ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ
ДЕПАРТАМЕНТ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧНИ
И ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ
КАТЕДРА МАТЕМАТИКА

Адем Ибушев Зейнев

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация

Тема: УСТОЙЧИВОСТ НА РЕШЕНИЯТА НА ЕВОЛЮЦИОННИ ФУНКЦИОНАЛНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

за придобиване на образователна и научна степен "**Доктор**"
по научна специалност **4.5.** Математика **(Диференциални уравнения)**

Научен ръководител: проф. д-р. Димитър Колев

Научно жури:

1. проф. д-р Ангел Дишлиев - председател, рецензент
2. доц. д-р Юлияна Бонева
3. проф. д-р Цанко Дончев - рецензент
4. проф. д-р Ганчо Тачев
5. проф. д-р Димитър Колев

СОФИЯ, 2017 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от катедрен съвет на катедра Математика при Химикотехнологичен и металургичен университет (ХТМУ), град София, проведен на 09.01. 2017 г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на **01 Март 2017 г**. от **14:00 часа** в зала **431**, сграда А на ХТМУ – София.

Основни данни за дисертационния труд:

- автор: Адем Ибушев Зейнев;

- месторабота на автора: СУ "Св. Паисий Хилендарски с. Абланица, община Хаджидимово, Ръководител на направление ИКТ;

- научни ръководители: проф. д-р Димиър Ангелов Колев;

- заглавие: "Устойчивост на решенията на еволюционни функционални диференцуиални уравнения";

- област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;

- професионално направление: 4.5. Математика;

- научна специалност: Диференциални уравнения;

- съдържание: увод, основно изложение, заключение, декларация, списък на публикациите на автора по дисертацията, библиография;

- брой параграфи в основното изложение: 7, разпределени в 2 глави;

- брой страници на дисертацията: 140;

- брой страници на основното изложение: 126;

- брой фигури: 14;

- брой таблици: 4;

- брой публикации на автора, свързани с дисертационния труд: 3;

- брой литературни източници в библиографията: 127.

1. Актуалност на проблема

• Устойчивост на решенията на еволюционни функционални диференциални уравнения. Разгледаните проблеми в дисертационния труд са формирани като резултат от реално съществуващи математически модели на еволюционни процеси в природата и технологиите.

• Устойчивостта е математическа и същевременно физическа категория заемаща централно място във всяко диференциално уравнение описващо динамични процеси развиващи се във времето и пространството.

• Устойчивостта на решенията на ОДУ е обект на интензивно изследване от много изследователи, което продължава до наши дни.

2. Цели на дисертацията.

• Обзор върху изследванията върху различните видове устойчивост на решенията на ФДУ.

• Изследване критериите за устойчивост на решението при смущаване на система ОДУ от първи ред с векторно поле зависещо от функционал.

• Развиване идеята за устойчивост на ЧДУ от параболичен тип съдържащо функционал.

• Числено решаване на ФДУ (начална задача) с прекъсвания на решението и демонстриране на устойчивостта. За целта е използвантехниката на метода на Рунге-Кута и Ермитови полиноми.

3. Задачи на дисертацията.

Разгледани са следните задачи включващи ФДУ:

• Начална задача за система ОДУ от първи ред с нелинейно векторно поле зависещо от функционал.

• Начална задача за ЧДУ от параболичен тип съдържащо определени функционали ("maxima" и забавящ аргумент).

• Числена задача за система от две ОДУ с функционал (тип забавящ аргумент) и прекъсване на решението (импулсен ефект).

Основни математически методи, използвани в дисертацията

Основните методи, използвани в дисертационния труд, са свързани с традиционния математически апарат на реалния анализ и в частност на диференциалните уравнения.

Съществено се използва класическото неравенство на Gronwall. Също така, важно място заема и лемата на Цорн. Използвани са стандартните методи на Рунге-Кутта. Освен това е използвана и Ермитова интеррполация, разширявайки решенията с техните Ермитови полиноми от 3-та степен.

1 Увод

В настоящия дисертационен труд са разгледани два основни типа функционални диференциални уравнения (ФДУ): обикновенни диференциални уравнения (ОДУ) от първи ред с векторни полета зависещи от функционали и нехомогенни параболични частни диференциални уравнения (ЧДУ), които съдържат функционали в нехомогенната част. Най-общият клас ФДУ означаваме с $\mathcal{F}$.

Разглежданията ни се рестриктират върху тези два основни типа ФДУ:

• $dx/dt = f(t, x, \varphi(x(t)))$ ОДУ от първи ред с векторно поле f зависещо от функционала $\varphi(x(t))$, зависещ от неизвестната функция $x(t)$; такива ДУ ще наричаме функционални обикновени диференциални уравнения или съкратено ФОДУ.

• $\partial u/\partial t = Lu + F(t, u, \psi(u(t, x)))$ - параболично ЧДУ от втори ред с функция на източника (реакцията) F зависеща от функционала $\psi(u(t, x))$, който от своя страна зависи от неизвестната функция $u(t, x)$; L е елиптичен диференциален оператор дефиниран при определени условия, които са разгледани по-нататък; за тези функционални ЧДУ приемаме съкращението ФЧДУ, а когато са параболични - ФПДУ.

ФДУ със закъсняващ аргумент имат формата:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (\tau \geq 0), \tag{1}$$

където величината τ определя закъснението и участва в дефинирането на функционала.

Най-общо, функционалът участващ в тези диференциални уравнения, е изображение съпоставящо на неизвестната функция, реално или комплексно число. Ако изображението е линейно или нелинейно, тогава функционалът е линеен или нелинеен, съответно.

Описаните по-горе ФДУ се използват в математически модели на еволюционни процеси, в които състоянието на системата зависи от функционал определен чрез решението. Съществуват различни представения на функционалите: в интегрална форма, с отклоняващ се аргумент ([47], [48], [56]-[59], [61]-[62], [123]), чрез "maxima" ([5]-[13]), чрез скаларно произведение и т.н.

През 1965 г. в университета П. Лумумба в Москва, е проведена първата в света конференция по теория и приложения на ФДУ с отклоняващ се аргумент. Важността на този клас уравнения произхожда от това, че се описват процеси с последействия. В последните години теорията на тези уравнения намира широко приложение в областта на механиката, физиката, нелинейната оптика, химията, икономиката, биологията, популационната динамика, теорията на автоматичното управление и компютърното симулиране, автомобилостроенето и технологиите. Поради тази причина ФДУ с отклоняващ аргумент са интензивно изследвани в последните десетилетия.

В изследваните математически модели на еволюционни процеси в природата и технологиите участват функционали описващи зависимостта на дадено състояние на системата от "предисторията". Интересът към изследване на ФДУ се дължи, главно на факта, че наличието на функционал в самото ДУ променя качестото на решението му. Това може да се илюстрира например, като се разгледа изображението $y = \sin x$, което очевидно е гладко в $\mathbb{R}$, т.е. графиката е класическата синусоида. Разглеждайки обаче, изображението $w = \max\limits_{s \in [x-a, x]} \sin s \ (x \in \mathbb{R})$, което е функционал, не е трудно да се провери, че то вече не е гладко, т.е. графиката ще има точки с "ръбове"(рогови точки) - там производната прави скок и гладкостта се губи. С други думи действието на функционала променя качествено тази класическа функция.

Исторически за първи път ФДУ са били изследвани от Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace, Poisson и други, още през 18 - 19 век [56]. Източници за функционални диференциални уравнения са били и различни геометрични задачи.

През 1908 г., на международна конференция Emile Picard акцентира върху важността на проблема за наследствеността при моделирането на физическите системи, [2]. Интересът към този тип уравнения нараства след 1940 г. ([55]). През 1956 г. Н. Красовский стига до заключението, че за да се изследва дадена реална система с помощта на ФДУ и за да може по-адекватно да се определи нейното бъдещо състояние, трябва да бъде взето под внимание състоянието ѝ не само в сегашния, но и в отминал период от време.

През последните десетилетия качествената теория на ФДУ се използва за изследвания в областта на микробиологията, епидемиологията и най-общо в медицината ([55], [56], [57]), [58], [59]). Най-често, динамиката на живата природа в биологичните модели се характеризира с факта, че във всеки момент състоянието на системата зависи от състоянието й в предишни моменти. Тогава моделирането се извършва адекватно с ФДУ ([55]). Задачата "хищник-жертва" разгледана през 1928-1931 г [56] е типичен пример. През 1934 г., Kostyzin разглежда задача от областта на математическата биология "Symbiose, Parasitisme et Evolution"[56].

Съществуват модели с ФДУ свързани с геометрията и теорията на числата, [2]. Приложение на ФДУ има и в задачата за вискоеластичността (класическа задача от механиката) - изследвана от Volterra през 1909 г.[56].

През 1936 г., Callender и Stevenson разглеждат задачата за нестабилност в системите с времево закъснение [56]. През 1939 г., Gorelik разглежда задачата за микровълновия осцилатор [56]. Voznesensky и Solodovnikov през 1934-1941 г., разглеждат проблема за влиянието на hydroshok върху стабилността на турбините [56]. През 1934 г., Bogomolov разглежда модел на системи с обратна връзка за хидроелектрически станции [56]. Minorsky през 1942 г., разглежда задачата за стабилността на корабите [56]. Andronov и Mayer през 1946 г., разглеждат задачата за времевото закъснение в системите с обратна връзка [56]. Kabakov и Sokolov през 1946 г., разглеждат проблема, свързан с контрол на процеса върху налягането на парата [56]. Gerasimov през 1949 г., разглежда системи с обратна връзка за трансфер на топлина [56]. През 1939 г., Tychonov разглежда функционално диференциално уравнение от типа на Volterra [56]. В публикациите [60], [61], [62] е изследвана началната задача.

Интересни приложения на ФДУ в механиката, електротехниката и оптималното управление могат да се видят в [125], [56], [57], [58], [60], [61]. Приложения в биотехнологиите са разгледани в работите [125] и [61].

В теорията на ФДУ е възприета следната класификация: уравнения със закъснение, уравнения с изпреварване и уравнения от неутрален тип. Аналитично тези уравнения имат формата:

$\Diamond$ $y'(t) = (t, y(h(t))), h(t) < t,$ **със закъснение**

$\Diamond$ $y'(t) = (t, y(H(t))), H(t) > t,$ **с изпреварване**

$\Diamond$ $y'(t) = (t, y(h(t)), y'(h(t))), h(t) < t,$ **неутрален тип със закъснение**

$\Diamond$ $y'(t) = (t, H(h(t)), H'(h(t))), H(t) > t,$ **неутрален тип с изпреварване**

Диференциалните уравнение със закъснение могат да бъдат: линейни, нелинейни, автономни или неавтономни, периодични с период $T > 0$.

Съществуват различни видове закъснения на аргумента: неограничено закъснение, крайно закъснение, променливо закъснение (нефиксирано във времето).

При диференциалните уравнение със закъснение, за разлика от обикновените, миналото или историята, участва и оказва влияние както върху настоящето, така и върху бъдещето на системата, моделирана с помощта на даденото ФДУ. Нещо повече, за разлика от ОДУ, тук началното условие е заменено с така наречената начална функция, която е дефинирана в даден интервал от време.

Решенията на ФДУ се характеризират с различни качествени оценки, чието изследване не е завършено. Обект на изследване са:

⋆ Осцилацията на решението, [38], [46], [16], [17].

⋆ Съществуване на локални и глобални решения [38], [46].

⋆ Съществуване на прекъснати решения и/или производни на решенията, [16] (с. 21, с. 39).

