



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ДЕПАРТАМЕНТ ПО ФИЗИКОМАТЕМАТИЧЕСКИ

И ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА”

Димитър Стойков Стойков

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

МЕТОД НА ГРАНИЧНИТЕ УРАВНЕНИЯ ЗА УСТОЙЧИВОСТ НА ИМПУЛСНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

за придобиване на образователната и научна степен „доктор”

по научна специалност 4.5. Математика

(Диференциални уравнения)

Научни ръководители: доц. д-р Светослав Ненов

доц. д-р Катя Дишлиева

Научно жури:

1. доц. д-р Йорданка Ангелова - Председател
2. проф. дмн Гани Стамов - Рецензент
3. проф. д-р Маргарита Димитрова - Рецензент
4. доц. д-р Валентина Пройчева
5. доц. д-р Катя Дишлиева

София, 2014

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от разширен катедрен съвет на катедра Математика при Химикотехнологичен и металургичен университет (ХТМУ), град София, проведен на 17. 01. 2014 г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 21.03. 2014 г. от 13:00 часа в зала 424, сграда А на ХТМУ – София.

Основни данни за дисертационния труд:

- автор: гл. ас. Димитър Стойков Стойков;
- месторабота на автора: главен асистент в катедра Математика на ХТМУ;
- научни ръководители: доц. д-р Светослав Ненов и доц. д-р Катя Дишлиева;
- заглавие: 'Метод на граничните уравнения за устойчивост на импулсни диференциални уравнения';
- област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
- професионално направление: 4.5. Математика;
- научна специалност: Диференциални уравнения;
- шифър: 01 01 05;
- съдържание: увод, основно изложение, библиография, заключение, декларация, списък на публикациите на автора по дисертацията;
- брой параграфи в основното изложение: 6, разпределени в 2 глави;
- брой страници на дисертацията: 122;
- брой публикации на автора, свързани с дисертационния труд: 3;
- брой литературни източници в библиографията: 234.

За удобство означенията и номерацията в автореферата и дисертационния труд са идентични.

Описание на основните математически обекти, изследвани в дисертационния труд

Разгледаните и изучавани в дисертационния труд математически обекти и свързаните с тях проблеми се отнасят към фундаменталната и качествена теория на импулсните системи неавтономни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия.

Един от възможните критерии за класификация на тези диференциални уравнения е по начина на определяне на моментите на импулсни въздействия. Съгласно този критерий, са се обособили няколко специфични класове, от които тук ще посочим следните:

1 клас. Импулсните моменти са предварително фиксирани. Този клас уравнения е сравнително най-пълно изучен (виж [1], [2], [3], [27], [30], [48], [49], [51], [66], [132], [135]; [136], [145], [156], [161], [222] и [228]);

2 клас. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които траекторията анулира предварително зададени функции, дефинирани във фазовото пространство на системата импулсни диференциални уравнения (виж [39], [75], [96], [97]; [104], [120], [128], [188] и [190]);

3 клас. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които траекторията среща предварително зададени множества (с възможно най-обща структура). Тези множества са дислоцирани във фазовото пространство на системата и се наричат импулсни (виж [4], [5], [77], [86]; [117], [118], [119], [126] и [127]);

4 клас. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива на изучаваната система анулира предварително зададени функции, дефинирани в разширеното фазово пространство на системата (виж [78], [81], [85], [87]; [98], [111] и [204]);

5 клас. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива среща предварително зададени множества, разположени в разширеното фазово пространство. Най-често, тези множества представляват фамилия непресичащи се хиперповърхнини (виж [20], [55], [56], [61], [85], [95], [107], [109], [174], [175] и [176]);

6 клас. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които решението минимизира (максимизира) дадена функция или функционал ([40], [41], [42], [57], [180], [216] и [233]);

7 клас. Импулсните моменти имат случаен характер (виж [193], [220] и [225]) и др.

В дисертационния труд се изучават системи диференциални уравнения от посочения по-горе 5 клас. По-подробно, тези системи включват следните обособени и взаимносвързани елементи:

1. Система нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения, описваща непрекъснатите етапи (гладката част) от динамиката на моделираните процеси. Системата има вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

където:

- функцията $f \in C[R^+ \times D, R^n]$, т.е. дясната страна на горната система е непрекъснатата функция в дефиниционното си множество,
- фазовото пространство D е непразна област (отворено и свързано множество) от R^n ,
- съответните начални задачи на горната система притежават единствени решения в D ;

2. Условия за последователно определяне на моментите на импулсни въздействия. За целта са зададени изброимо множество от непресичащи се хиперповърхнини $\sigma_i, i = 1, 2, \dots$, дефинирани във фазовото пространство на горната система. Имаме:

$$\sigma_i = \{(t, x); t = t_i(x), x \in D\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където функциите $t_i \in C[D, R^+]$ и са валидни неравенствата

$$t_1(x) < t_2(x) < \dots, \quad x \in D.$$

Импулсните моменти са последователни решения на част от системите алгебрични уравнения, които имат вида:

$$t_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където $x(t)$ е решението на системата диференциални уравнения от точка 1.

Последователните моменти на импулсни въздействия означаваме с $\tau_1, \tau_2, \dots$.

Следователно, изпълнени са равенствата

$$\tau_i = t_{j_i}(x(\tau_i)), \quad i = 1, 2, \dots.$$

В горното равенство с j_i е означен номерът на хиперповърхнината, която интегралната крива $(t, x(t))$ среща в момента τ_i . В общия случай е изпълнено $i \neq j_i, i = 1, 2, \dots$. С други

думи, не е задължително в i -тия по ред импулсен момент интегралната крива $(t, x(t))$ да среща i -та хиперповърхнина.

3. Импулсните функции, чрез които се определят големините (и посоките) на импулсните въздействия, означаваме с $I_1, I_2, \dots$. Тези въздействия аналитично се описват както следва:

$$x(\tau_i + 0) = x(\tau_i) + I_{j_i}(x(\tau_i)), \quad i = 1, 2, \dots.$$

Импулсните функции $I_1, I_2, \dots$ са непрекъснати във фазовото пространство на разглежданата система. Имаме $I_i \in C[D, R^n], i = 1, 2, \dots$. Накрая, ще обърнем внимание на естественото ограничение, което се налага върху импулсните функции, а именно:

$$(\forall x \in D) \Rightarrow (x + I_i(x) \in D), \quad i = 1, 2, \dots,$$

т.е. $(Id + I_i) : D \rightarrow D$, където Id е идентитетът в R^n . С помощта на горното ограничение заключаваме, че след импулсни въздействия интегралната крива на разглежданата система импулсни диференциални уравнения "попада" отново във собственото си разширеното фазово пространство.

Решенията на съответните начални задачи на разглежданите импулсни системи диференциални уравнения са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род (това са точките $\tau_1, \tau_2, \dots$), в които решенията са непрекъснати отляво.

Специфични особености и възникващи трудности при изучаване на математическите обекти от дисертацията

Специфичните особености, свързани с изследването на системите с импулсни въздействия, а също така и възникващите трудности при тяхното изучаване, са следните:

1. **Прекъснатост на решението на съответната начална задача:** Точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът“ е ограничен. Обикновено се предполага, че решението е непрекъснато отляво в точките на импулсни въздействия;
2. **Загиване на решение или наличие на ефекта „биене“:** В тези случаи може да се достигне до ситуация, при която импулсните моменти да притежават точка на съгъстяване. Следователно, решението не е продължимо надясно от тази точка. Това означава, че решението „загива“. Поради тази причина, при описаната по-горе ситуация, не може да се изучават различни аспекти на фундаменталната и качествена теория на импулсните системи диференциални уравнения. Като примери

на качествени характеристики, които решенията не притежават (в описаната по-горе ситуация), тук ще посочим: различни асимптотични свойства на решенията, периодичност, устойчивост, еквивалентност на решенията и др. В частност не е приложим и метода на граничните уравнения, с помощта на който е възможно да се изучават различни видове устойчивости. На феномена "биене" са посветени множество изследвания, от които тук ще посочим следните [20], [22], [61], [106], [108], [111], [193] и [208];

3. **Сливане на решения:** Обикновено сливанията се осъществяват след момента на импулсно въздействие, което се осъществява върху поне едно от сливащите се решения. По-конкретно, след някое импулсно въздействие върху решението $x(t)$ в импулсния момент τ_i , точката $x(\tau_i + 0) = x(\tau_i) + I_{j_i}(x(\tau_i))$ попада върху тректорията на друго решение. Следователно, след момента на импулсно въздействие τ_i двете решения съвпадат;
4. **Промяна на импулсните моменти при промяна на началното условие:** В общия случай, различните решения (с начални условия, които не съвпадат) имат различни импулсни моменти. Нещо повече, възможно е при едното от тези решения да липсват импулсни моменти. Обикновено, такъв е случаят на нулевото решение, което (по принцип) не е подложено на импулсни въздействия;
5. **Промяна на импулсните моменти при смущаване на някои от елементите на системата:** В общия случай, решенията на изследваната начална задача и на съответната смутена начална задача (включително при едни и същи начални условия) имат различни импулсни моменти. Този ефект се наблюдава при смущения в импулсните хиперповърхнини, импулсните функции, както и при смущения на други елементи на системата. Този факт означава, че съответните импулсни въздействия на основното и смутеното решение са различни по големина и направление. Това също така означава, че двете решения (в общия случай) се различават след първия импулсен момент;
6. **Натрупване на грешки:** Пертурбациите и неточностите при определяне на моментите на импулсните въздействия (които често се търсят с помощта на приблизителни методи), се „натрупват“ във „времето“. Те оказват съществено влияние при числово пресмятане на големината на решенията в даден момент, а също така и на неговото поведение. Така например, при неограничен брой на импулсните въздействия, тези „натрупани“ пертурбации могат да имат непреодолим характер и да доведат до формирането на решения, които се различават съществено от изучаваното „непертурбирано“ решение.

Основни направления при изследване на диференциалните уравнения с импулсни въздействия

Изследванията на системите диференциални уравнения с импулси условно можем да разпределим в три общи направления:

1. Пренасяне и обобщаване на някои резултати от диференциалните уравнения в "непрекъснатия случай" към уравненията с импулсни въздействия (виж [2], [3], [21], [26], [28], [29], [43], [50], [59], [67], [72], [73], [82], [83], [84], [124], [125], [129], [134], [158], [159], [168], [184] и [211]);
2. Изследвания на специфични качества, характерни само за решенията на уравненията с импулсни въздействия и техните приложения (виж [31], [32], [36], [40], [62], [63], [68], [92], [94], [105], [107], [109], [110], [112], [185] и [234]);
3. Моделиране и оптимизиране на процеси от практиката с помощта на импулсни уравнения. При това, изучаваните процеси могат да се опишат и изследват адекватно само с такъв тип уравнения (тук ще посочим само част от монографиите, посветени на такива въпроси: [1], [4], [5], [12], [15], [20], [22], [83], [111], [157], [193], [200], [208] и [229]).

Изследванията в настоящия дисертационен труд можем да отнесем към първото и второто направления. Ще подчертаем изрично, че всички получени досега резултати за устойчивост с помощта на граничните уравнения се отнасят само за диференциални уравнения без импулсни въздействия. Тук ще посочим следните научни статии: [38], [44], [45], [91], [100], [114], [138], [140], [141], [152], [153], [154], [160], [169], [177], [195] и [219]. Изследванията в настоящата дисертация имат за цел да дадат един подход при изучаването на въпроса за съществуване на устойчиви решения на импулсни системи диференциални уравнения с нефиксирани импулсни моменти.

Приложения на изследваните уравнения с импулсни въздействия при моделиране на динамични процеси от практиката

Математическата теория на системите диференциални уравнения, притежаващи решения, които в определени моменти се изменят скокообразно, се развива в две основни направления.

