. 40, № 5-6, (2004), 509-518.
292. Yan J., Zhao A., Yan W., Existence and global attractivity of periodic solution for an impulsive delay differential equation with Allee effect, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 309, № 2, (2005), 489-504.
293. Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 8, № 1, (2007), 362-374.
294. Yang Z., Xu D., Existence and exponential stability of periodic solution for impulsive delay differential equations and applications, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 64, № 1, (2006), 130-145.
295. Yang Z., Xu D., Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, *Circuits and Systems, IEEE Transaction on*, Vol. 52, (2005), 517-521.
296. Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential p -stability of impulsive stochastic differential equations with delays, *Physics Letters A*, Vol. 359, № 2, (2006), 129-137.

297. Yao M., Zhao A., Yan J., Periodic boundary value problems of second-order impulsive differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 70, № 1, (2009), 262–273.
298. Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, Vol. 27, № 6, (1988), 731-743.
299. Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 301, № 1, (2005), 237-248.
300. Zavalishchin S., Seseikin A., *Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
301. Zeeman E., Zeeman M., From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 355, № 2, (2002), 713-734.
302. Zeng G., Chen L., Sun L., Existence of periodic solutions of order one of planar impulsive autonomous system, *J. of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 186, № 2, (2006), 466-481.
303. Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Advances in Complex Systems*, Vol. 11, № 1, (2008), 77-97.
304. Zhang H., Chen L., Nieto J., A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 9, № 4, (2008), 1714-1726.
305. Zhang H., Li Y., Existence of positive periodic solutions for functional differential equations with impulse effects on time scales, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, № 1, (2009), 19–26.
306. Zhang H., Li Z., Variational approach to impulsive differential equations with periodic boundary conditions, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 11, № 1, (2010), 67–78.
307. Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 39, № 4-5, (2004), 479-493.
308. Zhang X., Li X., Jiang D., Wang K., Multiplicity positive solutions to periodic problems for first-order impulsive differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 52, № 6-7, (2006), 953-966.
309. Zhang X., Shuai Z., Wang K., Optimal impulsive harvesting policy for single population, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 4, № 4, (2003), 639-651.
310. Zhang X., Yan J., Zhao A., Existence of positive periodic solutions for an impulsive differential equation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 68, № 10, (2008), 3209-3216.
311. Zhao A., Lakshmikantham V., Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 210, № 2, (1997), 667-678.
312. Zhao Z., Jiang J., Lazer A., The permanence and global attractivity in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 5, № 2, (2004), 265-276.
313. Zhou Y., Liu H., Stability of periodic solutions for an SIS model with pulse vaccination, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 38, № 3–4, 299-308.