⋆ Явлението "умиране на решението, т.е, решението клони към нула, [46] (с. 22).

Съществуване и единственост на решението на ФДУ.

Началната задача (задача на Коши̇) за ОДУ в класическия смисъл, се свежда до намиране на неизвестната функция удовлетворяваща началното условие. Известни са основните теореми за: съществуване и единственост на решението, непрекъсната зависимост от началното условие, диференцируемост на решението, диференцируема зависимост от параметри, когато има такива в самото уравнение, периодичност на решението при определени условия и т.н. Основите на качествената теория на ОДУ е разгледана подробно в [34], [38], [47], [49] и литературата цитирана там.

В теорията на ФДУ съществуват аналогични теореми, но с някои различия в условията, поради различното дефиниране на задачата с начално условие за ФДУ.

Когато имаме ФДУ от първи ред с начално условие, тогава за да съществува единствено решение, се налагат също изисквания спрямо векторното поле. Проблемът за съществуване и единственост на решенията на ФДУ е дискутиран в [38], [123], [2], [16], [56], също така в [2], [35], [40], [48], [49], [50], [52], [53], [54], [55].

Съществуването на периодични и почти периодични решения на ФДУ е дискутирано в [124], [2], [12], [31], [37], [40], [48], [41], [42], [43], [45], [47], [55].

Устойчивост на решенията на ФДУ

Основен принос в теорията на устойчивостта на решенията на ФДУ има Ляпунов, [117], [122], [127]. Важни резултати в тази област имат и Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман, Ю. И. Неймарк, Я. З. Цыпкин.

През 1840 г., G. B. Airy е открил, че неправилното проектиране на системите за управление с обратна връзка води до големи амплитуди в осцилиращите решения, [31]. Той пръв е дискутирал неустойчивостта на системите за управление, моделирани чрез диференциални уравнения. През 1868 г., J. C. Maxwell анализира устойчивостта на устройствата регулиращи работата на парен двигател, [31]. Предложено е линеаризиране на диференциалните уравнения на движението и изследване на характеристичното уравнение на дадената система. Показано е, че системите са устойчиви, ако корените на характеристичното уравнение имат отрицателни реални части. Една от трудностите при изучаването на диференциалните уравнения със закъснение е трансцедентният характер на характеристичното уравнение, притежаващо безкрайно много комплексни корени, [31], [14]. За автономни линейни системи, съществува теорема за устойчивост, аналогична на теоремата на Lyapunov за устойчивост по първо приближение. Този резултат е доказан от Raitom през 1948 г. Теорема за неустойчивост е доказана от S. N. Shimanov, [38].

Устойчивостта на решението на едно ФДУ се състои в това, че при наличие на минимално смущение (пертурбация) в началното условие, решението се отклонява много малко. Устойчивостта на решенията на ФДУ е обект на изследване от много математици, [116],[122], [59], [56], [58]. В последните десетилетия се създадават математически модели на еволюционни процеси [15], [34], [34]. При математическото описание на еволюцията на реалните процеси, подложени на кратковременни смущения, често се оказва удобно да се пренебрегне времетраенето на тези смущения и да се приеме, че те имат „моментален“ характер. Такава идеализация води до необходимостта да се изучават динамични системи с прекъснати траектории или, както те се наричат, диференциални уравнения с импулсно въздействие или импулсни диференциални уравнения (ИДУ). Необходимостта от изучаването на ИДУ е продиктувана от приложенията им в теорията на оптималното управление, компютърната симулация, биологията, механиката, биотехнологиите, медицината, електрониката, радиотехниката, икономиката и т. н., [31], [39]. Съществуват математически модели, в които участват ИДУ с функционали, [87], т.е. имаме импулсни функционални диференциални уравнения. Импулсните диференциални уравнения са сравнително нов дял от теорията на обикновените и частните диференциални уравнения. Те бележат своето начало през 1960 г. със статията на В. Д. Мильман и А. Д. Мышкис [122]. Съществува едно специфично чвление при ИДУ, което наричаме "биене"на решенията. Както при класическите ОДУ и при ИДУ с функционали имаме бифуркации и сливане на решения, умиране на решения и загуба на свойството автономност.

Отбелязваме, че съществува активност в изследването на теорията на ФДУ и на ИДУ с функционалъ в последното двадесетилетие на 20-ти век, което продължава и до сега. Интересът към това изследване се дължи на големите възможности за математическо моделиране посредством ИДУ с функционал във важни области на науката и техниката като теория на оптималното управление, популационната динамика, биотехнологиите, импулсната техника, промишлената роботика, икономиката и др. В периода след 1988 г. са получени важни резултати, свързани с импулсни диференциални уравнения с малък параметър. Развитието на теорията на импулсните диференциални уравнения с малък параметър е свързано с имената на А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, А. А. Бойчук и много други, [20] - [26]. Тук отбелязваме, че съществуват и български изследователи с приноси в качествената теория на ИДУ и ИДУ с функционали. Това е проф. Д. Д. Байнов и неговите сътрудници, [103], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [12], [13], [23], [24], [25].

През периода на последното десетилетие появиха математически модели на невронни мрежи, в които имат приложение ИДУ и ИДУ с функционали, [30],[31].

Импулсните ФДУ имат формата:

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t \neq \delta_i(x), \\ \Delta x\Big|_{t=\delta_i(x)} = I_i(x), \end{array} \right. \tag{2}$$

където върху повърхнините $t = \delta_i(x)$, се определя момента на импулса (момента на скока); тук Δx е скока на решението в импулсния момент $t = \delta_i(x)$; $I_i(x)$ е големината на скока на решението в момента $t = \delta_i(x)$.

Следните свойства за ИФДУ са обект на изследване:

∘ “биене” на решенията, т.е. едно и също решение “преминава” през една и съща импулсна повърхнина повече от един път;

∘ “умиране” на решенията;

∘ сливане на решенията;

∘ загуба на свойството автономност;

∘ наличие на различни моменти на импулсно въздействие за различните решения.

Отбелязваме, че съществуват импулсни системи с фиксирани във времето импулси т.е, когато $\delta_i(x) = \delta_i = const$. Така например, явлението "биене" за решенията се среща само при системи с импулси в нефиксирани моменти от времето. Да отбележим, че "биене" имаме, тогава когато интегралната крива среща една и съща импулсна хиперповърхнина повече от един път (може и безброй много пъти). Това явление много често е сериозна причина решението на системата с импулси да бъде непродължимо или да излиза извън областта, в която изследваме системата.

Явлението "биене" на решенията на ИДУ е изследвано подробно в работите [87], където са намерени условия, позволяващи да се избегне този феномен. И тук едни от най-важните въпроси са тези, свързани с непрекъснатата зависимост на решението от началното условия, от параметрите в дясна част и ограничеността. Съществуването на периодични решения, както и устойчивостта на решенията са обект на активни изследвания.

Непрекъснатата зависимост на решенията на ИДУ с функционал, от началното условие, както и непрекъснатата зависимост от параметри е изследвана в [87], [12]. Там е дадена и подробна библиография на работите, посветени на тези въпроси.

Функционални диференциални уравнения с "maxima"

Специален вид ФДУ са диференциалните уравнения с "maxima", което представлява вид функционал. Тези уравнения могат да се използват при моделиране на явления и процеси, чието състояние във всеки момент зависи съществено от максималното им състояние в отминал интервал от време. За целта е необходимо да има добре разработена теория за този тип уравнения, която съдържа както качествени резултати, така и приближени методи за тяхното решаване. Трудността при разработването на тази теория се дължи основно на наличието на оператора "maxima", който не позволява дори и в линейния случай с постоянни коефициенти уравнението да бъде решено в аналитичен вид. Наличието на операторът "maxima" в уравненията ги прави нелинейни. Нелинейността води практически до невъзможност тези уравнения да се решат в явен вид и изисква самостоятелно изучаване на свойствата на техните решения и разработване на ефективни методи за приближеното им решаване. Формулировката на диференциалните уравнения с "maxima" се среща исторически за пръв път през 1966 г. в монографията на Е. Попов [126]. В тази книга авторът моделира динамиката на електрическото напрежение, възникващо в генератор за постоянно напрежение, който от своя страна захранва верига с променлива консумация. математическият модел включва следното ФДУ:

$$T_0 u'(t) + u(t) + q \max_{[t-h,t]} u(s) = f(t), \tag{3}$$

където T_0 и q са константи, характеризиращи обекта, $u(t)$ е регулираното напрежение и $f(t)$ е външният източник. Ще отбележим, че поради липса дори и на основни резултати за диференциални уравнения с "maxima" по това време, в тази монография моделът е само формулиран. В същото време този модел, използван в инженерната литература, поставя началото на развитието на една нова теория в областта на диференциалните уравнения. Диференциалните уравнения с "maxima" са изследвани от Д. Байнов и неговите сътрудници в [5] - [11]. Отбелязваме, че решенията на диференциалните уравнения с "maxima" притежават свойства, които се различават от свойствата на решенията на известните в литературата диференциални уравнения със закъснения.

В дисертационният труд е направен обзор на изследванията върху устойчивостта на решенията на началната задача за ФДУ и са цитирани голям брой различни статии и монографии върху разглежданите теми. Разгледана е задачата за съществуване на устойчиви решения за ФДУ при определени изисквания върху векторните полета и началните функции. Предложен е критерий за устойчивост на решението на началната задача, за ФДУ, смутено чрез достатъчно "малка" функция удовлетворяваща определени условия. Доказана е устойчивост (в смисъл на Ляпунов) с помощта на оригинални оценки за решенията. Резултатите са публикувани официално, [1].

разгледана е задачата за съществуване и единственост на устойчиви решения за параболични уравнения с "maxima" и с определени начални и гранични условия, [115].

Разгледана е задача за съществуване на приближено решение за ФДУ с импулси. Дискутиран е въпросът за устойчивост на полученото числено решение чрез метода на Рунге-Кута и Ермитови полиноми, [114].

Използваните публикации, в които участва авторът са: [1], [114], [115].

2 ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

2.1 Достатъчни условия за устойчивост по Ляпунов на ФДУ от I-ви ред

Разглеждаме началната задача:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x + \tilde{f}(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{4}$$

където $A(t)$ е гладка $n \times n$ матрица, $\tilde{f}$ достатъчно гладка.

Съответната на (4) смутена задача е:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t,x) + \varepsilon R(\lambda_t(x)), \quad t > t_0 \\ x(t_0) = \varphi(t), \quad t \in [-\alpha, t_0], \end{array} \right. \tag{5}$$

където $\varphi(t_0) = x_0$ и $f(t,x) = A(t)x + \tilde{f}(t,x)$.

Тук R е диференцируема в смисъл на Гато́ функция, $\lambda_t : C([t-\alpha, t], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ е функционал; приемаме, че λ_t е линейния вектор-функционал,

$$\lambda_t(Z) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_t^1(Z) \\ \lambda_t^1(Z) \\ \lambda_t^1(Z) \\ \dots \\ \lambda_t^1(Z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad Z = Z(s) \in \mathbb{R}^n$$

,

където $Z = Z(t)$ е n - мерна вектор-функция, $Z \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_t^i(Z)(i = 1, ..., n)$ са числови компоненти на n - мерен вектор $\lambda_t(Z)$. С други думи всяко λ_t^i е линеен функционал $\lambda_t^i : Z \longmapsto \lambda_t^i(Z) \in \mathbb{R}$.

Приемаме, че за началните задачи (4), (5) са удовлетворени изискванията:

H1.