Едното от тези направления е въведено в работите на С. Завалищин, А. Сесекин и С. Дрозденко [4], А. Халанай и Д. Векслер [25], S. Pandit и S. Deo [186] и др. Тук основен математически апарат за описание на импулсните въздействия са обобщени функции (от типа на функциите на Р. Dirac). При задачите, които се изучават в това направление на теорията на импулсните диференциални уравнения, моментите на импулсни въздействия задължително са предварително фиксирани. Ще отбележим, че в този случай използваният подход за описание на „скокообразни“ процеси не е подходящ за моделиращите системи, при които импулсните моменти се определят динамично, в зависимост от стойностите на решението във всеки момент от дефиниционното му множество.

Началото на второто направление в изучаването на „скокообразни“ процеси е поставено от В. Мильман и А. Мышкис в първата половина на шестдесетте години на миналия век [13] и [14]. В тези работи са дадени някои общи съображения за необходимостта от изучаване на системите с импулсни въздействия. Получени са първите резултати за устойчивост на техните решения. Непосредствено след първоначалните изследвания на В. Мильман и А. Мышкис тази математическа теория се развива от редица украински и руски математици, от които тук ще посочим: А. Самойленко, Н. Перестюк, В. Плотников, С. Борисенко, А. Игнатиев, А. Анохин, Н. Скрипник, Ю. Роговченко, М. Ахметов, О. Черникова и П. Забрейко (виж [1], [2], [3], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [36], [43], [66], [67], [134], [145], [155], [187], [192], [193] и [227]).

В България школата по фундаментална и качествена теория на импулсните уравнения беше създадена и повече от тридесет години се ръководи от проф. Д. Байнов, като негови ученици са: П. Симеонов ([198] и [199]), С. Христова ([55], [56], [142], [143] и [144]), И. Стамова ([34], [48], [49], [60], [204], [205], [206], [207], [208], [209] и [211]), Г. Стамов ([33], [58], [201], [202], [203] и [210]), С. Милушева [62], [72] и [73]), Г. Кулев ([69], [70], [143] и [156]), Н. Милев ([174], [175] и [176]), Д. Колев ([63]), В. Проичева ([76]), Е. Минчев ([74]), С. Костадинов ([64], [65], [66], [67], [68] и [227]), М. Димитрова ([50], [51], [52], [53] и [54]), В. Петров ([54], [68] и [76]), Н. Маркова ([71] и [113]), С. Ненов ([39], [40], [75], [104], [179] и [180]), К. Дишлиева ([96], [105], [110], [112] и [117]), А. Дишлиев ([57], [61], [96], [105] и [107]) и др. Общо от участниците в споменатата по-горе школа са публикувани над 500 научни труда, от които тук ще посочим само част от монографиите по разглежданата тема: [47], [64], [77], [78], [79], [80], [81], [111], [157], [200] и [208]. Резултати в теорията на импулсните диференциални уравнения имат и други български учени, от които ще отбележим: Л. Каранджулов ([9] и [151]), Й. Ангелова ([39], [40], [41], и [42]), Я. Стоянова ([10] и [11]), В. Ковачев ([32], [48] и [49]), Н. Китанов ([16] и [191]), П. Китанов ([17]), А. Косева ([155]), А. Георгиева ([132] и [133]), Р. Чуклева ([96], [97], [117] и [188]), С. Петкова ([104], [117], [118], [120], [188], [189] и [190]) и др.

Изучаването на скокообразно изменящи се процеси е предмет на изследване в редица науки: механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. В тези случаи, използването на математически апарат под

формата на моделиращи диференциални уравнения с импулсни въздействия, като правило, е задължително.

Приложенията на импулсните диференциални уравнения при моделиране на процеси, които са подложени на кратковременни външни въздействия, е широко и ползотворно (виж [5], [6], [7], [8], [12], [23], [33], [34], [35], [46], [60], [82], [88], [90], [93], [98], [102], [103], [116], [121], [122], [123], [129], [130], [131], [137], [146], [147], [148], [149], [150], [162], [163], [164], [165], [166], [167], [170], [171], [172], [173], [178], [181], [182], [183], [196], [200], [201], [205], [206], [210], [213], [215], [218], [221], [223], [224], [230], [231] и [232]).

Основни цели на дисертационния труд

Изследват се импулсни диференциални уравнения, при които импулсните моменти са променливи и съвпадат с моментите, в които интегралната крива среща последователно хиперповърхнини, принадлежащи на предварително зададен клас от непресичащи се хиперповърхнини, разположени в разширеното пространство.

Основните цели на дисертационния труд са:

1. Да се изучи въпросът за продължимост на решенията;
2. Да се изследва непрекъснатата зависимост на решенията относно началното условие и дясната страна;
3. Да се установят причинно-следствени връзки между някои типове устойчивости на изходното импулсно уравнение и съответните му гранични уравнения;
4. Приложение на получените теоретични резултати върху импулсни математически модели от популационната динамика.

Основни математически методи, използвани в дисертацията

Основните методи, използвани в дисертационния труд, са свързани с традиционния математически апарат на реалния анализ и в частност на диференциалните уравнения.

По-специално място заема методът на граничните уравнения. Въведен е от G. Sell през 1967 г. (виж [194] и [195]). Тъй като разглежданията в дисертационния труд се основават на този метод ще предложим най-важните елементи от него.

Нека функцията $f: R^+ \times D \rightarrow R^n$. За всяка положителна константа θ дефинираме функцията

$$f_\theta(t, x) = f(t + \theta, x), \quad (t, x) \in R^+ \times D,$$

която се нарича транслация на изходната функция f с константа θ . Нека съществува редица от положителни числа $\{\theta_i\}$ такава, че:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \infty;$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{\theta_i}(t, x) = f^*(t, x), \quad (t, x) \in R^+ \times D,$$

където сходимостта е в смисъл на Bohr. По-конкретно, редицата от функции $\{f_{\theta_i}\}$ клони равномерно към функцията f^* на всяко множество от вида $R^+ \times C$, където C е компактно подмножество на D . Тогава функцията f^* се нарича гранична функция за f . Ясно е, че една функция може да не притежава гранични функции, както и да притежава безбройно много такива. Да разгледаме неавтономното уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Всяко едно от уравненията (в зависимост от граничната функция f^*)

$$\frac{dx}{dt} = f^*(t, x)$$

се нарича гранично уравнение (limiting equation) за изходното уравнение. Същността на метода на граничните уравнения се състои в намиране на връзка между качествата на решенията на изходното уравнение и решенията на съответните гранични уравнения. Основните резултати, получени от редица автори (виж [37], [44], [45], [89], [99], [101], [115], [140], [152], [153], [154], [160], [177], [196], [214] и [219]), се отнасят до установяване на периодичност (или почти периодичност) на решенията на горните уравнения, а също така и до устойчивост на нулевите им решения. В дисертацията се разглежда въпросът за устойчивост чрез метода на граничните уравнения. Теоремите, получени от различни автори, са в две “посоки”:

- **прави теореми:** съдържат достатъчни условия, при които от определен вид устойчивост на решенията на изходното уравнение следва друг (или същия) вид устойчивост на решенията на граничните уравнения;
- **обратни теореми:** съдържат условия, които гарантират, че от определен вид устойчивост на решенията на граничните уравнения следва друг (или същия) вид устойчивост на решенията на изходното уравнение.

От практическа гледна точка по-полезни са обратните теореми. Методът на граничните уравнения е изключително удобен в случаите, когато граничните уравнения са сравнително по-прости (от изходното уравнение) и позволяват значително по-лесно да се прилагат различни методи за установяване на устойчивост на техните решения.

В дисертацията е разработен методът на граничните уравнения за системи диференциални уравнения с променливи (не фиксирани) импулсни моменти.

Преглед на получените резултати в дисертацията

Дисертационният труд се състои от увод и две глави. Всяка от главите съдържа по три параграфа.

Глава I. Основната задача в тази глава е да се намерят достатъчни условия за непрекъсната зависимост на решенията на описаните по-горе импулсни системи относно началната точка и дясната страна.

Първият параграф е посветен на продължимостта на решенията на импулсните системи. Основният проблем е явлението “биене”. В този случай (при наличието на този феномен) интегралната крива среща многократно (включително и безбройно много пъти) една и съща хиперповърхнина. Ако функцията, с помощта на която се задава хиперповърхнината, е ограничена, то ще следва, че решението няма да е продължимо надясно от коя да е горна граница на тази функция. Това означава, че:

1. Импулсните моменти притежават точка на сгъстяване. Тогава се наблюдава “катастрофа” на решението, предизвикана от импулсните въздействия.
2. Както казахме по-горе, решенията не са продължими надясно до безкрайност.
3. При наличие на описания ефект е невъзможно да се изследва импулсната система за устойчивост, която е основната задача в този дисертационен труд. Между впрочем, при наличие на “биене” решенията не притежават и много други полезни и важни качества, като периодичност, осцилационни свойства, асимптотични свойства и др.

В параграфа са дадени няколко помощни топологични свойства на решенията. Основният резултат е свързан с намирането на достатъчни условия за неограничена продължимост на тези решения.

Във втория параграф на главата се изследва отново начална задача за нелинейни неавтономни импулсни системи диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия. Въведени са понятията непрекъсната зависимост относно смущения в началната точка и дясната страна. Посочени са условия, от които следва, че решенията на тези системи притежават споменатите качества.

Ще обърнем внимание на две характерни особености:

1. Равномерна близост между решенията на изходната и смутената задачи не се изисква, когато времето принадлежи на интервала между съответните им импулсни моменти. Действително, точно между тези съответни моменти броят на импулсните въздействия върху сравняваните решения е различен (разликата е един импулс). Поради тази причина "отнапред зададена близост" между решенията (в термините на равномерната метрика) в интервалите между съответните импулсни моменти няма.
2. Възниква въпросът за мярката на множествата, в които не се отчита равномерна близост между изходното и смутеното решение. Оказва се, че тази мярка може да е произволно малка (при съответно достатъчно малки разлики в началните точки и десните страни на сравняваните системи).

В третия параграф на главата е разгледан и изследван математически модел на динамиката на развитие на съобщество от типа "хищник-жертва". Специфични особености на модела са следните:

1. Моделът е от типа на Lotka-Volterra и е с променливи коефициенти;
2. Коефициентите притежават крайни граници при неограничено нарастване на времето;
3. Биомасата на съобществото е подложена на кратковременни смущения (импулсни въздействия), които се изразяват в отнемане на определени количества от биомасата (както на жертвата, така и на хищника);
4. Моментите на отнеманията съвпадат с моментите, в които интегралната крива на системата анулира някоя от предварително зададени "специални функции". Практически това означава, че интегралната крива пресича някоя хиперповърхнина, принадлежаща на зададено множество от непресичащи се хиперповърхнини, разположени в разширеното пространство.

За описания клас моделни импулсни уравнения са намерени достатъчни условия за непрекъсната зависимост на решенията от началната точка и дясната страна.

Параграф 1. Основен елемент на импулсните диференциални уравнения, които са обект на разглеждане в дисертационния труд, е множество от непресичащи се хиперповърхнини, дефинирани във фазовото пространство на системата:

$$\sigma_i = \{ (t, x) \in R^+ \times D; t = t_i(x) \}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

където функциите $t_i: D \rightarrow R^+$ и D е непразна област от R^n . Разглеждаме следната начална задача за система от диференциални уравнения с импулси:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i; \quad (1.2)$$

$$\Delta x(t) |_{t=t_i} = x(t_i^+) - x(t_i^-) = I_{j_i}(x(t_i^-)), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (1.3)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.4)$$

където:

- функцията $f: R^+ \times D \rightarrow R^n$;
- функциите $I_i: D \rightarrow R^n$, $i = 1, 2, \dots$;
- началната точка удовлетворява ограниченията: $t_0 \geq 0$; $x_0 \in D$.