$|\lambda_t| < c_1$ ($c_1 > 0$ - реална константа). Линейният оператор $A(t)$ е ограничен, т.е.

$$\|A(t)\| < M, \quad \forall \quad t \in [t_0, \infty), \quad M > 0.$$

Предполагаме, че f и R са липшицови функции с една и съща константа на Липшиц

L, т.е.,

$$\begin{aligned} &(a) \qquad f \in Lip(L; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \forall t \in [t_0, \infty), \\ &(b) \qquad R \in Lip(L; \mathbb{R}^n), \quad \text{т.е.} \quad \|R(\xi) - R(\eta)\| \leq \|\xi - \eta\|, \end{aligned} \tag{6}$$

където $Lip(L; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ и $Lip(L, \mathbb{R}^n)$ са класове включващи липшицови функции с една и съща константа L, т.е. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

По-нататък, предполагаме че $t_0 = 0$, и $R(0) = f(t,0) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$, от където се вижда, че $\tilde{f}$ е също липшицова функция с константа на Липшиц $M + L$, и $\tilde{f}(t,0) = 0$.

H2. Системата (4) има устойчиво равновесно състояние $x = 0$, което е гарантирано поради съществуването на функция на Ляпунов $V(t,x)$ за непертурбираната система (4). Функциятя V е, такава че е удовлетворено неравенството

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla V \cdot f(t,x) \leq 0 \tag{7}$$

Забележка 2.1. *$\nabla V \equiv grad\, V$-градиент на V, т.е. $\nabla V \equiv \Big(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\Big)$. Прието е означението $\nabla V.f(t,x)$, което е скаларното произведение $\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle$ на векторите ∇V и $f(t,x)$), т.е. имаме $\nabla V.f \equiv \big\langle \nabla V, f \big\rangle \equiv \dfrac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \cdots + \dfrac{\partial V}{\partial x_n} f_n$, $f \equiv (f_1, f_2, \ldots, f_n)^t$.*

Освен това, предполагаме, че съществуват положително определени функции $\tilde{a}(\|x\|)$ и $\tilde{b}(\|x\|)$, такива че

$$\tilde{a}(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \tilde{b}(\|x\|). \tag{8}$$

Полагаме $\Phi(t,x) \equiv \big\langle \nabla V, R(\lambda_t(x)) \big\rangle$, и предполагаме, че Φ е диференцируема функция в смисъл на Гато́.

Забележка 2.2. *Тук приемаме, че началото O е равновесна точка (стационарна или фиксирана, т.е. $f(t,0) = 0 = \tilde{f}(t,0)$).*

Разглеждаме линейната система

$$\dot{z} = A(t)z, \tag{9}$$

която ще използваме в по-нататъшните разглеждания.

Дефинираме функционала

$$(\lambda_s - \lambda_\tau) : C([t_0 - \alpha, \infty]; \mathbb{R}^n),$$

където s, r са реални параметри, принадлежащи на един интервал $\Omega \subset \mathbb{R}$. Нашата цел е да покажем, че $\|\lambda_s - \lambda_\tau\|$ приема максимална стойност за s, r от посочения по-горе интервал.

Разглеждаме множеството $\{\lambda_s\}_{s \in \Omega}$, където $\Omega \subset \mathbb{R}$, и освен това дефинираме

$$S_k \equiv \{m_k(s,\tau) = \|\lambda_s - \lambda_\tau\| : \ 0 \leq s \leq \tau, \ k\alpha \leq \tau < (k+1)\alpha\}, \tag{10}$$

където $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, интервалите, в които се намират s и τ зависят от $k = 1, 2, \ldots$. За елементите на S_k съществува релацията

$$m_k(s,\tau) \prec m_k(r,\tau),$$

където $m_k(s,\tau), m_k(\tau,\tau) \in S_k$.

Съществуват свойствата:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad m_k(s,\tau) \prec m_k(s,\tau);\\
&(ii) \quad \text{ако} \;\; m_k(a,\tau) \prec m_k(b,\tau) \;\; \text{и} \;\; m_k(b,\tau) \prec m_k(a,\tau),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{тогава} \;\; m_k(a,\tau) = m_k(b,\tau);\\
&(iii) \quad \text{ако} \;\; m_k(a,\tau) \prec m_k(b,\tau) \;\; \text{и} \;\; m_k(b,\tau) \prec m_k(c,\tau),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{тогава} \;\; m_k(a,\tau) \prec m_k(c,\tau)
\end{aligned} \tag{11}$$

(последното свойство наричаме транзитовност).

От свойствата (i)-(iii) следва, че множеството S_k е частично наредено чрез релацията $\prec$. Очевидно, за всяко $m_k(a,\tau)$ и $m_k(b,\tau)$ съществува $m_k(c,\tau)$, такова че $m_k(a,\tau) \prec m_k(c,\tau)$ и $m_k(b,\tau) \prec m_k(c,\tau)$. Тогава $m_k(c,\tau)$ е една горна граница за $m_k(a,\tau)$ и $m_k(b,\tau)$.

Ще формулираме следната лема, която е следствие на Лемата на Цорн, в нашия случай.

Лема 1. *Множеството S_k е частично наредено със свойството, че всяко линейно наредено подмножество на S_k притежава горна граница в S_k. Тогава S_k съдържа поне един максимален елемент, който означаваме,*

$$M_k \equiv \max_{s\in[0,\tau]} \|\lambda_s - \lambda_\tau\|,$$

където $k\alpha \leq \tau < (k+1)\alpha, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Лема 2. *Функциите f и R в (5) удовлетворяват условието на Липшиц (6), където $L > 0$ е една и съща константа за двете функции в областта $\|x\| \leq c_x$ (c_x - положителна константа). Тогава решението $x(t)$ на (5) удовлетворява оценката $\|x\| \leq \|x_0\| e^{L\theta_k(t)}$, където $x_0 = x(0)$, и*

$$\begin{aligned}
&\theta_k(t) \equiv [1 + \varepsilon(M_k + c_1)]t, \quad M_k \equiv \max_{[0,\tau]} \|\lambda_s - \lambda_\tau\|,\\
&k\alpha \leq t \leq \tau \leq (k+1)\alpha \;\; (k = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

Лема 3. *Разглеждаме задачата, (4) за която функцията f удовлетворява условието на Липшиц с константа L в областта $\|x\| < C_x$ ($C_x \equiv const > 0$). Тогава решението $\tilde{x}(t)$ на (4) удовлетворява неравенството*

$$\|\tilde{x}\| \leq \|x_0\| e^{L\tilde{c}t},$$

където $0 \leq t \leq l \leq k\alpha$ ($k = 1, 2, \ldots$), $x_0 = x(0)$, и $\tilde{c} = 1 + c_1\varepsilon$.

Лема 4. *За вариационното уравнение (9) е валидно неравенството*

$$\|z\| \leq \|x_0\| e^{Mt}.$$

Доказателството е аналогично на това, което използваме в Лема 5 и Лема 6.

Лема 5. *Разглеждаме решенията $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ на (5) и (4), съответно. Предполагаме, че условията на Лема 2 са удовлетворени. Тогава имаме следната оценка:*

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \frac{\varepsilon c_1 \|x_0\|}{\theta_k(1)} \big(e^{L\theta_k(\tau)} - 1\big) e^{Lt} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

където $\theta_k(\tau)$ е дефинирана в Лема 2.

Тук забелязваме, че след "включване" на смущението R разликата между $\|x - \tilde{x}\|$ може да стане доста голяма с нарастването на t. Това ни дава възможност да контролираме тази разлика чрез вариране на L и ε.

Теорема 2.1. *Предполагаме, че следващите условия са изпълнени:*

1. Хипотезите H1, H2 за система (5)*;*

2. В множеството $\omega \equiv \{(t, x) : t \in [-\alpha, \infty),\ \|x\| < C_x\}$, ($\alpha > 0$, $C_x > 0$),

$$|\Phi| \leq M\|x\|^d, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leq M\|x\|^{d-1},$$

където $d \geq 1$; тук производната $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ е линеен и непрекъснат функционал на Гато́.

3. Съществуват $\tau > 0$ $\quad \delta > 0$, такива, че за всяко $\alpha \geq 0$, $\|x_0\| < \varepsilon_0$ $\quad x_0 = \varphi(t_0)$ имаме

$$\int_0^\tau \Phi(z(t))dt \leq -\delta\|x_0\|^q, \quad 0 < q < d,$$

където $z(t)$ е решението на линейната система (9) *с начално условие $z(0) = x_0$.*

Тогава нулевото решение на (4) *е равномерно устойчиво (в смисъл на Ляпунов).*

Заключение

Отбелязваме, че ако познаваме функцията на Ляпунов $V(t, x)$ за несмутената система, и ако хипотезите H1 и H2 са удовлетворени, тогава нулевото решение на смутената система е равномерно устойчиво. Като следствие от направените по-горе оценки Теорема 2.1 можем да докажем, че нулевото решение е и равномерно асимптотически устойчиво. Като приложение на показания по-горе метод можем да изследваме импулсни задачи, които са аналогични на разгледаните.

2.2 Устойчивост на решенията на ФДУ с прекъснати решения

Разглеждаме следната система от функционални диференциални уравнения със закъснение:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\sigma)) \text{ for } t \in I = [0, T],\ t \neq \tau_i,\ x(s) = \psi(s),\ s \in [-\sigma, 0], \tag{12}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i(x(t))} = S_i(x) \quad (i = 1, \dots) \tag{13}$$

Нека $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е достатъчно гладка вектор-функция, $\tau_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $S_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ са непрекъснати по Липшиц, *пресичащи равнините* и *скоци на функциите*, съответно. За удобство при разглежданията приемаме, че $\tau_0 = 0$.

Наличието на закъснение прави системата (13) по-сложна за изучаване. По принцип е трудно да се изучи числено приближаване (решаване) на системи със закъснение дори и в случаите, когато няма импулси.

Предварителни хипотези

Нека да приемем, че $f(\cdot,\cdot)$ е достатъчно гладка функция (следователно локално липшицова) т.е съществува непрекъсната функция $v : I \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ с $|f(t,x)| \leq v(t,|x|)$ такава, че максималното решение на $r' = v(t,r)$ съществува I за всяко начално условие $r(0) \geq 0$.

A1. $\tau_i(\cdot)$ са M-Lipschitz и $S_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ са μ-Lipschitz.

A2. $\tau_i(x + S_i(x)) \neq \tau_j(x)$, $\forall\, j \neq i$ и $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Ще приемем, че **A3** или **A4** са изпълнени.

A3. $\tau_i(x) < \tau_{i+1}(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$, са изпълнени следните условия:
1) Съществува констатнта $\alpha < 1$ такава, че $\langle \partial\tau_i(x), f(t,x,y)\rangle \leq \alpha$ for $i = 1,\ldots,r$, и за всяко $(t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^n$, където производните съществуват;
2) $\tau_i(x) \geq \tau_i(x + S_i(x))$.

A4. $\tau_i(x) > \tau_{i+1}(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$ слведните две условия са изпълнени:
1) Съществува константа $\beta > 1$ такава, че $\langle \partial\tau_i(x), f(t,x,y)\rangle \geq \beta$ for $i = 1,\ldots,r$ и за всяко $(t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^n$, където производните съществуват;
2) $\tau_i(x) \leq \tau_i(x + S_i(x))$.

A5.$f(t,\cdot)$ е липшицова с константа K, $K \in \mathbb{R}^+$, (K е положителна константа).
Многократното пресичане на решението на една повърхнина е известно в литературата, като феномен **beating phenomena** биене на решението. Има редица публикаци свързани с този проблем, като например в работите на [23], [24], [25].

Метод на Рунге - Кута за ФДУ с прекъснати решения

Нека е дадено едно естествено число N, полагаме $h = \left\{\frac{1}{N}\right\}$ и нека $t_j = jh$ е една равномерна мрежа в интервал $[0,1]$, където $j = 0,1,...,N$.

Дадената система се пресмята итеративно без импулси, използвайки следните релации:

$$\eta_h(t_{j+1}) = \eta_h(t_j) + h\sum_{\nu=1}^{s} b_\nu k_\nu, \tag{14}$$

$$k_\nu = f\left(t_j + c_\nu h, \eta_h(t_j) + h\sum_{l=1}^{\nu} a_{\nu l} k_l, \nu_h(t_j + c_l t - \sigma)\right)\ (\nu = 1,\ldots,s). \tag{15}$$

Мрежовата функция $\eta_h(.)$ удовлетворява неравенството:

$$\max_{j=0,\ldots,N} \|\eta_h(t_j) - x(t_j)\| \leq Ch^p, \tag{16}$$

при подходящи условия за гладкост на дясната страна на уравнението и при подходящ избор на коефициентите b_ν, c_ν, $a_{\nu,l}$ in (14)–(15).

Тук $x(\cdot)$ е решение на системата (13) без импулси.

Поради наличието на закъснение в системата (13) се получава прекъсване на производните на решението $x(\cdot)$. Тези точки трябва да бъдат включени в мрежата от точки. Първо включваме мрежата от точките: $\sigma, 2\sigma, ..., k\sigma$, където всяко $k = p$ или $k\sigma > T$.

Ако намерим точки на скоци (импулси) τ, тогава включваме и тези точки в мрежата $\tau, \tau + \sigma, \tau + 2\sigma, ...,$

Нещо повече, тъй като имаме наличие на закъснение, това означава, че трябва да знаем стойностите на решението не само в мрежата, но за всяко t.

Съществуват различни методи за решаване на диференциални уравнения със закъснения. В тази работа е използвана Ермитова интерполация, разширявайки решенията с техните Ермитови полиноми от степен 3, ако методът е от втори ред или полиноми на Ермит, ако е от четвърти ред.

Полиномите на Ермит от трети ред се дефинират за всяка координата x^k на решението x в (t_j, t_{J+1}) по отношение на t стойностите $H^k(t_j) = x^k(t_j)$. $H'^k(t_j) = f_k(t_j, x(t_j))$, $H^k(t_{j+1} = x^k(t_{j+1})$ и $H'^k(t_{j+1}) = f_k(t_{j+1}, x(t_{j+1}))$.

По аналогичен начин се дефинират полиномите на Ермит от 5-та степен, използвайки последователно интервалите (t_{2k}, t_{2k+1}) и (t_{2k+1}, t_{2k+2}). Прилагаме метода на Рунге-Кута за импулсната систтема и полагаме

$$
\begin{aligned}
\varphi_i(t) &\equiv \tau_i(x(t)) - t, \quad (t \in [0, T]), \\
\varphi_{i,h}(t_j) &\equiv \tau_i(\eta_h(t_j)) - t_j, \quad (j = 0, 1, \ldots, N).
\end{aligned}
$$

Използвайки стандартните методи на Рунге-Кутта пресмятаме приближено дадената система (13) и съответно под мрежата от точките t_j, $j = 1, \ldots, N$. Във всеки един интервал $[t_j, t_{j+1}]$ проверяваме, дали функцията си сменя знака $\varphi_{i,h}(\cdot)$. Ако е така т.е. функцията си сменя знака (за някое пройзволно i), тогава дискретната траектория $\eta_h(\cdot)$ прави скок в интервалаа (t_j, t_{j+1}) който скок е близо до i-тия скок на точното решение $x(\cdot)$. След това използваме различни стратегии за да определим точката на скока. Използвайки Ермитови полиноми $H(t)$ of $\eta_k(\cdot)$ решаваме уравнението $\tau_k(H(t)) - t = 0$. Решението τ_k първото приближение в точката на скока $\tau_k(x)$. След това намираме приблиожено решение в точката с момощта на Рунге-Кутта методи $\bar{\tau}_i$ и пресмятаме стойността на $\varphi_{i,h}(\eta_k(\bar{\tau}_i)) - \tau_i$. Ако стойността е по-малка, тогава h^{p+1} полагаме $t_i = \bar{\tau}_i$. В противен случай продължаваме, т.е. проверяваме интервала където $\varphi_i(\cdot)$ си сменя знака и след това използваме Ермитова интерполация на решението в този подинтервал. Отново решаваме $\tau_i(H(t)) - t = 0$. Второто приближение е напълно достатъчно за нашите цели на задачата. Приближението $\dot{\tau}_i$ е включено в мрежата от точки и продължаваме пресмятанията използвайки стандартните методи на Рунге-Кутта.

Числени примери

Конструираме пример за да покажем съществуването на устойчиво решение на ФДУ-ОА при дадени начални условие.

Коректността и точността на метода, който се използва тук е рагледан в следната Теорема.

Теорема 2.2. *[29] Нека са изпълнени предположенията* ***SH*** *мярката на разстоянието между точното решение $y(\cdot)$ и приближеното решение $\eta_h(\cdot)$ е $O(h^p)$ при N достатъчно голямо.*

Разглежданите примери включват две точки на прекъсване, т.е. решението прави два скока.

По същество се разглеждат числени методи (по-точно - методи на Рунге-Кута) за решаване на импулсни диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия. Разгледан е един от основните варианти, а именно когато импулсите се определят с помощта на непрекъснати и не пресичащи се (подредени) хиперповърхнини от разширеното фазово пространство на системата. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива пресича някоя от споменатите по-горе хиперповърхнини.

С други думи разглеждаме началната задача:

$$\dot{y} = f(\cdot, \cdot)$$

$$x(t) \equiv y(t) \equiv 0.05, \quad t \in [-0.5, 0]$$

and

$$x(t) \equiv y(t) \equiv 0.3, \quad t \in [-0.5, 0].$$

Първо решаваме уравнението с начално условие $x(t) \equiv y(t) \equiv 0.05$, след това решаваме с друго начално условие $x(t) \equiv y(t) \equiv 0.3$.

Предназначението на примера по-долу е да покаже, че при много малки промени в началното условие имаме много малка промяна в решението на уравнението. Т.е. решението е устойчиво. Това може да бъде видяно от графиката показана по-долу.

В тези примери условието на Липшиц по отношение на t е равномерна по супремум норма. При пресмятанията на приближеното решение са използвани неявни методи на Рунге-Кутта от 4-ред със стъпка 0.1. Пресмятанията са реализирани с помощта на MatLab 7.14.0.739.

В този случай е трудно да бъде намерено точно решение,нека да положим $z = x + y$, тогава системата за z приема вида $\dot{z} = z + 1$. $z(0) = 0.05$.

В таблица са показани стойностите на точните решения за $z(t)$, и приближените стойности на решението $x(t)$ и $y(t)$.

Пример 2.1. *Разглеждаме системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = x(t) + \cos^2 x(t-0.5) + \sin^2 y(t-0.5) - 1.1, \ t \in [0,1] \\ y'(t) = y(t) + \sin^2 x(t-0.5) + \cos^2 y(t-0.5) + 0.1, \ t \neq \tau_i(x,y), \end{array} \right.$$

where

$$x(t) \equiv y(t) \equiv 0.05, \ t \in [-0.5, 0], \ \textit{initial condition}$$

Уравненията на импулсните повърхни са:

$$\tau_1 : t = x + y - 0.08,$$

$$\tau_2 : t = x + y - 1,$$

Импулсният ефект е зададен с помощта на изразите:

$$\Delta_1 = \left(\frac{\sin^2(x)}{20}; \quad \frac{\cos^2(x)}{10} \right)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\cos^2(y)}{10}; \quad \frac{\sin^2(y)}{5} \right)$$

За да решим системата (2.3) полагаме $z = x(t) + y(t)$, тогава системата приема вида $\dot{z} = z+1$, с начално условие $z(0) = 0.05$. решението на диференциалното уравнение $\dot{z} = z+1$ е

$$z = ce^t - 1, \quad t \in [0, 1],$$

където $c = 1.05$ и получаваме $z = 1.05e^t - 1$.

Използваме неявни методи на Рунге-Кутта от степен 4 със стъпка 0.1 за приближено пресмята на решението на системата (2.3) и Ермитови полиноми от 5-та степен.

Точното време на първие скок е $\tau_1 = 0.1910648479$ и $\tau_2 = 0.961006338$. Приближето време на скоците е $\tau_{1ap} = 0.1900128479$ и $\tau_{2ap} = 0.9598531304$. В таблицата по-долу са поставени точните решение на $z(t)$, и приближените решение на $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$. The error is $r(t) = |x_{ap}(t) + y_{ap}(t) - z(t)|$.

Резултатите за точните и приближениоте решения са почочени в следната таблица.

t	z_{ex}(t)	$x_{RK4}(t)$	$y_{RK4}(t)$	$r(t)$
0.00	0.0500000000	0.0300000000	0.0200000000	0.000000000
0.10	0.1604294639	0.0802147320	0.0818190266	0.0016042946
0.15	0.2199259549	0.1099629775	0.1121622370	0.0021992595
0.19	0.3710648478	0.1855324239	0.1892430724	0.0037106485
0.20	0.3833704149	0.1916852075	0.1955189116	0.0038337041
0.30	0.5288607515	0.2644303758	0.2697189833	0.0052886075
0.40	0.6896524404	0.3448262202	0.3517227446	0.0068965244
0.50	0.8673547387	0.4336773694	0.4423509167	0.0086735474
0.60	1.0637461510	0.5318730755	0.5425105370	0.0106374615
0.70	1.2807922284	0.6403961142	0.6532040365	0.0128079223
0.80	1.5206652410	0.7603326205	0.7755392729	0.0152066524
0.90	1.7857659185	0.8928829593	0.9107406184	0.0178576592
0.96	2.1610063386	0.9790140312	0.9985943118	0.0195802806
1.00	2.2619381942	1.1309690971	1.1535884790	0.0226193819

Таблица 1: Точни решения и приближени RK4 решения на Example 2.1

Пример 2.2. *Разглеждаме отново същата система от пример* (2.1)

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = x(t) + \cos^2 x(t-0.5) + \sin^2 y(t-0.5) - 1.1, \; t \in [0,1] \\ y'(t) = y(t) + \sin^2 x(t-0.5) + \cos^2 y(t-0.5) + 0.1, \; t \neq \tau_i(x,y), \end{array} \right.$$

с ново начално условие

$$x(t) \equiv y(t) \equiv 0.3, \; t \in [-0.5, 0], \textit{начално условие}$$

Уравненията на импулсните повърхнини са:

$$\tau_1 : t = x + y - 0.08,$$

$$\tau_2 : t = x + y - 1,$$

Импулсният ефект ве изразен с помощта на изразите:

$$\Delta_1 = \left(\frac{\sin^2(x)}{20}; \quad \frac{\cos^2(x)}{10} \right)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\cos^2(y)}{10}; \quad \frac{\sin^2(y)}{5} \right)$$

За да решим системата (2.3) полагаме $z = x(t) + y(t)$, тогава системата приема вида $\dot{z} = z+1$, с начално условие $z(0) = 0.03$. решението на диференциалното уравнение $\dot{z} = z+1$ е

$$z = ce^t - 1, \quad t \in [0,1],$$

където $c = 1.03$ и получаваме $z = 1.03e^t - 1$.