По-нататък с

$$t_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots,$$

ще означаваме моментите, в които интегралната крива $(t, x(t))$ на задачата (1.2), (1.3), (1.4) пресича някоя от хиперповърхнините (1.1). Освен това, ще предполагаме, че j_i е номерът на хиперповърхнината, която интегралната крива пресича (среща) в момента τ_i , $i=1,2,\dots$.

Ще отбележим, че в общия случай е възможно $j_i \neq i$ (виж пример 1 от [108]). Ясно е, че в момента τ_i е изпълнено равенството

$$\tau_i = t_{j_i}(x_{i-1}(\tau_i)), \quad i=1,2,\dots.$$

Решението на задачата (1.2), (1.3), (1.4) е по части непрекъсната функция с точки на прекъсване от първи род.

С Н1 означаваме следните условия:

Н1.1. Функцията $f \in Lip_x[L, R^+ \times D]$.

Н1.2. Съществува положителна константа M такава, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \|f(t, x)\| \leq M.$$

Н1.3. За всяка точка $(\tau_0, x_0) \in R^+ \times D$ решението $x_f(t; \tau_0, x_0)$ на задачата без импулси (1.2), (1.3) е дефинирано за $t > \tau_0$.

Н1.4. Функциите $(Id + I_i): D \rightarrow D$, $i=1,2,\dots$, където Id е идентитетът в R^n .

Н1.5. Функциите $t_i \in Lip_x[L_i, D]$, където $L_i < \frac{1}{M}$, $i=1,2,\dots$.

Н1.6. Валидни са неравенствата $0 < t_1(x) < t_2(x) < \dots$ за $x \in D$.

Н1.7. Изпълнени са неравенствата $t_i(x + I_i(x)) \leq t_i(x)$ за $x \in D$, $i=1,2,\dots$.

Н1.8. Съществува $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i(x) = \infty$, равномерно относно $x \in D$.

Н1.9. Функциите $Id + I_i$, $i=1,2,\dots$, са биективни.

Основният резултат в параграфа е следната теорема.

Теорема 1.1. Нека са изпълнени условията Н1.

Тогава за всяка точка $(\tau_0, x_0) \in R^+ \times D$ е изпълнено:

1. Интегралната крива $(t, x_f(t; \tau_0, x_0))$ пресича безбройно много хиперповърхнини от (1.1).

1. Ако $\tau_1, \tau_2, \dots$ са моментите на последователните срещи на интегралната крива с хиперповърхнини от (1.1), то е изпълнено $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \infty$.

3. Решението на задачата (1.2), (1.3), (1.4) е единствено и продължимо за всяко $t \geq \tau_0$.

Параграф 2. Във втория параграф на дисертацията отново се изучават импулсни системи диференциални уравнения, при които импулсите се осъществяват в моментите,

в които интегралната крива на системата пресича (среща) някоя от предварително зададени хиперповърхнини.

Към условията Н1 от предходния параграф прибавяме и следните хипотези, които ще означим с Н2:

Н2.1. Функциите $I_i \in C[D, R^n]$ и $(Id + I_i) : D \rightarrow D$, $i=1,2,\dots$, където Id е идентитетът в R^n .

Н2.2. Валидни са неравенствата

$$t_i(x) \neq t_k(x + I_i(x)), \quad x \in D, \quad i=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots$$

Н2.3. Изпълнено е $0 \in D$ и

$$(\forall t \in R^+) \Rightarrow f(t, 0) = 0.$$

Н2.4. $I_i(0) = 0$, $i=1,2,\dots$.

Въвеждаме допълнително следната начална задача:

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad t \neq \tau_i^* \quad (2.5)$$

$$\Delta x(t) |_{t=\tau_i^*} = x(\tau_i^* + 0) - x(\tau_i^*) = I_{s_i}(x(\tau_i^*)), \quad i=1,2,\dots, \quad (2.6)$$

$$x(\tau_0^*) = x_0^*, \quad (2.7)$$

където:

- функцията $g : R^+ \times D \rightarrow R^n$;

- функциите $I_i : D \rightarrow R^n$, $i=1,2,\dots$;

- моментите $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots$ съвпадат с моментите, в които интегралната крива на задачата (2.5), (2.6), (2.7) среща хиперповърхнина от (2.1);

- валидни са неравенствата $0 < \tau_1^* < \tau_2^*, \dots$;

- s_i е номерът на хиперповърхнината, която интегралната крива на последната задача пресича (среща) в момента τ_i^* , $i=1,2,\dots$.

- началната точка $(\tau_0^*, x_0^*) \in R^+ \times D$.

Последната начална задача ще наричаме пертурбирана на изходната задача (1.2), (1.3), (1.4). Разликите между двете задачи са в десните страни и началните точки. Тези различия се отразяват както на импулсните моменти, така и на индексите на хиперповърхнините, които двете интегрални криви срещат последователно. Решението й означаваме (по аналогия с предходния параграф) с $x_g(t; \tau_0^*, x_0^*)$.

По-нататък (за удобство) ще възприемем, че изразът " $f \in Hi.j$ " означава "функцията f удовлетворява условие $Hi.j$ ", където $i, j \in N$.

Ще използваме следните дефиниции.

Дефиниция 2.1. Ще казваме, че решението $x_f(t; \tau_0^*, x_0^*)$ на задачата (1.2), (1.3), (1.4) зависи непрекъснато от началното условие, ако

$$\begin{aligned}
& (\forall \varepsilon, \eta, T \in \mathbb{R}^+) (\forall (t_0, x_0) \in D^+ \times \mathbb{R}^n) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, t_0, x_0) > 0) : \\
& \left(\forall (\tau_0^*, x_0^*) \in R^+ \times D, |\tau_0^* - \tau_0| < \delta, \|x_0^* - x_0\| < \delta \right) \\
& \Rightarrow \|x_f(t; \tau_0^*, x_0^*) - x_f(t; \tau_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \max\{\tau_0^*, \tau_0\} \leq \tau_0 + T, |t - \tau| > \eta, i = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Дефиниция 2.2. Ще казваме, че решението $x_f(t; \tau_0, x_0)$ на задачата (1.2), (1.3), (1.4) зависи непрекъснато от дясната страна на системата, ако

$$\begin{aligned}
& (\forall \varepsilon, \eta, T \in \mathbb{R}^+) (\forall (t_0, x_0) \in D^+ \times \mathbb{R}^n) (\forall f \in f_1, f \in f_2) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, t_0, x_0) > 0) : \\
& \left(\forall g \in C[M(t_0, \tau, \varepsilon, f) \mathbb{R}^n] g \in f_1, g \in f_2, \|t(x) - t(x)\| < \delta \right) \\
& \Rightarrow \|x_g(t; \tau_0, x_0) - x_f(t; \tau_0, x_0)\| < \varepsilon, \tau_0 \leq \tau_0 + T, |t - \tau| > \eta, i = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Дефиниция 2.3. Ще казваме, че нулевото решение на задачата (1.2), (1.3) зависи непрекъснато от началното условие, ако

$$\begin{aligned}
& (\forall \varepsilon, T, \tau_0 \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, T, \tau_0) > 0) : \left(\forall (\tau_0^*, x_0^*) \in R^+ \times D, |\tau_0^* - \tau_0| < \delta, \|x_0^*\| < \delta \right) \\
& \Rightarrow \|x_f(t; \tau_0^*, x_0^*)\| < \varepsilon, \tau_0^* \leq \tau_0 + T.
\end{aligned}$$

Дефиниция 2.4. Ще казваме, че нулевото решение на задачата (1.2), (1.3) зависи непрекъснато от дясната страна, ако

$$\begin{aligned}
& (\forall \varepsilon, \eta, T, \tau_0 \in \mathbb{R}^+) (\forall f \in f_1, f \in f_2, f(t, 0) = 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, \tau_0, f) > 0) : \\
& \left(\forall g \in C[M(t_0, \tau, \varepsilon, f) \mathbb{R}^n] g \in f_1, g \in f_2, \|t(x) - t(x)\| < \delta \right) \\
& \Rightarrow \|x_g(t; \tau_0, 0)\| < \varepsilon, \tau_0 \leq \tau_0 + T.
\end{aligned}$$

Най-важните резултати в параграфа са следните две теореми.

Теорема 2.2. Нека са изпълнени условията H1, H2.1 и H2.2.

Тогава решението на задачата (1.2), (1.3), (1.4) зависи непрекъснато от началното условие и от дясната страна на системата.

Теорема 2.3. Нека са изпълнени условията H1, H2.3 и H2.4.

Тогава нулевото решение на системата (1.2), (1.3) зависи непрекъснато от началното условие и от дясната страна на системата.

Параграф 3. Тук получените резултати в предходните два параграфа са приложени върху модел от популационната динамика. Нека разгледаме динамиката на съжителство на два вида от типа “хищник-жертва”. Борбата между видовете и по-точно промяната на количествата на всеки от видовете се дава чрез следната система от диференциални уравнения:

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1(t) N_1 - \gamma_1(t) N_1 N_2 - \gamma(t) N_1^2; \quad (3.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \gamma_2(t) N_1 N_2 - \varepsilon_2(t) N_2, \quad (3.2)$$

където:

- функциите $N_k(t)$, $k=1,2$, са количествените измерения съответно на жертвата и хищника;
- функциите $\varepsilon_k(t)$, $k=1,2$, са коефициентите на естествения прираст на двете популации;
- функциите $\gamma_k(t)$, $k=1,2$, са коефициентите на междувидовото взаимодействие;
- вътрешновидовата конкуренция между преставителите на жертвата се представя с помощта на събираемото $\gamma(t) N_1^2$.

Ще предположиме, че след външна намеса количествата на двата вида се променят скокообразно в моментите $\tau_1, \tau_2, \dots$. Валидни са равенствата

$$\Delta N_k|_{t=\tau_i} = N_k(\tau_i + 0) - N_k(\tau_i) = \alpha_{ki} (N_k(\tau_i) - N_k^*), \quad k=1,2, \quad i=1,2,\dots, \quad (3.3)$$

където α_{ki} и N_k^* са реални константи. Константите N_1^* и N_2^* ще уточним по-нататък.

Промените ΔN_1 и ΔN_2 на биомасите съответно на жертвата и на хищника зависят не само от техните количества в моментите на външната импулсна намеса, но и от самите моменти. Ще предположиме, че моментите на намеса (импулсните моменти) удовлетворяват някои от следните уравнения:

$$t = \chi_j + \beta_{1j} |N_1(t) - N_1^*| + \beta_{2j} |N_2(t) - N_2^*|, \quad j=1,2,\dots, \quad (3.4)$$

където константите $\chi_j, \beta_{kj} \in R^+$, $k=1,2$.

Представената по-горе система от диференциални и алгебрични уравнения (3.1) - (3.4) е математически модел на непрекъснатото и скокообразно развитие на биологично съобщество от тип "хищник-жертва". Установяването на условия за непрекъсната зависимост на решенията на системата (3.1) - (3.4) от началното условие и от дясната страна е важно за практическото изследване на динамиката на такива видове, а също така и за отглеждането и използването на такива съобщества.