Използваме нявни методи на Рунге-Кутта от 4-ред със стъпка 0.1 за пресмятане на приближеното решение на системата (2.3) и Ермитови полиноми от 5-та степен.

Точното време на импулсите е $\tau_1 = 0.2721005266$ и $\tau_2 = 1.312968945484$. Приближеното време на импулсите е $\tau_{1ap} = 0.27010135000$ и $\tau_{2ap} = 1.292855955484$. В таблицата по-долу са поставени точните решения на $z(t)$, и приближените решения $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$.

Резултатите за стойностите на точното решение и приближените решени са дадени в следната таблица:

t	z_{ex}(t)	$x_{RK4}(t)$	$y_{RK4}(t)$	$r(t)$
0.00	0.3000000000	0.150000000	0.150000000	0.000000000
0.10	0.4367221935	0.227095541	0.222728319	0.013101666
0.20	0.5878235856	0.305668265	0.299790029	0.017634708
0.25	0.6692330417	0.348001182	0.341308851	0.020076991
0.27	0.8065346452	0.419398016	0.411332669	0.024196039
0.30	0.2030690148	0.105595888	0.103565198	0.00609207
0.40	0.3295968876	0.171390382	0.168094413	0.009887907
0.50	0.4694318129	0.244104543	0.239410225	0.014082954
0.60	0.6239733057	0.324466119	0.318226386	0.018719199
0.70	0.7947680692	0.413279396	0.405331715	0.023843042
0.80	0.9835254748	0.511433247	0.501597992	0.029505764
0.90	1.1921346700	0.619910028	0.607988682	0.03576404
1.00	1.4226834858	0.739795413	0.725568578	0.042680505

Таблица 2: Точни решения и приближени решения на Example **??**

Графиката Г1 се отнася за случая с начално условие $x(t) \equiv y(t) \equiv 0.3$, for the equation (2.3).

Графиката Г2 се отнася за случая с начално условие $x(t) \equiv y(t) \equiv 0.05$, for the equation (**??**).

We use implicit Runge-Kutta method of order 4 with step 0.1 for appreoximate solution. Denote approximate solution by x_{RK4} and y_{RK4}. Exact jump times are $\tau_1 = 0.1910648479$ and $\tau_2 = 0.961006338$. After the first jump we solve the initial problem with a new initial condition and after the socond jump we solve the initial problem with a new initial condition.

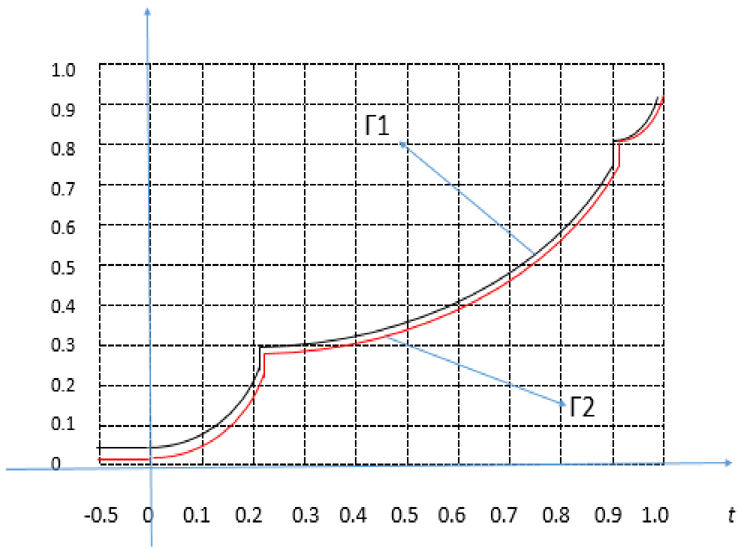
Разглеждаме същият пример с нови повърхнини.

Пример 2.3. *Разглеждаме системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = x(t) + \cos^2 x(t-0.5) + \sin^2 y(t-0.5) - 1.1, \; t \in [0,1] \\ y'(t) = y(t) + \sin^2 x(t-0.5) + \cos^2 y(t-0.5) + 0.1, \; t \neq \tau_i(x,y), \end{array} \right.$$

където

$$x(t) \equiv y(t) \equiv 0.05, \, t \in [-0.5, 0], \, \textit{initial condition}$$



Фигура 1: Г1 $x(t) \equiv y(t) = 0.05$, Г2 $x(t) \equiv y(t) = 0.3$.

Уравненията на импулсните повърхнини са:

$$\tau_1 : t = x + y - 0.081,$$

$$\tau_2 : t = x + y - 1,$$

Импулсният ефект е даденс помошта на изразите:

$$\Delta_1 = \left(\frac{\sin^2(x)}{20}; \quad \frac{\cos^2(x)}{10} \right)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\cos^2(y)}{10}; \quad \frac{\sin^2(y)}{5} \right)$$

За да решим системата (2.3) полагаме $z = x(t) + y(t)$, тогава системата приема вида $\dot{z} = z + 1$, с начално условие $z(0) = 0.05$. The solution of the differential equation $\dot{z} = z + 1$ е

$$z = ce^t - 1, \quad t \in [0, 1],$$

където $c = 1.05$ и получаваме $z = 1.05e^t - 1$.

Използваме неявни методи на Рунге-Кутта от 4-ти ред със стъпка 0.1 за пресмятане на приближеното рещшение на системата (2.3) и Ермитови полиноми от 5-та степен.

Точното време на импулсите е $\tau_1 = 0.194722595371534$ и $\tau_2 = 0.961408466960965$. Приближеното време на импулсите е $\tau_{1ap} = 0.1946123810$ и $\tau_{2ap} = 0.9611072860$. В таблицата са поставени точните решения на $z(t)$, и приближените решения $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$. Грешката е $r(t) = |x_{ap}(t) + y_{ap}(t) - z(t)|$.

Резултатите за точното и приближеното решение са дадени в следната таблица.

Пример 2.4. *Разглеждаме едно импулсно диференциално уравнение. Уравнението е конструирано, така че в момент t решението на това уравнение "умира". Тук ще тестваме*

t	z_{ex}(t)	$x_{RK4}(t)$	$y_{RK4}(t)$	$r(t)$
0.00	0.3000000000	0.15000000000	0.1500000000	0.00000000000
0.10	0.1604294639	0.08021473200	0.0818190266	0.00160429460
0.15	0.2199259549	0.12755705384	0.0901696415	0.00219925955
1.19	0.3757225954	0.21791910533	0.1540462641	0.00375722595
0.20	0.3830020316	0.22214117833	0.1570308330	0.00383002032
0.30	0.5284536249	0.30650310244	0.2166659862	0.00528453625
0.40	0.6892024959	0.39973744762	0.2825730233	0.00689202496
0.96	2.3614084669	1.35361691080	0.9861774714	0.02161408467
1.00	2.2857967971	1.32576214232	0.9371766868	0.02285796797

Таблица 3: Точни решения и приближени решения на системата Example 2.3

разгледания Рунге-Кутта метод. Решението $x(t)$ на разглежданият пример "decay т.е имаме **beating phenomena** *биене на решението.*

$$\dot{x}(t) = x, \quad x(t_0) = x_0 - \text{начално условие,} \qquad (17)$$
$$\tau : \quad x - 1 = 0 - \text{импулсна равнина.}$$

решението на уравнение (4) е

$$x(t) = x_0 e^{t-t_0}.$$

В зависимост от n на биенето (т.е. решението приема стойнсот $= 1$ n-пъти).

$$\Delta_n = e^{-\frac{1}{5^n}} - 1.$$

Нека $t_0 = 0,\ x_0 = e^{-\frac{1}{5}}$. Тогава за решението плучаваме $x(t) = e^{-\frac{1}{5}}e^{(t)}$. Тогава времето на първиет скок е $t_1 = \frac{1}{5}$, вторияtъ скок е $t_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}$, ... n-тия скок е $t_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^n}$.

Лесно може да се провери, че $t_n < t_{n+1}$.

От друга страна имаме, че

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5}.\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}.$$

От което следва, че решението $x(t)$ "decay"(умира) в $t = \frac{1}{4} = 0.25$.

Июползвам неявни методи на Рунге-Кутта от 4-ти ред със стъпка 0.01 при пресмятране на приближеното решение на системата (2.3). Означаме приближеното решение с $x_{ap}(t)$ а точното решение с x_{ex}. $error = |x_{ex} - x_{ap}|$ В таблицата са показани резултатите от RK-method а втори (четвърти) ред със стъпка $h = 0.01$.

t	$x_{ex}(t)$	$x_{ap}(t)$	$error$
0.00	0.820000000	0.819918000	0.000082000
0.05	0.862069535	0.861983328	0.000086207
0.10	0.906297418	0.906206788	0.000090630
0.15	0.952794383	0.952699103	0.000095279
0.19	0.991703724	0.991604554	0.000099170
0.20	0.801676842	0.801596674	0.000080168
0.21	0.828241137	0.827412896	0.000828241
0.22	0.836565099	0.835728534	0.000836565
0.23	0.844972718	0.844127745	0.000844973
0.24	0.853464835	0.852611370	0.000853465
0.249	0.861180688	0.865398795	0.004218107

Таблица 4: Точните решения и приближените стойности Example 4

2.3 Еволюционни ФДУ

Най-общо, еволюционните функционални диференциални уравнения (ЕФДУ) имат вида:

$$\dot{x} = F(t, x, \lambda_t(x)), \tag{18}$$

където F е достатъчно гладка функция, $\lambda_t(x)$ е функционал (линеен или нелинеен), $\lambda_t(x) : x \longmapsto \lambda_t(x) \in \mathbb{R}$, а $x = x(t)$ е неизвестна функция, явяваща се решение на началната и/или гранична задача. Най-често в лявата част на (18) стои производна по посока на векторното поле F.

Тук разглеждаме ЕФДУ от параболичен тип, т.е. имащи вида

$$u_t = Lu + f(t, x, u, \lambda_t(u)), \quad (u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}), \tag{19}$$

където t е времето, $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ - пространството, u - неизвестна скаларна функция $u = u(t, x)$, а $\lambda_t : u \longmapsto \lambda_t(u)$ е функционал. Тук u_t е частната производна $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ на функцията u спрямо t, а L е линеен диференциален оператор, най-често, от елиптичен тип, който ще дефинираме по-нататък.

Обикновенно, f в (19) се нарича функция на реакцията или източник, а в оператора L се съдържат параметрите на дифузията, ако това е модел от физиката, (термодинамиката и газодинамиката).

Дефинираме следните множества:

$$\begin{aligned}
&D_T \equiv (0, T] \times \Omega, \\
&S_T \equiv (0, T] \times \partial\Omega, \\
&D_{-\sigma} \equiv [-\sigma, 0] \times \Omega, \\
&\mathcal{CD} \equiv \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\
&E_T \equiv [-\sigma, T] \times \Omega^-.
\end{aligned}$$

Отбелязваме, че най-често функционалът $\lambda_t(u) \equiv u(t-\sigma, x)$ определя или функция със закъснение, или "maxima" $\lambda_t(u) \equiv \max\limits_{s \in [t-\sigma, t]} u(s, x)$, или интеграл $\lambda_t(u) = \int_{t-\sigma}^{t} u(s, x) w(s) ds$ с теглова функция $w(s)$ и т.н.

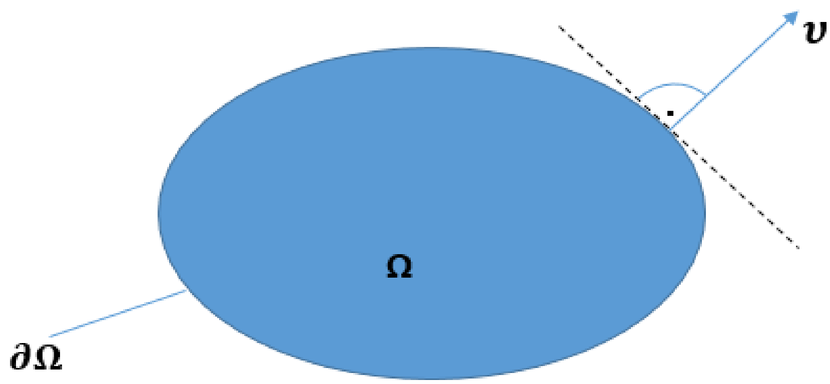


Figure 2: Производната по направление на външния нормален вектор ν

Операторът L обикновенно, има формата

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{20}$$

Приемаме, че L е равномерно елиптичен оператор, т.е. матрицата $\{a_{ij}\}$ в най-обща форма е положително определена (дефинитна) в областта $\bar{\Omega}$ с елементи a_{ij}, най-често независещи от t. Считаме, че a_{ij} и b_j в L принадлежат на класа $C^{1+\theta}(\bar{\Omega})$, $\quad (0 < \theta < 1)$, (класът на Хьолдеровите функции), т. е. $a_{ij}(t,x), b_j(t,x) \in C^{1+\theta}(\bar{\Omega})$ за всяко $i,j = 1,\dots,n$ и за $t \geq 0$. Въвеждаме граничен оператор B

$$B \equiv \alpha_0(t,x)\frac{\partial}{\partial \nu} + \beta_0(t,x), \tag{21}$$

където $\alpha_0(t,x)$ и $\beta_0(t,x)$ са неотрицателни функции от $C^{1+\theta}(\partial\Omega)$ за $t \geq 0$, и нетъждествено равни на нула в $[0,\infty)\times\partial\Omega$. С помощта на $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ е означена производната по направление на външния нормален вектор ν, (2) т. е. това се вижда от фигурата:

Основна задача

Ще дефинираме следната задача с начално и гранично условие за ФДУ от параболичен тип,

$$\begin{aligned}
&(a)\ u_t = Lu + f(t,x,u) + R(t,x,\lambda_t(y) \quad \text{в} \quad D_T,\\
&(b)\ Bu = h(t,x) \quad \text{в} \quad S_T \ (\text{нехомогенно гранично условие на Дирихле})\\
&(c)\ u(t,x) = \eta_0(t,x) \quad \text{в} \quad D_{-\sigma} \ (\text{начално условие})\ ,
\end{aligned} \tag{22}$$

където $Bu \equiv (t,x) = h(t,x), \forall (t,x) \in S_T$, η_0 - начална функция дефинирана в D_σ.

Определение 2.1. *Функцята $F : X \to Y$ се нарича Хьолдерова от степен α, ако съществува константа c, такава че $|F(x) - F(y)| < c|x-y|^\alpha$, $x, y \in X$.*

Функциите f и R са Хьолдерови в $\mathbb{R} \times D_T$, и освен това са C^1 - функции (1 път диференцируеми) спрямо третата променлива в (22) а), т.е. $f(\cdot,\cdot,z), R(\cdot,\cdot,z)$ (C^1 - функции спрямо z).

Предполагаме, че $f, R \in C^{1+\theta}$. Освен това, имаме дефинирана функция $U_0(x), x \in \Omega$, такава че $\eta_0(0,x) = u_0(x)$.

Ще казваме, че едно решение $u(\cdot,\cdot)$ на (22) принадлежи на класа $C^{1,2}(D_T)$, ако $u(\cdot,x) \in C^1, \quad u(t,\cdot) \in C^2$ и също са удовлетворени условията в (22).

Определение 2.2. *Нека функцията $R(\cdot,\cdot,z)$ е монотонна и ненарастваща, относно z. Тогава функцията $\tilde{u} \in C^\theta(E_T)C^{1,2}(D_T)$ наричаме горно решение на (22) ако:*

$$\begin{aligned} &(a)\tilde{u}_t - L\tilde{u} \geq f(t,x,u(t,x)) + R(t,x, \max_{s\in[t-\sigma,t]} \tilde{u}(s)) \text{ в } D_T,\\ &(b)\ B\tilde{u} \geq h(t,x) \text{ върху } S_T,\\ &(c)\ \tilde{u}(t,x) \geq \eta_0(t,x) \text{ в } D_{-\sigma}. \end{aligned} \tag{23}$$

Аналогично, $\hat{u} \in C^\theta(E_T)\bigcap C^{1,2}(D_T)$ се нарича долно решение, ако удовлетворява обратните неравенства в (23).

Определение 2.3. *Двойката $\tilde{u}(t,x), \hat{u}(t,x)$, наричаме наредена, ако $\tilde{u} \geq \hat{u}$ в E_T. Тогава множеството от всички функции $z(t,x)$, които удовлетворяват $\hat{u} \leq z \leq \tilde{u}$ в E_T означаваме, чрез $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$ и го наричаме сектор.*

Съществуват задачи от вида (22), чиито решения не зависят от t. Тези решения наричаме стационарни решения. Ще ги означаваме $u_s = u_s(x)$.

Определение 2.4. *Едно стационарно решение $u_s(x)$ на (22) е устоичиво, ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува друго положително число $\delta > 0$, такова че*

$$|u(t,x) - u_s(x)| < \varepsilon \text{ в } D_T, \tag{24}$$

винаги когато $|u(t,x) - u_s(x)| < \delta$ в Ω; тук имаме $u_0(x) = \eta_0(0,x)$.

Ако задачата (22) е дефинирана в CD вместо в D_T и ако

$$\lim_{t\to\infty} |u(t,x) - u_s(x)| = 0, \text{ равномерно в } \quad \bar{\Omega}, \tag{25}$$

тогава u_s е асимптотически устойчиво.

Стационарното решение u_s е наустойчиво, ако не е изпълнено горното определение за устойчивост.

Забележка 2.3. *Условието (24), отнасящо се за непрекъснати функции в класа $C(\bar{\Omega})$, е еквивалентно на*

$$\|u - u_s\|_0 = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |u(t,x) - u_s(x)| < \varepsilon, \text{ за всяко } \quad t > 0, \tag{26}$$

винаги когато $|u_0 - u_s|_0 < \delta$ и удовлетворява (25) т.е. има формата

$$\lim_{t\to\infty} \|u - u_s\|_0 = 0. \tag{27}$$

Това означава, че ако u_s е асимптотически устойчиво, тогава то е едно изолирано стационарно решение, в смисъл, че има околност U на u_s в $C(\bar{\Omega})$, такава че u_s е единственото стационарно решение в тази околност U.

Определение 2.5. *Едно стационарно решение u_s наричаме експоненциално асимптотически устойчиво, ако условията (24) и (25) са изпълнени и сходимостта в (25) е от експоненциален тип, т.е. съществуват положителни константи ρ и α, такива че*

$$|u(t,x) - u_s(x)| \leq \rho e^{-\alpha t} \text{ за всяко } t > 0, x \in \bar{\Omega}, \tag{28}$$

винаги когато последното е валидно в точката $t = 0$.

Определение 2.6. *Множеството от начални функции $\eta_0(t,x)$, дефинирани в $[-\sigma, 0] \times \Omega$, при удовлетворено условие $\eta_0(0,x) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, за което съществува решение $u(t,x)$ на (22) удовлетворяващо (24) и (25), наричаме зона на устойчивост за u_s.*

Ако това е вярно за всички начални функции, тогава u_s е глобално асимптотически устойчиво.

Тук въвеждаме следните изисквания:

$\tilde{H}$**1**.

$$\begin{aligned} &f(t,x,0) = R(t,x,0) = 0, (t,x) \in D_T, \\ &h(t,h) = 0, \beta_0(x) \neq =, (t,x) \in S_T. \end{aligned} \tag{29}$$

Разглеждаме елиптичната задача

$$\begin{aligned} &-Lu = \lambda u \text{ в } \Omega, \\ &Bu = 0 \text{ върху } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{30}$$

Приемаме, че $\lambda(t)$ и $\Phi(x)(t)$ са главната собствена стойности и съответстваща собствена функция, която е нормализирана, т.е.

$$\max\{\Phi(x)(t) : x \in \bar{\Omega}\} = 1,$$

и освен това, $\lambda(t) \geq \lambda_0 > 0, \forall t$.

$\tilde{H}$**2**.

Съществува положително число $0 < \alpha < \alpha_0$, такова че

$$f(t,x,\eta) \leq (\lambda_0 - \alpha)\eta, \text{ за всяко } \eta \geq 0 \text{ и } (t,x) \in D_T. \tag{31}$$

$\tilde{H}$**3**.

Съществува непрекъсната функция $\gamma(\sigma,t)$, $\gamma : \mathbb{R}^+{}_0 \times \mathbb{R}^+{}_0 \to \Gamma$ и освен това,

$$R(t,x,\xi) \leq \gamma(\sigma,t)\xi, \text{ за всяко } \xi > 0 \text{ и } (t,x) \in D_T, \tag{32}$$

където Γ е ограничено реално подмножество на $\mathbb{R}^+$.

$\tilde{H}$**4**.

Съществуват $\rho, A(\sigma), \gamma(\sigma,t)$, където $\rho > 0$ (число), A и γ са непрекъснати относно своите аргументи, така че функционалът $\tilde{\lambda}_t(x)(t)$ удовлетворява свойството

$$\tilde{\lambda}_t(x)(t) \leq \frac{A(\sigma)}{\gamma(\sigma,t)} z(t). \tag{33}$$

Лема 6. *Предполагаме, че* $\mathbf{\tilde{H}4}$ *е изпълнено. Тогава функцията $z = \rho e^{(-\alpha+A)t}$, $(z(0) = \rho)$ удовлетворява неравенството*

$$\frac{dz}{dt} \geq -\alpha z + \gamma(\sigma,t)\lambda_t(x)(t). \tag{34}$$

Теорема 2.3. *Нека $f(t,x,\xi)$ и $R(t,x,\xi)$ са C^1 - функции, относно $\xi \in \mathbb{R}^+$ и нека условията* $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{4}$ *са удовлетворени и също така условието* $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{6}$ *[27]. Тогава съществува единсвено неотрицателно решение $u = u(t,x)$ на (22). Освен това, ако*

$$0 \le u(0,x) \le \rho\Phi(x),$$

тогава имаме

$$0 \le u(t,x) \le \rho e^{(-\alpha+A)t}\Phi(x), \quad (t,x) \in E_T, \tag{35}$$

винаги когато е в сила за $t = 0$.

Доказателство. Очевидно $\hat{u} \equiv 0$ е долно решение за (22). Ще докажем, че $\tilde{u} = z(t)\Phi(t), (z > 0)$ е горно решение за (22). Заместваме $\tilde{u}$ в (22),

$$\tilde{u_t} - L\tilde{u} = z'(t)\Phi(x) - z(t)L\Phi(x) = [z' + \lambda_0 z]\Phi(x) \ge$$

$$\ge f(f(t,x,z(t)\Phi(x)) + R(t,x,\tilde{\lambda}_t(x)(z(s)\Phi(x)(t))$$

в D_T. За да докажем горното неравенство искаме следната оценка да бъде удовлетворена:

$$\tilde{u_t} - L\tilde{u} = z'\Phi - zL\Phi = (z' + \lambda_0 z)\Phi(x) \ge (\lambda_0 - \alpha)\Phi(x) +$$

$$+\gamma(\sigma,t)\Phi(x)\tilde{\lambda}_t(x)(z)(t).$$

Получаваме следното неравенство:

$$(z' + \lambda_0 z)\Phi(x) \ge (\lambda_0 - \alpha)z\Phi(x) + \gamma(\sigma,t)\Phi(x)\tilde{\lambda}_t(x)(z),$$

от където следва неравенството (34),

$$z' \ge -\alpha z + \gamma(\sigma,t)\tilde{\lambda}_t(x)(z),$$

т.е. търсим функция $z(t)$, такава че да удовлетворява (2.3) и освен това, неравенството $z(t)\Phi(x) \ge \eta_0(t,x)$ в D_σ. От Лема 6 следва, че по дефиниция $z = \rho e^{(-\alpha+A)t}$ удовлетворява (34), като ρ е избрано, така че $\rho \ge \eta_0(t,x) > 0$ в D_σ.