Ако приравним десните страни на уравненията на системата (3.1), (3.2) на нула, ще получим алгебрична система, която притежава следното решение

$$N_1^*(t) = \frac{\varepsilon_2(t)}{\gamma_2(t)}, \quad N_2^*(t) = \frac{\varepsilon_1(t) \gamma_2(t) - \varepsilon_2(t) \gamma(t)}{\gamma_1(t) \gamma_2(t)}. \quad (3.5)$$

Установено е, че количествените изменения на видовете, взаимодействието между тях и вътрешновидовата борба се определя чрез функциите:

$$\varepsilon_k(t) = e_k \Pi_{\varepsilon k}(t), \quad \gamma_k(t) = g_k \Pi_{\gamma k}(t), \quad \gamma(t) = g \Pi_{\gamma}(t), \quad (3.6)$$

където $e_k, g_k, k=1,2$, и g са положителни константи, а функциите $\Pi_{\varepsilon k}, \Pi_{\gamma k}, \Pi_{\gamma} \in C[R^+, R^+]$ и освен това са валидни границите:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_{\varepsilon k}(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_{\gamma k}(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_{\gamma}(t) = 1. \quad (3.7)$$

Означаваме

$$N_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} N_1^*(t), \quad N_2^* = \lim_{t \rightarrow \infty} N_2^*(t).$$

Тогава, като имаме предвид (3.5), (3.6) и (3.7), намираме

$$N_1^* = \frac{e_2}{g_2}, N_2^* = \frac{e_1 g_2 - e_2 g_1}{g_1 g_2}.$$

По този начин намираме константите N_1^* и N_2^* , които участват в разглежданата моделна система.

Въвеждаме условията Н3:

Н3.1. Съществува функция $\Pi \in C[R^+, R^+]$, такава, че за всяко $t \in R^+$ са валидни равенствата

$$\Pi_{ek}(t) = \Pi_{gk}(t) = \Pi_g(t) = \Pi(t) \text{ и } \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t) = 1.$$

Н3.2. Валидни са неравенствата:

$$\frac{e_2}{g_2} < \frac{e_1}{g_1}, -1 < \alpha_{ki} \leq 0, \beta_{ki} = \beta_k, k=1,2, i=1,2,\dots, 0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} \chi_i = \infty.$$

Разглеждаме функцията $\tau: R^+ \rightarrow N$, дефинирана с помощта на равенството

$$(\forall t \in R^+) \Rightarrow \tau(t) = p, \text{ ако } \tau_p < t \leq \tau_{p+1}.$$

С други думи, стойността на функцията τ в момента t е равна на броя на импулсните моменти, които са преди момента t .

Към условията Н3 добавяме и следното условие:

Н3.3. Съществува константа $\Theta > 0$ такава, че

$$(\forall \theta_1, \theta_2 \in R^+, \theta_1 < \theta_2) \Rightarrow \frac{\tau(\theta_2) - \tau(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} \leq \Theta.$$

Сега можем да дадем нова форма, по-лесна за изследване, на изходната импулсна система (3.1), (3.2), (3.3):

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(e_1 - g_1 N_2 - g N_1) \Pi(t); \quad (3.8)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(g_2 N_1 - e_2) \Pi(t); \quad (3.9)$$

$$\Delta N_k|_{t=\tau_i} = \alpha_{ki} (N_k(\tau_i) - N_k^*), k=1,2, i=1,2,\dots, \quad (3.10)$$

където $\tau_1, \tau_2, \dots$ са моментите, в които интегралната крива $(t, N_1(t), N_2(t))$ на системата (3.8), (3.9), (3.10) пресича някоя от хиперповърхнините

$$\sigma_i = \{(t, N_1, N_2) \in R^+ \times R^+ \times R^+; t = t_i(N_1, N_2)\},$$

където

$$t_i(N_1, N_2) = \chi_i + \beta_1 |N_1 - N_1^*| + \beta_2 |N_2 - N_2^*|, i=1,2,\dots.$$

Ясно е, че точката (N_1^*, N_2^*) е стационарна за системата (3.8), (3.9), (3.10). С други думи решението

$$(N_1^*, N_2^*) = (N_1(t; 0, N_1^*, N_2^*), N_2(t; 0, N_1^*, N_2^*)), \quad t \geq 0.$$

С $(N_1(t; 0, N_1^0, N_2^0), N_2(t; 0, N_1^0, N_2^0))$ означаваме решението на системата (3.8), (3.9), (3.10) с начално условие

$$N_k(0) = N_k^0, \quad k=1, 2, \quad (3.11)$$

където точките N_1^0 и N_2^0 удовлетворяват неравенствата

$$0 < N_1^0 < \frac{e_1}{g}, \quad 0 < N_2^0.$$

В дисертацията се установява, че решенията на моделната система са ограничени, т.е.

$$(\exists N_1^{\max}, N_2^{\max} \in R^+): \quad 0 < N_k(t; N_1^0, N_2^0) \leq N_k^{\max}, \quad t \geq 0, \quad k=1, 2.$$

Сега дефинираме областа D :

$$D = (0, N_1^{\max}) \times (0, N_2^{\max}) \subset R^+ \times R^+.$$

Всички условия на Теорема 2.2 са изпълнени, ако:

1. Константите χ_i , α_{ki} и β_{ki} при $k=1, 2$ и $i=1, 2, \dots$ удовлетворяват няколко тривиални неравенства;
2. Валидни са неравенствата: $\beta_k M < 1$, $k=1, 2$.
3. Валидни са условията НЗ.

Следователно, решението на задачата (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) зависи непрекъснато от началното условие и от дясната страна.

Глава II. Въведени са редица нови понятия. Тук ще обърнем внимание на едно от тях, а именно “еквитотална устойчивост на ненулевите решения на разглежданата импулсна система, независимо от транслагациите на импулсните хиперповърхнини”. Ще посочим някои специфични особености на споменатото понятие:

- устойчивостта е тотална, защото се допускат смущения както в началното условие, така и в дясната страна на системата;
- устойчивостта е “екви”, защото се отнася за всяка началната точка на решенията, която принадлежи на фазовото пространство;
- устойчивостта не зависи от транслагациите на импулсните хиперповърхнини, защото е валидна за всеки “комплект” импулсни хиперповърхнини, получен от изходния чрез добавяне на една и съща положителна константа към дясната страна на дефиниционното равенство на всяка една от тях.

По аналогия е въведено и понятието “тотална устойчивост на нулевото решение на разглежданата система, независимо от транслагациите на импулсните хиперповърхнини”. Както се вижда, тук не се изисква устойчивостта да е валидна за всяка начална точка от фазовото пространство.

За всяка функция $f: R^+ \times D \rightarrow R^n$ (D е област от R^n) и за всяка положителна константа θ се дефинира функцията $f_\theta: R^+ \times D \rightarrow R^n$ с помощта на равенството

$$f_\theta(t, x) = f(t + \theta, x), \quad (t, x) \in R^+ \times D.$$

Ще казваме, че функцията $f^*: R^+ \times D \rightarrow R^n$ е гранична за f , ако съществува редица от положителни числа $\theta_1, \theta_2, \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \infty$, такава, че съответната редица от функции

$f_{\theta_1}, f_{\theta_2}, \dots$ клони равномерно към f^* при $(t, x) \in R^+ \times D$. Възможно е дадена функция да няма, да има една, краен брой или безбройно много гранични функции. В много случаи граничните функции притежават сравнително “по-добри” (по-лесно проверяеми) качества в сравнение с изходната функция. Съответната система диференциални уравнения (с дясна страна, съвпадаща с някоя гранична функция) се нарича гранична система.

В параграф 4 е намерена връзка между качествата на решенията на изходната импулсна система и решенията на съответните импулсни гранични системи. По-точно, намерени са достатъчни условия, от които следва, че ако всяка една от граничните системи притежава еквитотално устойчиви ненулеви решения, независимо от трансациите на импулсните хиперповърхнини, то изходната система притежава тотално устойчиви ненулеви решения. Подобни резултати са получени и за нулевите решения.

Поради специфични особености на решенията (например, нулевото решение не е подложено на импулсни въздействия, за разлика от ненулевите решения), то получените резултати за ненулевите решения от една страна и нулевото решение от друга се различават.

Изследванията в параграф 5 са продължение на тези от предходния параграф. В известен смисъл намерените взаимовръзки са в обратна посока. Получени са достатъчни условия, от които следва, че ако изходната система притежава еквитотално устойчиви ненулеви решения, независимо от трансациите на импулсните хиперповърхнини, то всяка една от граничните системи диференциални уравнения притежава тотално устойчиви ненулеви решения. Подобни са резултатите и за нулевото решение.

В последния параграф на дисертацията теоретичните изследвания са приложени върху математически модел на съобщество от тип “хищник-жертва”, подложено на импулсни външни въздействия. Ще обърнем внимание на факта, че с помощта на граничните системи са “премахнати” редица ненужни “обременяващи” разглеждания, свързани с първоначални смущения в модела. Тези пертурбации се случват в ограничен времеви интервал, стартираш от началния момент на развитие на модела, респективно на описвания динамичен процес. След това се достига до развитие, подчинено на трайно установени зависимости. Това обстоятелство безспорно улеснява изследванията за установяване на различни типове устойчивост на съответните гранични импулсни системи. След това, на базата на доказаните теореми намерените качества се прехвърлят и тълкуват върху решенията на изходния модел.

Параграф 4. Изучава се въпросът за устойчивост на импулсни диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия чрез метода на граничните уравнения. И тук се разглежда изходната задача (1.2), (1.3), (1.4).

Въвеждаме и съответната смутена начална задача:

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad t \neq \tau_i^g;$$

$$\Delta x(t) \big|_{t=\tau_i^g} = x\left(\tau_i^g, 0\right) - x\left(\tau_i^g\right) = I_{s_i}\left(x\left(\tau_i^g\right)\right), \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$x\left(\tau_0^g\right) = x_0^g$$

където:

- функцията $g: R^+ \times D \rightarrow R^n$;
- началната точка удовлетворява ограниченията: $\tau_0^g \geq 0$, $x_0^g \in D$;

- $\tau_1^g, \tau_2^g, \dots$ са моментите, в които интегралната крива на горната задача пресича хиперповърхнините (1.1), а $s_1, s_2, \dots$ са съответно номерата на тези хиперповърхнини.

Решението на смутената задача означаваме с $x_g(t; \tau_0^g, x_0^g)$.

Както се вижда, смущенията в последната задача са в началното условие и дясната страна.

Въвеждаме следните дефиниции:

Дефиниция 4.1. Ще казваме, че решението $x_f(t; \tau_0, x_0)$ на задачата (1.2), (1.3), (1.4) е тотално устойчиво, ако

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon, \eta > 0) (\forall (\tau_0, x_0) \in R^+ \times D) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, \tau_0, x_0) > 0) : \\ & (\forall \tau_0^g \in R^+, |\tau_0^g - \tau_0| < \delta) (\forall x_0^g \in D, \|x_0^g - x_0\| < \delta) \\ & (\forall g \in F(\tau_0, x_0, \varepsilon, f), g \in H1.3, \|g(t, x) - f(t, x)\| < \delta) \\ & \Rightarrow \|x_g(t; \tau_0^g, x_0^g) - x_f(t; \tau_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \geq \max\{\tau_0^g, \tau_0\}, \quad |-\tau_i| \geq \eta, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Дефиниция 4.2. Ще казваме, че нулевото решение на системата (1.2), (1.3) е тотално устойчиво, ако

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon, \tau_0 > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \tau_0) > 0) : \\ & (\forall \tau_0^g \in R^+, |\tau_0^g - \tau_0| < \delta) (\forall x_0^g \in D, \|x_0^g\| < \delta) \\ & (\forall g \in F(\tau_0, 0, \varepsilon, f), g \in H1.3, \|g(t, x) - f(t, x)\| < \delta) \\ & \Rightarrow \|x_g(t; \tau_0^g, x_0^g)\| < \varepsilon, \quad \geq \max\{\tau_0^g, \tau_0\}. \end{aligned}$$

Дефиниция 4.3. Ще казваме, че решението $x_f(t; \tau_0, x_0)$ на задачата (1.2), (1.3), (1.4) е екувитотално устойчиво върху областта $D^* \subset D$, ако