Също така, имаме

$$\begin{array}{l} B\tilde{u} = z(tB\Phi(x) = 0, \\ \text{и } \tilde{u}(t,x) = z(t)\Phi(t) \ge \eta_0(t,x), \\ \text{откъдето } \tilde{u}(0,x) = z(0)\Phi(t) \ge \eta_0(0,x) \text{ в } \bar{\Omega}. \end{array} \tag{36}$$

В последната стъпка на доказателството следва да отбележим, че решението на (22) съществува, благодарение на Теорема 2 в [27], с което твърдението е доказано. □

От доказаното твърдение (Теорема 2.3) се вижда, че за задачата (22) съществува единствено решение (35), заключено между $\hat{u}$ и $\tilde{u} \equiv \rho e^{(-\alpha+A)t}\Phi(t)$, $(t,x) \in E_T$.

От неравенството (35) следва още, че поведението на решението $u(t,x)$ е същото, като на горното решение $\tilde{u}(t,x)$, при $t \to \infty$, т.е. $u(t,x)$ монотонно ще намалява с нарастване на t, при положение, че еволюционният процес стартира с начална функция $u(0,x)$ заключена между нула и $\rho\Phi(x)$, т.е.

$$0 \le u(0,x) \le \rho\Phi(x)$$

и тогава

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) \le \lim_{t\to\infty} \rho e^{(-\alpha+A)t}\Phi(t),$$

при $\alpha > A > 0$ и равномерно по x, $(t,x) \in E_T$.

Функционалът $\lambda_t(x)(t)$, може да има различна форма в зависимост от приложенията:

$$\begin{aligned}
\lambda_t(x)(t) &= f(t, x(t), x(t-\sigma)), \text{ уравнение със закъснение} \\
\lambda_t(x)(t) &= \max_{s\in[t-\sigma,t]} x(s), \text{ уравнение с "maxima"} \\
\lambda_t(x)(t) &= \int_{t-\sigma}^{t} g(s+\sigma)x(s)ds \text{ интегрална форма .}
\end{aligned} \tag{37}$$

Съществуват и други форми на $\lambda_t(x)$ разглеждани в литературата. Приложенията са, главно в биологията, екологията и автоматичното управление.

3 Заключение

В настоящата работа е дискутирано съществуването на устойчиво решение за ФДУ при определени изисквания върху векторното поле и началната функция. Направен е обзор на изследванията върху началната задача и са цитирани голям брой различни публикации върху разглежданите теми. Предложен е критерий за устойчивост на решението на началната задача, за ФДУ, смутено чрез достатъчно "малка" функция удовлетворяваща определени условия. Доказана е устойчивост (в смисъл на Ляпунов) с помощта на прецизни оценки за различните решения. Резултатът е публикуван официално, [1].

Дискутирани са въпроси за съществуване и единственост на устойчиви решения за параболични уравнения с "maxima" и определени начални и гранични условия, [115].

Разгледана е задача за съществуване на приближено решение за ФДУ с импулси. Дискутиран е въпросът за устойчивост на полученото числено решение чрез метода на Рунге-Кута и Ермитови полиноми, [114].

Въпреки че съществуват множество публикации върху задачите свързани с ФДУ, качествената теория за този клас уравнения не е напълно развита. Съществуват множество отворени въпроси, свързани главно с бифуркационната теория за ФДУ, устойчивостта на решенията, класификацията на особените точки и т.н. Не е развита напълно качествената теория за автономни ФДУ. Пертурбационният анализ при такива уравнения крие също много бели полета. Съществуват въпроси върху структурната устойчивост на автономни ФДУ, за които все още няма пълен отговор. Така например, задачата за съществуването на гранични цикли, както и техния брой за ФДУ, е все още нерешена.

През последните години се появиха множество публикации посветени на т.н. хибридни системи. От особен интерес за такива системи е въпросът за устойчивостта на решенията, интегруемостта и съществуването на периодични решения. За всичките тези проблеми изследванията продължават.

СПИСЪК
на публикациите свързани с дисертационния труд

1. A. Ahmad, K. Haidar, N. Javad, A. Zeinev, A criterion to uniform stability for functional perturbed differential equations, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 108, №1, (2016), 107-122

2. A. Zeinev, N. Kitanov, Estimates for Functional Partial Differential Equations, *The Journal of Macro Trends in Technology and Innovation.* Volume 2, Issue 1, (2014), 17-29

3. A. Zeinev, Adil , Nasur, On the stability of the solutions for a delay differential equations with discontinuity - (on-print)

СПИСЪК
на докладите свързани с дисертационния труд

1. Участие на конференция с международно участие по случай 60 години ХТМУ - *A class of functional differential equations with "maxima". - Integrabiliti of fluid dynamics models.*

2. Участие с доклад в международна конференция *Business and Social Science Research Conference The Macro Journals Conference on Medicine, Science, and Technology – Дубровник, TEMA: Estimates for Functional Partial Differential Equations.*

3. Участие с доклад в международна конференция New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences" *Тема: Numerical Methods for Impulsive Delayed Differential Equations"*

СПИСЪК
на публикациите извън дисертационния труд

1. A class of functional differential equations with" maxima " A Zeinev, V Radeva, D Kolev, V Todorov, N Kitanov

2. Numerical methods for delayed differential equations with discontinuities, T. Donchev, D. Kolev, A. Lazi, A. Nosheen, M. Rafaqat, A. Zeinev

3. Integrability of Fluid Dynamics Models V Radeva, V Todorov, D Kolev, A Zeinev, N Kitanov - Metallurgy (UCTM), 2013

4. Charged Particles Through Electromagnetic Fields Dimitar Kolev, Valeri Todorov, Adem Zeinev

5. Caratheodory Differential Equations On Cones, T. Donchev, D. Kolev, A. Lazi, A. Nosheen, M. Rafaqat, A. Zeinev

6. Elementary Proof of the John's Theorem for Nonsmooth Functions, R. P. Ivanov, A. Zeinev

7. Understanding educational quality in informatics in secondary school, V. Peychev, K. Panovska, A. Tatsis, A. Zeinev

СПИСЪК
на докладите извън дисертационния труд

1. Участие в постерна сесия – май 2012 г. Тема: Charged particles through electromagnetic fields Dimitar Kolev, Valeri Todorov, Adem Zeinev

2. Участие в постерна сесия на ХТМУ – Май 2013 г - Параболични частни диференциални уравнения с "maxima" - Geometry of simple states to a model of gaz-dynamics

Литература

[1] A. Ahmad, K. Haidar, N. Javad, A. Zeinev, A criterion to uniform stability for functional perturbed differential equations, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 108, №1, (2016), 107-122

[2] O. Arino , M. L. Hbid, Ait Dads E., Delay Differential Equations and Applications, Springer, (2006) V. Acary, B. Brogliato, Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems. Applications in Mechanics and Electronics, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 2008.

[3] R. Baier, Q. Din, T. Donchev, Higher order Runge-Kutta methods for impulsive differential systems, *Applied Mathematic and Computations* **218** (2012) 11790-11798 .

[4] R. Baier, T. Donchev, Discrete approximations of impulsive differential inclusions, *Num. Funct. Anal. Optim.* **31** (2010), 653-678.

[5] D. Bainov, V. Angelov, On the functional differential equations with ”maximums”, Appl. Anal. **16** (1983), 187–194.

[6] D. Bainov, D. Mishev, Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, IOP Publishing Ltd 1991.

[7] D. Bainov, V. Petrov, V. Proytcheva, Asymptotic behaviour of second order neutral differential equations with ”maxima”, Tamkang Journal of Mathematics **25** (1995), 267–275.

[8] D. Bainov, V. Petrov, V. Proytcheva, Oscillatory and asymptotic behaviour of second order neutral differential equations with ”maxima”, Dynamic Systems and Applications **4** (1995), 137–146.

[9] D. Bainov, V. Petrov, V. Proytcheva, Oscillation and nonoscillation of first order neutral differential equations with maxima, SUT Journal of Mathematics **31** (1995), 17–28.

[10] D. Bainov, A. Zahariev, Oscillating and asymptotic properties of a class of functional differential equations with maxima, Czechslovak Math. Journal **34** (1984), 247–251.

[11] D. Bainov, S. Hristova, Differential equations with MAXIMA, Francis and Taylor, (2011).

[12] Bainov D., Mishev D. Oscillation theory for neutral differential equations with delay Hilger, 1991,(ISBN 0750301422).

[13] D. Bainov, A. Myshkis and A. Zahariev, Necessary and sufficient conditions for oscillation of the solutions of linear autonomous functional differential equations of neutral type with distributed delay J. Math. Anal. Appl. (to appear).

[14] B. Balachander, T. Nagy, D. Gilsinn, Delay differential equations. Springer, (2009).

[15] G. Ballinger, X. Liu, Permanence of population growth model with impulsive effects, Mathematics and Computer Modeling, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.

[16] A. Bellen, M. Zennaro, Numerical methods for delay differential equations, Springer, (2009).

[17] A. Bellman, K. L. Cooke, Differential-difference equations, AP, (1963).

[18] Busenberg, Martelli, Delay-differential equations and dynamical systems, Springer (1991).

[19] E. Coddington, N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).

[20] M. Carver, Efficient integration over discontinueties in ordinary differential equations, *Appl. Math. Comp.* **20** (1978), 190-196.

[21] Q. Din, T. Donchev, D. Kolev, Numerical approximations of impulsive delay differential equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **34 No. 7** (2012), 728740.

[22] Q. Din, T. Donchev, A. Nosheen, M. Rafaqat, Runge-Kutta Method for Differential Equations with Variable time of Impulses, Numerical Functional Analysis and Optimization, (2015), 1-12.

[23] A. Dishliev, D. Bainov, Conditions for the absence of the phenomenon"beating" for systems of impulse differential equations, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, Vol. 13, № 3, (1985), 237-256.

[24] A. Dishliev, D. Bainov, Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with impulses, *Aplicable Analysis*, Vol. 18, № 1 and № 2, (1984), 67-73.

[25] A. Dishliev, K. Dishlieva, S. Nenov, Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. *Methods and applications*, Academic Publications, Ltd. (2011).

[26] E. Doha, F. Rihan, M.Hasan, N. Kamel, Mono-implicit Runge–Kutta method for delay differential equations, *J. Egyptian Math. Soc.* **17** (2009), 213–232.

[27] T. Donchev, N. Kitanov, D. Kolev, Stability for the solutions of parabolic equations with MAXIMA, *PanAmerican Mathematical Journal*, **Vol. 20 No. 2** (2010), 2, 119.

[28] T. Donchev, D. Kolev, A. Nosheen, M. Rafaqat, A. Zeinev, Caratheodory's Differential Equations on Cone's, International *Journal of Pure and Applied Mathematics*, (2015), 129-143.

[29] T. Donchev, D. Kolev, A. Nosheen, M. Rafaqat, A. Zeinev, Nmerical Methods for Delayed Differential Equations with Discontinuities, *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, (2014), 55-65.

[30] C. M. Dafermos, E. Feiresli, Handbook of differential equations. Evolutionary equations, vol. 2, Elsevier (2005).

[31] B. Dai, H. Su, D. Hu, Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.

[32] L. Dong, L. Chen, P. Shi, Periodic solutions for a two-species nonautonomous competition system with diffusion and impulses, Chaos Solitons and Fractals, (2007), Vol. 32, № 5, 1916-1926.

[33] L. Dong, L. Chen, L. Sun, Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2007), Vol. 8, № 2, 572-578.

[34] R. D. Driver, Ordinary and delay differential equations, Springer, (1972).

[35] S. Elaydi, A. Yakubu, Global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking, J. Diff. Equations Appl., (2002), Vol. 8, № 6, 537-549.

[36] W. Engrigit, K. Jakson, S. Norsett, P. Thomsen, Effective solutions of discontinuous IVP's usingg a Runge–Kutta formula pair with interpolants, *Appl. Math. Comp.* **27** (1988) 313-335.

[37] L. E. El'sgol'ts S. B. Norkin, Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments, AP, (1973).

[38] T. Erneux, Applied delay differential equations, Springer, (2009).

[39] S. Gao, L. Chen, J. Nieto, A. Torres, Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, Vaccine, (2006), Vol. 24, № 35-36, 6037-6045.

[40] S. Gao, Z. Teng, J. Nieto, A. Torres, Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay, J. Biotechnol., (2007), Article ID 64870.

[41] Gluesing-Luerssen, H. Liner delay-differential systems with commensurate delays. Algebraic approach, Springer, (2002).

[42] K. Gopalsamy, Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).

[43] K. Gopalsamy, B. Zhang, On delay differential equations with impulses, J. Math. Analysis and Applications, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.

[44] A. N. Gorban, Singularities of transition processes in dynamical systems. Qualitative theory of critical delays, (2004).

[45] I. Gyori, G. Ladas, Oscialtion theory of delay differential equations, OUP, (1991).

[46] H. Smith, An introduction to delay differential equations with applications to the life science, (2010).

[47] J. Hale, Theory of functional differential equations, Springer-Verlag, (1977).

[48] J. Hale, Functional differential rquations, Springer-Verlag, New-York. Heidelberg. Berlin, (1971).

[49] J. Hale, Ordinary differential equations, Krieger, (1980).

[50] J. Hale, K. Kocak, Dynamics and bifurcations, (1991).

[51] N. Hamzah, M. Mamat, J. Kavikumar, L. Chong, N. Ahmad, Impulsive differential equations by using Euler method, *Appl. Math. Sci.* **4** (2010) 3219–3232.

[52] F. Hartman, Ordinary differential equations, John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, (1964).

[53] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, Functional differential equations with infinite delay, Springer, (1991).

[54] P. Hoevel, Control of complex nonlinear systems with delay, Springer, (2010).

[55] Huo H-F., Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses, Computers and Mathematics with Applications, (2004), Vol. 48, № 12, 1833-1846.

[56] V. B. Kolmanovskii., V. R. Nosov, Stability of functional differential equations, Academic press, INC, Moscow, USSR, (1986).

[57] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations, Moscow, Russia, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, (1999).

[58] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, Applied Theory of Functional Differential Equations, Springer-Science+Business Media, B. V. (1992).

[59] N. N. Krasovskii, Stability of motion, applications of lyaponov second method to differential systems and equations with delay, Standforf University Press, Standford, California, 1963.

[60] A. D. Myshkis, General theory of differential equations with delay. Uspehi, Math. Nauk99-141, (1949).

[61] A. D. Myshkis, Some problems in the theory of differential equations with deviating arguments. Amer. Math. Soc. Trans. 2. 237-246 (1976).

[62] A. D. Myshkis, On some problems in the theory of differential equations with deviating arguments. Uspehi. Math. Nauk. 173-202 (1977).

[63] M. Jim, Cushing, Integrodifferential equations and delay models in population dynamics, (1977).

[64] M. Lakshmanan, D. V. Senthilkumar, Dynamics of nonlinear time-delay systems, Springer, (2010).

[65] B. Liu, Z. Teng, W. Liu, Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations, Chaos Solitons and Fractals, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.

[66] B. Liu, Y. Zhang, L. Chen, The dynamical behaviors of a Lotka-Voltera predator-prey model concerning integrated pest management, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2005), Vol. 6, № 2, 227-243.

[67] L. Liu, Y. Ye, Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses, International J. of Computational and Math. Sciences, (2011), Vol. 5, № 4, 229-235.

[68] S. Liu, L. Chen, G. Luo, Y. Jiang, Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure, J. of Math. Analysis and Applications, (2002), Vol. 271, № 1, 124-188.

[69] X. Liu, L. Chen, Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator, Chaos Solitons and Fractals, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.

[70] X. Liu, L. Chen, Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, J. of Math. Analysis and Applications, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.

[71] X. Liu, G. Li, G. Luo, Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse, J. of Math. Analysis and Applications, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.

[72] G. Michael, Stability of vector differential delay equations, Springer (2010).

[73] W. Michiels, S. Nicilescu, Stability and stabilization of time-delay systems, SIAM, (2007).

[74] J. Nieto, R. Rodriguez-Lipez, Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations, J. of Math. Analysis and Applications, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.

[75] J. Nieto, The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations, Fuzzy sets and systems, (1999), Vol. 102, № 1, 159-262.

[76] S. B. Norkin, Differential equations of the socond order with retarded arguments, AMS, (1972).

[77] F. Ismail, R. Al-Khasawneh, A. Lwin, M. Suleyman, Numerical treatment of delay differential equations by Runge–Kutta method using Hermite interpolation, *Matematika* **18** (2002) 79–90.

[78] M. Rafaqat, Approximation and Viability of Dynamical Systems, PhD thesis, GCU University Lahore, (2016).

[79] D. Roger, Nussbaum, Differential-delay equations with two time lags, (1978).

[80] Y. Rogovchenko, Nonlinear Impulse evolution systems and applications to population models, J. Math. Analysis and Applications, (1997), Vol. 207, № 2, 300-315.

[81] Y. Saito, The necessary and sufficient condition for global stability of a Lotka-Volterra cooperative or competition systems with delays, J. of Math. Analysis and Applications, (2002), Vol. 268, № 1, 109-124.

[82] A. Samojlenko, N. Perestyuk, Impulsive differential equations, World Scientific, Singapore, (1995).

[83] J. Shen, J. Li, Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.

[84] S. Samir, Oscilation theory of delay differential and difference equations second and third order, (2010).

[85] E. Schmitt, Uber eine Klasse linear funktionaler Differentialgleichungen. Math. Ann.. 70. 499-524.

[86] L. Smith, L. Wahl, Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects, Bulletin of Math. Biology, (2005), Vol. 67, № 4, 783-813.

[87] I. Stamova, Stability analysis of impulsive functional differential equations, Walter de Gruyter-Berlin-New York, (2009).

[88] B. Stavros, Mario martelli, Delay-differential equations and dynamical systems, (1991).

[89] S. Sun, L. Chen, Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, Applied Mathematics and Computation, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.

[90] F. Wang, G. Pang, L. Shen, Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, J. of Computational and Applied Math., (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.

[91] H. Wang, E. Feng, Z. Xiu, Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.

[92] W. Wang,J. Shen, Z. Luo, Partial survival and extinction in two competing species with impulses, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.

[93] X. Wang, Q. Song, X. Song, Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay, Applied Math. Modeling, (2009), Vol. 33, № 11, 4231-4240.

[94] Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.

[95] Y. Xia, Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.

[96] X. Xian, D. O'Regan, R. Agarwal, Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems, (2008), Vol. 2008, Article ID 197205.

[97] J. Yan, A. Zhao, J. Nieto, Existence and global attractively of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, Mathematics and Computer Modeling, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.

[98] Y. Yang, J. Cao, Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.

[99] Z. Yang, D. Xu, Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, IEEE Trans. Circuits Syst., (2005), Vol. 52, 517-521.

[100] Z. Yang, D. Xu, L. Xiang, Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays, Physics Letters A, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.

[101] A. Yagi, Abstract parabolic evolutions equations and theier applications, Springer, (2010).

[102] S. Yi, P. Nelson, A. Ulsoy, Time-delay systems. Analysis and control using the Lambert W function, WS, (2010).

[103] P. Zabrejko, D. Bainov, S. Kostadinov, Characteristic exponents of impulsive differential equations, International J. of Theoretical Physics, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.

[104] Y. Zang, J. Sun, Strict stability of impulsive functional differential equations, J. of Math. Analysis and Applications, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.

[105] S. Zavalishchin, A. Sesekin, Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).

[106] E. Zeeman, M. Zeeman, From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems, Transactions of the American Math. Society, (2002), Vol. 355, № 2, 713-734.

[107] G. Zeng, F. Wang, J. Nieto, Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, Advances in Complex Systems, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.

[108] H. Zhang, L. Chen, J. Nieto, A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2008), Vol. 9, № 4, 1714-1726.

[109] W. Zhang, M. Fan, Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, Mathematical and Computer Modelling, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.

[110] X. Zhang, Z. Shuai, K. Wang, Optimal impulsive harvesting policy for single population, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651.

[111] A. Zhao, V. Lakshmikantham, Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, J. of Math. Analysis and Applications, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.

[112] Z. Zhao, J. Jiang, A. Lazer, The permanence and global attractively in a nonautonomus Lotka-Volterra system, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2004), Vol. 5, № 2, 265-276.

[113] B. Zhang, Y. Zhoy, Qualitative analysis of delay partial difference equations, Nindawi, (2007).

[114] A. Ahmad, N. Javaid, M. Rafaqat, A. Zeinev, On the stability of the solutions for a delay differential equations with discontinuity (on-print)

[115] A. Zeinev, N. Kitanov, Estimates for Functional Partial Differential Equations, *The Journal of Macro Trends in Technology and Innovation.* Volume 2, Issue 1, (2014), 17-29

[116] С. Борисенко, В. Косолапов, А. Оболенский, Устойчивость процесов при неперерывных и дискретных возмущениях, Наукова думка, Москва, (1988).

[117] А. Е. Кобринский, А. А. Кобринский, Выброударные системы, Наука, Москва, (1973).

[118] Р. Козлов, К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, Диффернц. уравнения, (1974), Том 10, № 7, 1264-1275.

[119] Н., Крылов, Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Изд. УкрССР, Киев, (1937).

[120] В. Матросов, О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, Диффернц. уравнения, (1967), Том 3, № 3, 395-409.

[121] В.Матросов, О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями II, Диффернц. уравнения, (1967), Том 3, № 5, 869-878.

[122] В. Мильман, А. Мышкис, Об устойчивости движения при наличии толчков, Сиб. мат. журнал, (1960), Том 1, № 2, 233-237.

[123] А.Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Изд. 2-е, Москва, Наука, (1972).

[124] А.Д. Мышкис, Л. Ельсгольц "Сосотояние и проблеми теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, (1967), Успехи математических наук, т XXXII, вьп. 2(134).

[125] В. Г. Пименов, Функционални -диференциални уравнения в биологии и медицине.

[126] Е. Попов, Автоматическое регулирование и контроль, Москва, (1966).

[127] В. Рожко, Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах, Дифференц. уравнения, (1975), Том 11, № 6, 1005-1012.