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon, \eta, \tau_0 > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, \tau_0) > 0) : \\ & (\forall x_0 \in D^*) (\forall \tau_0^g \in R^+, |\tau_0^g - \tau_0| < \delta) (\forall x_0^g \in D^*, \|x_0^g - x_0\| < \delta) \\ & (\forall g \in F(\tau_0, x_0, \varepsilon, f), g \in H1.3, \|g(t, x) - f(t, x)\| < \delta) \\ & \Rightarrow \|x_g(t; \tau_0^g, x_0^g) - x_f(t; \tau_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \geq \max\{\tau_0^g, \tau_0\}, \quad |-\tau_i| \geq \eta, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Нека θ е произволно реално положително число. Въвеждаме хиперповърхнините

$$\sigma_i^\theta = \{(t, x) \in R^+ \times D; t = \tau_i^\theta(x) + \theta\}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Разглеждаме следната начална задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq \tau_i^\theta; \quad (4.6)$$

$$\Delta x(t) |_{t=\tau_i^\theta} = x(\tau_i^\theta + 0) - x(\tau_i^\theta) = I_{ji}^\theta(\tau_i^\theta); \quad (4.7)$$

$$x(\tau_0) = x_0, \quad (4.8)$$

където τ_i^θ , $i=1,2,\dots$, са моментите, в които интегралната крива на задачата (4.6), (4.7), (4.8) пресича хиперповърхнините (1.1), а j_i^θ е номерът на хиперповърхнината от (4.5), която същата интегрална крива среща в момента τ_i^θ . Решението на горната задача означаваме с $x_f^\theta(t; \tau_0, x_0)$. Съответната смутена задача (получава се при различно начално условие и дясна страна) има вида

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad t \neq \tau_i^{g\theta}; \quad (4.9)$$

$$\Delta x(t) \big|_{t=\tau_i^{g\theta}} = x(\tau_i^{g\theta} + 0) - x(\tau_i^{g\theta}) = I_{s_i^\theta}(\tau_i^{g\theta}); \quad (4.10)$$

$$x(\tau_0^g) = x_0^g, \quad (4.11)$$

където смисълът на означенията и по-специално на индексите е идентичен с тези на основната задача. Решението на задачата (4.9), (4.10), (4.11) означаваме с $x_g^\theta(t; \tau_0^g, x_0^g)$.

Дефиниция 4.4. Ще казваме, че решението $x_f(t; \tau_0, x_0)$ на задачата (1.2), (1.3), (1.4) е еквитотално устойчиво върху множеството $D^* \subset D$, независимо от трансляцията на хиперповърхнините (1.1), ако:

$$(\forall \varepsilon, \eta, \tau_0 > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, \tau_0) > 0) :$$

$$(\forall x_0 \in D^*) (\forall \tau_0^g \in R^+, |\tau_0^g - \tau_0| < \delta) (\forall x_0^g \in D^*, \|x_0^g - x_0\| < \delta) (\forall \theta > 0)$$

$$(\forall g \in F^\theta(\tau_0, x_0, \varepsilon, f), g \in H1.3, \|g(t, x) - f(t, x)\| < \delta)$$

$$\Rightarrow \|x_g^\theta(t; \tau_0^g, x_0^g) - x_f^\theta(t; \tau_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq \max\{\tau_0^g, \tau_0\}, \quad |t - \tau_i^\theta| > \eta, \quad i=1,2,\dots$$

Дефиниция 4.5. Ще казваме, че нулевото решение на системата (1.2), (1.3) е тотално устойчиво, независимо от трансляцията на хиперповърхнините (1.1), ако:

$$(\forall \varepsilon, \tau_0 > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \tau_0) > 0) :$$

$$(\forall \tau_0^g \in R^+, |\tau_0^g - \tau_0| < \delta) (\forall x_0^g \in D^*, \|x_0^g - x_0\| < \delta) (\forall \theta > 0)$$

$$(\forall g \in F^\theta(\tau_0, 0, \varepsilon, f), g \in H1.3, \|g(t, x) - f(t, x)\| < \delta)$$

$$\Rightarrow \|x_g^\theta(t; \tau_0^g, x_0^g)\| < \varepsilon, \quad t \geq \max\{\tau_0^g, \tau_0\}.$$

Дефиниция 4.6. Нека функциите $g_i: R^+ \times D \rightarrow R^n$, $i=1,2,\dots$. Ще казваме, че редицата от функции $g_1, g_2, \dots$ клони b -равномерно (в смисъл на Bohr) към функцията g_0 при $(t, x) \in R^+ \times D$ за $i \rightarrow \infty$, ако тази редица клони равномерно към функцията g_0 при $(t, x) \in R^+ \times C$ за всяко множество C , което е компактно подмножество на D .

Дефиниция 4.7. Предполагаме, че:

1. Функцията $f: R^+ \times D \rightarrow R^n$.
2. Функцията $f_\theta: R^+ \times D \rightarrow R^n$ и

$$f_{\theta}(t, x) = f(t + \theta, x), \quad (t, x) \in R^+ \times D, \quad \theta = \text{const} > 0.$$

Тогава f_{θ} се нарича трансляция на f с константа θ .

Дефиниция 4.8. Ще казваме, че функцията $f, f: R^+ \times D \rightarrow R^n$, е a -положителна (b -положителна) предкомпактна, ако за всяка редица от положителни реални числа $\theta_1, \theta_2, \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \infty$, съответната редица от функции $f_{\theta_1}, f_{\theta_2}, \dots$ притежава равномерно (b -равномерно) сходяща подредица при $(t, x) \in R^+ \times D$.

Дефиниция 4.9. Нека $f, f: R^+ \times D \rightarrow R^n$. Ще казваме, че функцията $f^*, f^*: R^+ \times D \rightarrow R^n$, е a -гранична (b -гранична) функция за f , ако съществува редица от реални числа $\theta_1, \theta_2, \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \infty$, такава, че съответната редица от функции $f_{\theta_1}, f_{\theta_2}, \dots$ клони равномерно (b -равномерно) към f^* при $(t, x) \in R^+ \times D$.

Множеството от всички a -гранични (b -гранични) функции на f ще означаваме с $\Omega_f^a \left(\Omega_f^b \right)$.

Ще използваме следните условия, които в съвкупност означаваме с Н4:

Н4.1. Съществува константа $d > 0$ такава, че

$$(\forall x \in D) \Rightarrow \rho\left(\left(t_i(x), x + I_i(x)\right), \sigma_k\right) \geq d, \quad i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$$

Н4.2. Съществува област $D^* \subset D$ и константа $\alpha > 0$ такива, че

$$\left(\forall (\tau_0, x_0) \in R^+ \times D^*\right) \Rightarrow B_{\alpha}\left(x_f(t; \tau_0, x_0)\right) \subset D, \quad t \geq \tau_0.$$

Основните резултати се съдържат в следващите теореми.

Теорема 4.1. Предполагаме, че:

1. Изпълнени са условията Н1, Н2.1, Н2.2, Н4.1 и Н4.2.
2. Решението на задача (1.2), (1.3), (1.4) е еквилибриално устойчиво при $(t, x) \in D^*$.

Тогава

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon, \eta > 0) \left(\forall (\tau_0, x_0) \in R^+ \times D \right) \left(\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, \tau_0, x_0), \quad 0 < \delta < \alpha \right) : \\ & \left(\forall \tau_0^g \in R^+, \quad |\tau_0^g - \tau_0| < \delta \right) \left(\forall x_0^g \in D, \quad \|x_0^g - x_0\| < \delta \right) \\ & \left(\forall g \in F(\tau_0, x_0, \varepsilon, f), \quad g \in H1.3, \quad \|g(t, x) - f(t, x)\| < \delta \right) \end{aligned}$$

са валидни твърденията:

1. Интегралните криви $\left(t, x_g(t; \tau_0^g, x_0^g)\right)$ и $\left(t, x_f(t; \tau_0, x_0)\right)$ при $t \geq \max\{\tau_0^g, \tau_0\}$ пресичат последователно едни и същи хиперповърхнини от (1.1).
2. $|\tau_i^g - \tau_i| < \eta, \quad i = 1, 2, \dots$
3. $x_g(t; \tau_0^g, x_0^g) \in M(\varphi_0, \infty, f)$ при $t \geq \max\{\tau_0^g, \tau_0\}$.

Нека функцията $f^* \in \Omega_f^a$ ($f^* \in \Omega_f^b$). Разглеждаме следната начална задача за системи диференциални уравнения с импулси

$$\frac{dx}{dt} = f^*(t, x), \quad t \neq \tau_i^*; \quad (4.18)$$

$$\Delta x(t) \big|_{t=\tau_i^*} = I_{j_i^*} \left(x(\tau_i^*) \right), \quad i=1, 2, \dots; \quad (4.19)$$

$$x(\tau_0) = x_0, \quad (4.20)$$

където $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots$ са моментите, в които интегралната крива $(t, x_{f^*}(t; \tau_0, x_0))$ на горната задача пресича хиперповърхнините (4.1) и j_i^* е номерът на хиперповърхнината, която същата интегрална крива пресича в момента τ_i^* . Системата (4.18), (4.19) се нарича а-гранична (b-гранична) система, съответстваща на системата. (4.2), (4.3). Възможно е дадена система да не притежава а-гранична или b-гранична система, а също така да притежава няколко или безбройно много а-гранични или b-гранични системи с импулси. В сила е съотношението $\Omega_f^a \subset \Omega_f^b$, откъдето заключаваме, че всяка а-гранична система е и b-гранична система.

Към съвкупността от условия Н4 добавяме следните хипотези, отнасящи се за съществуване на гранични уравнения.

Н4.3. Множеството $\Omega_f^a \neq \emptyset$.

Н4.4. За всяка функция $f^* \in \Omega_f^a$ съществува положителна числова редица $\theta_1, \theta_2, \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \infty$, такава че:

- За всяко число i^* съществува номер $k > i^*$ такъв, че $\theta_k \neq \tau_i$, $i=1, 2, \dots$;
- Редицата от функции $f_{\theta_1}, f_{\theta_2}, \dots$ клони равномерно към f^* при $(t, x) \in R^+ \times D$.

Н4.5. За всяка точка $(\tau_0, x_0) \in R^+ \times D^*$ решението $x_f(t; \tau_0, x_0)$ на задачата (1.2), (1.3), (1.4) не напуска множеството D^* за $t \geq \tau_0$.

Хипотезата Н4.5 следва от следните две условия:

Н4.5.1. За всяка точка $(\tau_0, x_0) \in R^+ \times D^*$ решението на задачата без импулси (1.2), (1.4) не напуска множеството D^* при $t \geq \tau_0$.

Н4.5.2. Функциите $(Id + I_i) : D^* \rightarrow D^*$, $i=1, 2, \dots$.

Най-важният резултат в настоящия дисертационен труд формулираме в следната теорема.

Теорема 4.2. Предполагаме, че:

1. Валидни са хипотезите Н1.1, Н1.2, Н1.5 - Н1.8, Н2.1 и Н4.3 - Н4.5.
2. Нека съществува функция $f^* \in \Omega_f^a$ такава, че решението на задачата (4.18), (4.19), (4.20) е екуитотално устойчиво на областта D^* , независимо от трансляцията на хиперповърхнините (4.1).

Тогава, за всяка точка $x_0 \in D^*$ решението на задачата (1.2), (1.3), (1.4) е тотално устойчиво.

Теорема 4.3. Предполагаме, че:

1. Изпълнени са условията H1.1-H1.9, H2.1, H2.3, H2.4 и H4.3.

2. Съществува функция $f^* \in \Omega_f^b$ такава, че нулевото решение на системата (4.18), (4.19) е тотално устойчиво, независимо от трансляцията на хиперповърхнините (4.1).

Тогава нулевото решение на система (1.2), (1.3) е тотално устойчиво.

Параграф 5. В следващата лема (която има и самостоятелен интерес) са представени достатъчни условия, които гарантират близост в ограничен времеви интервал между решенията на две начални задачи за системи диференциални уравнения. Разликата между двете задачи е само в десните страни на системите. Десните страни се различават единствено във времево множество с “контролируема” мярка. За сметка на това, разликите между десните страни може да са сравнително “големи”. Ще отбележим, че във всички известни досега резултати за непрекъсната зависимост относно десните страни се изисква “близост” между тях в целия интервал на съществуване на решенията. Това условие тук е нарушено.

Нека J е измеримо множество от точки в R . Означаваме с $m[J]$ неговата Лебегова мярка. Нека $g_h: [\tau_0, \tau_0 + \theta] \times D \rightarrow R^n$, $0 \leq h \leq \theta$, е еднопараметрично семейство функции (с параметър h), $\tau_0, \theta \in R^+$ и D е област от R^n . В следващата лема с $y_{g_h}(t; \tau_0, y_{0h})$ ще означаваме решението на задачата без импулси

$$\frac{dy}{dt} = g_h(t, y), \quad y(\tau_0) = y_{0h}, \quad (5.1)$$

където $y_0 \in D$. За всяка точка $y_0 \in D$ и за всяка константа $\delta > 0$ такава, че $B_\delta(y_0) \subset D$ дефинираме множеството

$$Y_{h\delta}(y_0) = \{y \in R^n; y = y_{g_h}(\tau_0 + \theta; \tau_0, y_{0h}), y_{0h} \in B_\delta(y_0)\}.$$

Лема 5.1. Нека за $0 \leq h \leq \theta$ са изпълнени условията:

1. Функциите $g_h \in C([\tau_0, \tau_0 + \theta] \times D, R^n)$;

2. Съществува константа $M > 0$ такава, че

$$(\forall (t, y) \in [\tau_0, \tau_0 + \theta] \times D) \Rightarrow \|y\| \leq M;$$

3. Съществуват константи $L_0 > 0$, $L_h > L_0$ и $L > 0$ такива, че:

$$\begin{aligned} & - (\forall (t, y'), (t, y'') \in [\tau_0, \tau_0 + \theta] \times D) \Rightarrow \|y_h(t, y') - y_h(t, y'')\| \leq L_h \|y' - y''\|, \\ & - \lim_{h \rightarrow 0} h L_h = L; \end{aligned}$$

4. Съществуват множества $R_h \subset [\tau_0, \tau_0 + \theta]$ с мярка $m[R_h] = \theta - h$ такива, че са изпълнени равенствата

$$g_0(t, y) = g_h(t, y), \quad (t, y) \in R_h \times D;$$

5. За всяка точка $y_{0h} \in D$ решението на задачата (5.1) е продължимо до $\tau_0 + \theta$.

Тогава

$$(\forall y_0 \in D)(\forall \delta > 0, B_\delta(y_0) \subset D)(\exists h = \text{const} > 0) : y_{g_0}(\tau_0 + \theta; \tau_0, y_0) \in Y_{h\delta}(y_0).$$

Разглеждаме задачите с импулсни въздействия от предходните параграфи:

$$\sigma_i = \{(t, x) \in R^+ \times D; t = t_i(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i; \quad (5.7)$$

$$\Delta x(t) |_{t=t_i} = x(t_i^+) - x(t_i^-) = I_{j_i}(x(t_i^-)), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (5.8)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (5.9)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = f^*(t, x), \quad t \neq \tau_i^*; \quad (5.10)$$

$$\Delta x(t) |_{t=\tau_i^*} = I_{j_i^*}(x(\tau_i^*)), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (5.11)$$

$$x(\tau_0) = x_0, \quad (5.12)$$

където функцията $f^* \in \Omega_f^a$. Смисълът на означенията в горните две задачи е както в предходните параграфи.

Теорема 5.1. *Предполагаме, че:*

1. Валидни са условията Н1.1, Н1.2, Н1.6, Н1.7, Н1.8, Н2.1, Н2.4, Н4.3, Н4.4 и Н4.5.
2. Решението на задачата (5.7), (5.8), (5.9) е екуитотално устойчиво при $(t, x) \in D^*$, независимо от трансляцията на хиперповърхнините (5.6).
3. Моментът $\tau_0 \leq t_1(x)$, $x \in D$.
4. Изпълнено е

$$(\forall f^* \in \Omega_f^a)(\forall x_0 \in D^*)(\exists \beta = \text{const} > 0) : M(t_0, \beta, f^*) \subset [\tau_0, \infty) \times D.$$

Тогав за всяка точка $x_0 \in D^*$ и за всяка функция $f^* \in \Omega_f^a$ решението на граничната задача (5.10), (5.11), (5.12) е тотално устойчиво.

Теорема 5.2. *Предполагаме, че:*

1. Изпълнени са условията Н1.1-Н1.8, Н2.1, Н2.3, Н4.1, Н4.2 и Н4.5.
2. Нулевото решение на системата (5.7), (5.8) е тотално устойчиво, независимо от трансляцията на хиперповърхнините (5.6).

Тогав за всяка функция $f^* \in \Omega_f^b$ нулевото решение на системата (5.10), (5.11) е тотално устойчиво.

Параграф 6. В последния параграф на дисертацията се разглежда въпросът за устойчивост на решенията на моделната импулсна задача (3.8), (3.9), (3.10) от параграф 3. Ще приложим разработения в предходните параграфи метод на граничните уравнения. Разглеждаме задачата:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1 (e_1 - g_1 N_2 - g N_1) \Pi(t); \quad (6.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2 (g_2 N_1 - e_2) \Pi(t); \quad (6.2)$$

$$\Delta N_k|_{t=\tau_i} = \alpha_{ki} (N_k(\tau_i) - N_k^*), \quad k=1,2, \quad i=1,2,\dots, \quad (6.3)$$

където смисълът на означенията е както в третия параграф.

Припомняме, че $\tau_1, \tau_2, \dots$ са моментите, в които интегралната крива $(t, N_1(t), N_2(t))$ на съответна начална задача на системата (6.1), (6.2), (6.3) пресича някоя от хиперповърхнините

$$\sigma_i = \{(t, N_1, N_2) \in R^+ \times R^+ \times R^+; \quad t = t_i(N_1, N_2)\},$$

където функциите

$$t_i(N_1, N_2) = \chi_i + \beta_1 |N_1 - N_1^*| + \beta_2 |N_2 - N_2^*|, \quad i=1,2,\dots,$$

$$0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \chi_i = \infty, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0.$$

Точката (N_1^*, N_2^*) е стационарна за системата (6.1), (6.2), (6.3).

С $(N_1(t; 0, N_1^0, N_2^0), N_2(t; 0, N_1^0, N_2^0))$ означаваме решението на моделната система с начално условие

$$N_k(0) = N_k^0, \quad k=1,2, \quad (6.4)$$

Ще направим стандартната субституция

$$x_k(t) = N_k(t) - N_k^*, \quad k=1,2.$$

Исходната система от диференциални уравнения с импулси придобива следния вид

$$\frac{dx_1}{dt} = (e_1 x_1 - g_1 x_1 x_2 - g x_1^2 - g_1 (N_2^* x_1 + N_1^* x_2) - 2g N_1^* x_1) \Pi(t), \quad t \neq \tau_i; \quad (6.5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (g_2 x_1 x_2 - e_2 x_2 + g_2 (N_2^* x_1 + N_1^* x_2)) \Pi(t), \quad t \neq \tau_i; \quad (6.6)$$

$$\Delta x_k(t)|_{t=\tau_i} = \alpha_{ki} x_k, \quad k=1,2, \quad (6.7)$$

където $\tau_1, \tau_2, \dots$ са моментите, в които интегралната крива $(t, x_1(t), x_2(t))$ на съответна начална задача за системата (6.5), (6.6), (6.7) пресича хиперповърхнините

$$\sigma_i = \{(t, x) \in R^+ \times D; \quad t = (x_1, x_2) = \chi_i + \beta_1 |x_1| + \beta_2 |x_2|\}, \quad i=1,2,\dots. \quad (6.8)$$

В последния параграф са намерени условия, при които нулевото решение на задачата с импулси (6.10), (6.11) е тотално устойчиво, независимо от трансляцията на хиперповърхнините (6.8). Накрая, от Теорема 4.3 следва, че нулевото решение на система (6.5), (6.6), (6.7) е тотално устойчиво.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях, *Наукова думка, Москва*, (1988).
2. Борисенко С., Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсными воздействиями, *Украинский Математический Журнал*, (1983), Том 35, № 2, 144-150.
3. Борисенко С., Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсными воздействиями, *Дифференциальные Уравнения*, (1986), Том 22, № 5, 884-886.
4. Завалицин С., Сесекин А., Дрозденко С., Динамические системы с импульсной структурой, *Средне Урал. кн. изд-во, Свердловск*, (1983).
5. Завалицин С., Сесекин А., Импульсные процессы: Модели и приложения, *Наука, Москва*, (1991).
6. Калитин Б., О колебаниях маятника с ударными импульсами, *Дифференциальные Уравнения*, (1969), Том 5, № 7, 1267-1274.
7. Калитин Б., О колебаниях маятника с ударными импульсами, часть 2, *Дифференциальные Уравнения*, (1970), Том 6, № 12, 2174-2181.
8. Калитин Б., О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением, *Дифференциальные Уравнения*, (1971), Том 7, № 3, 540-542.
9. Каранджулов Л., Бойчук А., Божко В., Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной линейной краевой задачи, *Докл. АН Украины*, (1994), Том 1, 7-10.
10. Каранджулов Л., Стоянова Я., Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, *Весці НАН Беларусі*, (2003), Том 2, 59-65.
11. Каранджулов Л., Стоянова Я., Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, *Дифференциальные Уравнения*, (2004), Том 40, № 3, 310-323.
12. Кобринский А. Е., Кобринский А. А., Выбродарные системы, *Наука, Москва*, (1973).
13. Мильман В., Мышкис А., Об устойчивости движения при наличии толчков, *Сибирский Математический Журнал*, (1960), Том 1, № 2, 233-237.
14. Мильман В., Мышкис А., Случайные толчки в линейных динамических системах, *Приближенные методы решения дифференциальных уравнений*, Киев, Изд-во АН УССР, (1963), 64-81.
15. Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью, *Институт математики НАН Украины, Киев*, (2007).
16. Плотников В., Китанов Н., Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления, *Кибернетика и системный анализ*, (2002), Том 5, 71-85.
17. Плотников В., Китанов П., Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами, *Украинский Математический Журнал*, (1997), Том 49, № 11, 1504-1511.
18. Плотников В., Плотникова Л., Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами, *Украинский Математический Журнал*, (1995), Том 47, № 11, 1526-1532.
19. Самойленко А., Перестюк Н., Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями, *Дифференциальные Уравнения*, (1974), Том 10, № 11, 2001-2010.
20. Самойленко А., Перестюк Н., Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями, *Вища шк., Киев*, (1987).
21. Самойленко А., Перестюк Н., О методе усреднения в системах с импульсными воздействиями, *Украинский Математический Журнал*, (1974), Том 24, № 3, 411-418.
22. Самойленко А., Перестюк Н., Трофимчук С., Проблема "биений" в импульсных системах, *Институт математики АН УССР, Киев*, (1990).
23. Самойленко А., Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, *Украинский Математический Журнал*, (1961), Том 13, № 3, 85-94.
24. Филатов А., Методы усреднения в дифференциальных уравнениях, "Фан" Узбекской ССР, Ташкент, (1971).
25. Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, *Мир, Москва*, (1971).
26. Цыпкин Я., Критерии абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента, *ДАН СССР*, (1964), Том 155, № 5, 1029-1032.
27. Ahmad B., Sivasundaram S., The monotone iterative technique for impulsive hybrid set valued integro-differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 12, 2260-2276.
28. Agarwal R., O'Regan D., A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem, *Applied Mathematics and Computation*, (2003), Vol. 161, № 2, 433-419.
29. Agarwal R., O'Regan D., Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, (2000), Vol. 114, № 1, 51-59.
30. Ahmad B., Sivasundaram S., Dynamics and stability of impulsive hybrid setvalued integro-differential equations with delay, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2289-2293.

31. Ahmad B., Sivasundaram S., *Instability criteria for impulsive hybrid state dependent delay integrodifferential systems*,
32. Ahmad S., Stamov G., *Almost periodic Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2010), Vol. 11, № 2, 750-758.
33. Ahmad S., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E., *Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2004), Vol. 290, № 2, 436-451.
34. Ahmad S., Stamova I., *Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 3, 786-795.
35. Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., *An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2006), Vol. 7, № 5, 1255-1267.
36. Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., *Control over linear pulse systems*, *Ukrainian Mathematical J.*, (1995), Vol. 47, № 3, 360-368.
37. Andreev, A., Sedova. N., *On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equations*, *Functional Differential Equations*, (1998), Vol. 5, № 1-2, 21-37.
38. Anet F., Basus V., *Limiting equations for exchange broadening in two-site NMR systems with very unequal populations*, *J. of Magnetic Resonance*, (1978), Vol. 32, № 3, 339-343.
39. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., *I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2002), Vol. 43, № 10-11, 1203-1218.
40. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., *Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2000), Vol. 3, № 4, 7-18.
41. Angelova J., Dishliev A., *Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 39, № 4, (2000), 483-497.
42. Angelova J., Dishliev A., *Optimization problems in population dynamics*, *Applicable Analysis*, (1999), Vol. 69, № 3&4, 207-221.
43. Anokhin A., Berezansky L., Braverman E., *Exponential stability of linear delay impulsive differential equations*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1995), Vol. 193, 923-941.
44. Arstein, Z., *The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations*, *J. of Differential Equations*, (1977), Vol. 25, 184-202.
45. Artstein Z., *Uniform asymptotic stability via the limiting equations*, *J. of Differential Equations*, (1978), Vol. 27, 179-189.
46. Baek H., *Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies*, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008), Article ID 752403, 18 p.
47. Bainov D., Covachev V., *Impulsive differential equations with a small parameter*, *World Scientific*, Singapore, (1994).
48. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations*, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, (1991), Vol. 12, № 2, 149-161.
49. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1994), Vol. 187, № 3, 790-808.
50. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument*, *Kodai Mathematical J.*, (1997), Vol. 20, № 2, 120-126.
51. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument*, *Aplicable Analysis*, (1996), Vol. 63, № 3&4, 287-297.
52. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument*, *J. of Applied Analysis*, (1998), Vol. 4, № 2, 215-230.
53. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument*, *J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, (1998), Vol. 11, № 1, 95-102.
54. Bainov D., Dimitrova M., Petrov V., *Oscillatory properties of solutions of impulsive differential equations with several retarded argument*, *Georgian Mathematical J.*, (1998), Vol. 5, № 3, 201-212.
55. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations*, *Multivariate Approximation and Splines*, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.
56. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations*, *Indian J. of Pure and Applied Mathematics*, (1999), Vol. 30, № 9, 893-910.
57. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences*, (1989), Tome 42, № 12, 29- 32.
58. Bainov D., Dishliev A., Stamov G., *Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations*, *Kumamoto J. of Mathematics*, (1997), Vol. 10, 1-10.
59. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations*, *Annali dell'Universita di Ferrara, Sez. VII-Sc. Mat.*, (1995), Vol. 41, 45-54.

60. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics, *ANZIAM J.*, (2002), Vol. 43, 525-539.
61. Bainov D., Dishliev A., Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, *International J. of Systems Science*, (1990), Vol. 21, № 12, 2637-2643.
62. Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., Partial averaging for impulsive differential equations with supremum, *Georgian Mathematical J.*, (1996), Vol. 3, № 1, 11-26.
63. Bainov D., Kolev D., Nakagawa K., The control of the blowing-up time for the solution of the semilinear parabolic equation with impulsive effect, *J. Korean Mathematical Society*, (2000), Vol. 37, № 5, 793-802.
64. Bainov D., Kostadinov S., Minh N., Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations, Science Culture Technology Publishing, (1994).
65. Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 36, № 2, 383-393.
66. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., L_p -equivalence of linear and nonlinear impulsive differential equations in a Banach space, *Proceedings of Edinburgh Mathematical Society*, (1992), Vol. 36, 17-33.
67. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space, *International J. of Theoretical Physics*, (1989), Vol. 28, № 7, 797-814.
68. Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1995), Vol. 194, № 3, 612-639.
69. Bainov D., Kulev G., Stamova I., Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations, *SUT J. of Mathematics*, (1995), Vol. 1, 55-71.
70. Bainov D., Kulev G., Stamova I., Instability of solutions of impulsive systems of differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 35, № 8, 1799-1804.
71. Bainov D., Markova N., Simeonov P., Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown functions, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1998), Vol. 91, № 1, 87-96.
72. Bainov D., Milusheva S., Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1983), Vol. 95, № 1, 85-105.
73. Bainov D., Milusheva S., Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, (1981), Vol. 32, 237-254.
74. Bainov D., Minchev E., Trends in the theory of impulsive partial differential equations, *Nonlinear Word*, (1996), Vol. 3, 357-384.
75. Bainov D., Nenov S., Limit sets of impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations*, (1994), 31-34.
76. Bainov D., Petrov V., Proytcheva V., Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with "maxima", *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1997), Vol. 83, № 2, 237-249.
77. Bainov D., Simeonov P., Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions, World Scientific, Singapore, (1995).
78. Bainov D., Simeonov P., Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1993).
79. Bainov D., Simeonov P., Integral inequalities and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
80. Bainov D., Simeonov P., Oscillation theory of impulsive differential equations, International Publications, FL, (1998).
81. Bainov D., Simeonov P., System with impulse effect: Stability theory and applications, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
82. Ballinger G., Liu X., Permanence of population growth model with impulsive effects, *Mathematics and Computer Modeling*, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.
83. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Impulsive differential equations and inclusions, *Contemporary Mathematics and its Applications*, Hindawi Publishing Corporations, Vol. 2, (2006).
84. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces, *Applicable Analysis*, (2001), Vol. 80, № 3, 353-365.
85. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., Impulsive functional differential equations with variable times, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 47, № 10-11, 1659-1665.
86. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay, *International J. of Applied Mathematical Sciences*, (2005), Vol. 2, № 1, 130-148.
87. Benchohra M., Ouahab A., Impulsive neutral functional differential equations with variable times, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2003), Vol. 55, № 6, 679-693.
88. Berezansky L., Braverman E., On impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications, *J. of Differential Equations and Applications*, (2004), Vol. 10, № 9, 851-868.

89. Bondi P., Moauro V., Visentin F., *Limiting equations in the stability problem*, *Nonlinear Analysis: Theory Method & Applications*, (1977), Vol. 1, 123-128.
90. Braverman E., Mamdani R., *Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment*, *J. of Mathematical Biology*, (2008), Vol. 57, № 3, 413-434.
91. Burton T., *Periodicity and limiting equations in Volterra systems*, *Bolletino della Unione Matematica Italiana*, (1985), Vol. 4, 31-39.
92. Chellaboina V., Bhat S., Haddad W., *An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems*, *Nonlinear Analysis*, (2003), Vol. 53, № 3-4, 527-550.
93. Chen G., Shen J., *Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks*, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A*, (2007), Vol. 14, 177-188.
94. Chen J., Tisdell C., Yuan R., *On the solvability of periodic boundary value problems with impulse*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 331, № 2, 902-912.
95. Chen S., Qi J., Jin M., *Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2003), Vol. 46, № 8-9, 1281-1287.
96. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2012), Vol. 11, № 1, 57-80.
97. Chukleva R., Dishliev A., *On the continuous dependence of the switching moments of trajectories*, *Proceedings of the Jubilee Scientific Conference with International Participation Dedicated to the, 50th Anniversary of the Smolyan Branch of Plovdiv University*, (2013), Vol. 2, Part 2, 75-80.
98. Cordova-Lepe F., *Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics*, *Biomat 2006, International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
99. D'Anna A., Maio A., Moauro V., *Global stability properties by means of limiting equations*, *Nonlinear Analysis: Theory, Method & Applications*, (1980), Vol. 4, 407-410.
100. D'Anna A., Maio A., Moauro V., *Limiting equations in asymptotic stability problems for nonautonomous differential equations*, *Annali dell'Università di Ferrara, Sez. VII*, (1979), Vol. 25, 75-97.
101. D'Anna A., *Total stability properties for an almost periodic equations by means of limiting equations*, *Funkcialaj Ekvacioj*, (1984), Vol. 27, 201-209.
102. D'onofrio A., *Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model*, *Mathematical Biosciences*, (2002), Vol. 179, № 1, 179, 57-72.
103. Dai B., Su H., Hu D., *Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.
104. Dimov H., Nenov S., Petkova S., *Continuous dependence of the solutions of impulsive dynamical systems from the initial conditions*, *J. of the University of Chemical Technology and Metallurgy*, (2001), Vol. 36, № 1, 103-112.
105. Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments*, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 1, 39-64.
106. Dishliev A., Bainov D., *Conditions for the absence of the phenomenon "beating" for systems of impulse differential equations*, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, (1985), Vol. 13, № 3, 237-256.
107. Dishliev A., Bainov D., *Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.
108. Dishliev A., Bainov D., *Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with impulses*, *Aplicable Analysis*, (1984), Vol. 18, № 1&2, 67-73.
109. Dishliev A., Bainov D., *Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations*, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 363-372.
110. Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right-hand side*, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, № 2, 149-159.
111. Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., *Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications*, *Academic publications*, (2012).
112. Dishliev A., Dishlieva K., *Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations*, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 2, (2011), 167-187.
113. Dishliev A., Markova N., *Sufficient conditions for oscillation of the solutions of impulsive linear homogeneous differential equations with retarded argument*, *Communications in Applied Analysis*, (2007), Vol. 11, № 2, 223-228.
114. Dishliev A., Stoykov D., *Stability of limiting equations of impulsive differential equations*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2002), Vol. 6, № 4, 389-410.
115. Dishliev A., Stoykov D., *Stability via limiting equations of impulsive differential equations*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2002), Vol. 6, № 4, 369-388.

116. Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., A class of integral manifolds for autonomous systems of differential equations, *German J. of Advanced Mathematical Sciences*, (2013), Vol. 1, № 1, 11-19.
117. Dishlieva K., Dishliev A., Chukleva R., Petkova S., Continuous dependence on the impulsive effects of dying solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, *European J. of Mathematical Sciences*, (2013), Vol. 2, № 2, 215-228.
118. Dishlieva K., Dishliev A., Girginov C., Petkova S., Continuous dependence in case of permanent active effects on the partially bounded solutions of differential equations with variable structure, *J. of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, (2013), Vol. 5, № 2, 16-33.
119. Dishlieva K., Dishliev A., Limitations of the solutions of differential equations with variable structure and impulses using sequences of Lyapunov functions, *J. of Advanced Research in Applied Mathematics*, (2013), Vol. 5, № 2, 39-52.
120. Dishlieva K., Dishliev A., Petkova S., Death of the solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2012), Vol. 11, № 3, 169-181.
121. Dong L., Chen L., Shi P., Periodic solutions for a two-species nonautonomous competition system with diffusion and impulses, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 32, № 5, 1916-1926.
122. Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth, *The J. of Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, (1991), Vol. 32, 382-400.
123. Feng C., Huang Z., Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
124. Fenner L., Pinto M., On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 38, № 3, 307-325.
125. Franco D., Nieto J., Maximum principles for periodic impulsive first order problems, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1998), Vol. 88, № 1, 149-159.
126. Frigon M., O'Regan D., First order impulsive initial and periodic problems with variable moments, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1996), Vol. 233, № 2, 730-739.
127. Frigon M., O'Regan D., Impulsive differential equations with variable times, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (1996), Vol. 26, № 12, 1913-1922.
128. Frigon M., O'Regan D., Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, (2001), Vol. 8, № 2, 149-159.
129. Fu X., Li X., Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time, *Mathematics and Computer Modeling*, (2008), Vol. 48, № 5-6, 776-786.
130. Gao S., Chen L., Nieto J., Torres A., Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, *Vaccine*, (2006), Vol. 24, № 35-36, 6037-6045.
131. Gao S., Teng Z., Nieto J., Torres A., Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay, *J. Biotechnology*, (2007), Article ID 64870.
132. Georgieva A., Kostadinov S., L_p -equivalence of impulsive differential equations, *SUT J. of Mathematics*, (1997), Vol. 33, № 2, 291-301.
133. Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the L_p -equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, *Turkish J. of Mathematics*, (2008), Vol. 32, 451-466.
134. Gladilina R., Ignatyev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, *International J. of Applied Mechanics*, (2008), Vol. 44, № 2, 228-237.
135. Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, (1996), Vol. 26, № 1, 165-173.
136. Gopalsamy K., Zhang B., On delay differential equations with impulses, *J. Mathematical Analysis and Applications*, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.
137. Guo H., Chen L., Time-limited pest control of a Lotka-Volterra model with impulsive harvest, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 840-848.
138. Hamaya Y., Total stability property in limiting equations of integrodifferential equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, (1990), Vol. 33, 345-362.
139. Hartman F., *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).
140. Hatvani L., On partial asymptotic stability and instability. II (The method of limiting equations), *Acta Sci. Math.*, (1983), Vol. 46, 143-156.
141. Hino Y., Murakami S., Limiting equations and some stability properties for asymptotically almost periodic functional differential equations with infinite delay, *Tohoku Mathematical J., Second Series*, (2002), Vol. 54, № 2, 239-257.
142. Hristova S., Bainov D., Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations, *Rocky Mountain J. of Mathematics*, (1993), Vol. 23, № 2, 609-618.
143. Hristova S., Kulev G., Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2001), Vol. 132, № 2, 399-407.
144. Hristova S., Roberts L., Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, (2001), Vol. 34, № 7-8, 839-847.

145. Ignatyev A., On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 1, 53-72.
146. Jia J., Li C., A Predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195, 15 p.
147. Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey, *Applied Mathematics and Mechanics*, (2008), Vol. 29, № 5, 653-663.
148. Jin Z., Zhien M., Maoan H., The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competitions system with impulsive, *Chaos Solitons & Fractals*, (2004), Vol. 22, № 1, 181-188.
149. Juang G., Lu Q., Impulsive state feedback control of a predator-prey model, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2007), Vol. 200, № 1, 193-207.
150. Juang G., Lu Q., The dynamics of a prey-predator model with impulsive state feedback control, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B*, (2006), Vol. 6, 1310-1320.
151. Karandjulov L., Stoyanova Y., Problem of Cauchy for linear singularly perturbed impulsive systems, *Miskolc Mathematical Notes*, (2002), Vol. 3, № 1, 25-37.
152. Kato J., Martynyuk A., Shestakov A., *Stability of motion of nonautonomous systems (Methods of limiting equations)*, Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, (1996).
153. Kato J., Uniformly asymptotic stability and total stability, *Tohoku Mathematical J.*, (1979), Vol. 25, 75-79.
154. Kato J., Yoshizawa T., Remarks on global properties in limiting equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, (1981), Vol. 24, 363-371.
155. Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator, *Rostocker Mathematisches Kolloquium*, (1999), Vol. 53, 51-59.
156. Kulev G., Bainov D., Global stability of sets for systems with impulses, *Applied Mathematics and Computation*, (1989), Vol. 29, № 3, 255-270.
157. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
158. Lakshmikantham V., Liu X., Stability for impulsive differential systems in terms of two measures, *Applied Mathematics and Computations*, (1989), Vol. 29, № 1, 89-98.
159. Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., Hybrid systems with time scales and impulses, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2147-2152.
160. LaSalle J., Artstein Z., *The stability of dynamical systems: Appendix A: Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, (1976).
161. Li J., Nieto J., Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 226-236.
162. Liu B., Teng Z., Liu W., Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.
163. Liu L., Ye Y., Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses, *International J. of Computational and Mathematical Sciences*, (2011), Vol. 5, № 4, 229-235.
164. Liu X., Chen L., Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator, *Chaos Solitons & Fractals*, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.
165. Liu X., Chen L., Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.
166. Liu X., Li G., Luo G., Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.
167. Liu X., Stability results for impulsive differential systems with application to population growth models, *Dynamics and Stability of Systems*, (1994), Vol. 9, № 2, 163-174.
168. Luo Z., Shen J., Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional, *Applied Mathematics Letters*, (2009), Vol. 22, № 2, 163-169.
169. Marcus M., Mizel V., Limiting equations for problems involving long range memory, *Memoirs of the American Mathematical Society*, (1983).
170. Meng X., Chen L., Li Q., The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, (2008), Vol. 198, № 1, 361-374.
171. Meng X., Chen L., Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 2, 179-196.
172. Meng X., Jiao J., Chen L., The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 2, 1255-1267.
173. Meng X., Li Z., Nieto J., Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment, *J. of Mathematical Chemistry*, (2010), Vol. 47, № 1, 123-144.
174. Milev N., Bainov D., Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 353-361.
175. Milev N., Bainov D., Roach G., Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (1989), Vol. 11, № 2, 271-278.

176. Milev N., Bainov D., *Stability of linear impulsive differential equations*, *Computers & Mathematics with Applications*, (1990), Vol. 20, № 12, 35-41.
177. Murakami, S., *Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations*, *J. of Differential Equation*, (1985), Vol. 59, 314-335.
178. Naulin R., Pinto M., *Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 208, № 2, 281-297.
179. Nenov S., Bainov D., *Impulsive dynamical systems*, *Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations*, (1992), 145-166.
180. Nenov S., *Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics*, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 36, № 7, 881-890.
181. Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., *Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects*, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2009), Vol. 224, № 2, 544-555.
182. Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., *The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator*, *BioSystems*, (2009), Vol. 98, № 2, 67-72.
183. Nieto J., O'Regan D., *Variational approach to impulsive differential equations*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 680-690.
184. Nieto J., Rodrigues-Lopez R., *Boundary value problems for a class of impulsive functional equations. Computers & Mathematics with Applications*, (2008), Vol. 55, № 12, 2715-2731.
185. Nieto J., Rodríguez-López R., *Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.
186. Pandit S., Deo S., *Differential systems involving impulses*, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
187. Perestyuk M., Chernikova O., *Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations*, *Ukrainian Mathematical J.*, (2008), Vol. 60, № 1, 91-107.
188. Petkova S., Antonov A., Chukleva R., *Reachable sets for homogenous systems of differential equations and their topological properties*, *American J. of Applied Mathematics*, Vol. 1, № 4, (2013), 49-54.
189. Petkova S., Girginov C., Petkov T., *Electrical breakdowns during formation of anodic oxide films on aluminum*, *Advances in Natural Science: Theory and Applications*, (2013), Vol. 2, № 1, 23-30.
190. Petkova S., *On the fundamental theory of impulsive differential equations with variable structure*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2013), Vol. 12, № 2, 121-129.
191. Plotnikov V., Ivanov R., Kitanov N., *Method of averaging for impulsive differential inclusions*, *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, (1998), Vol. 12, 43-55.
192. Rogovchenko Y., *Nonlinear impulse evolution systems and applications to population models*, *J. Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 207, № 2, 300-315.
193. Samoilenko A., Perestyuk N., *Impulsive differential equations*, *World Scientific*, Singapore, (1995).
194. Sell G., *Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I: The basic theory*, *Transactions of the American Mathematical Society*, (1967), Vol. 127, 241-262.
195. Sell G., *Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II: Limiting equations*, *Transactions of the American Mathematical Society*, (1967), Vol. 127, 263-283.
196. Shen J., Li J., *Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.
197. Simeonov P., Bainov D., *Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations*, *Tamkang J. of Mathematics*, (1991), Vol. 22, № 3, 275-284.
198. Simeonov P., Bainov D., *Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter*, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (1988), Vol. 31, № 2, 353-368.
199. Simeonov P., Bainov D., *Estimates for Cauchy matrix of perturbed linear impulsive equations*, *Chinese J. of Mathematics*, (1993), Vol. 1, 73-80.
200. Stamov G., *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*, *Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London*, (2012).
201. Stamov G., Stamova I., *Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay*, *Applied Mathematical Modeling*, (2007), Vol. 31, № 7, 1263-1270.
202. Stamov G., Stamova I., *Integral manifolds for impulsive differential-difference equations*, *Electronic Modeling*, (2005), Vol. 4, 115-120.
203. Stamov G., Stamova I., *Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2001), Vol. 258, № 2, 371-379.
204. Stamova I., *Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations*, (2008), *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, (2008), Vol. 77, 331-345.
205. Stamova I., Emmenegger G.-F., *Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets*, *International J. of Applied Mathematics*, (2004), Vol. 15, № 3, 271-290.
206. Stamova I., *On the stability of an impulsive differential-difference population model*, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, 285-291.

207. Stamova I., Parametric stability of impulsive functional differential equations, *J. of Dynamical and Control Systems*, (2008), Vol. 14, № 2, 235-250.
208. Stamova I., *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2009).
209. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations, *Electronic J. of Differential Equations*, (2008), Vol. 48, 1-10.
210. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2001), Vol. 130, № 1-2, 163-171.
211. Stamova I., Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 612-623.
212. Stoykov D., Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the initial condition and on the right-hand side of the system, *Mathematica Balkanica New Series*, Vol. 11, (1997), 97-113.
213. Sun S., Chen L., Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, *Applied Mathematics and Computation*, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.
214. Visentin F., Limiting equations in the problem of total stability, *Ricerche di Matematica*, (1979), Vol. 28, 323-331.
215. Wang F., Pang G., Shen L., Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.
216. Wang H., Feng E., Xiu Z., Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.
217. Wang W., Shen J., Luo Z., Partial survival and extinction in two competing species with impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.
218. Wang X., Song Q., Song X., Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay, *Applied Mathematical Modeling*, (2009), Vol. 33, № 11, 4231-4240.
219. Wu J., Xia H., Existence of periodic solutions to integro-differential equations of neutral type via limiting equations, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, (1992), Vol. 112, 403-418.
220. Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.
221. Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.
222. Xian X., O'Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, *Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems*, (2008), Vol. 2008, Article ID 197205.
223. Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, *Mathematics and Computer Modeling*, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.
224. Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.
225. Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays, *Physics Letters A*, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.
226. Yoshizawa T., *Stability theory by Liapunov's second method*, The Mathematical Society of Japan, (1966).
227. Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.
228. Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.
229. Zavalishchin S., Seseikin A., *Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
230. Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Advances in Complex Systems*, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.
231. Zhang H., Chen L., Nieto J., A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 4, 1714-1726.
232. Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, *Mathematical and Computer Modelling*, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.
233. Zhang X., Shuai Z., Wang K., Optimal impulsive harvesting policy for single population, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651.
234. Zhao A., Lakshmikantham V., Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящия дисертационен труд са получени следните по-важни резултати, отнасящи се към фундаменталната и качествена теория на импулсни неавтономни

диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия. Намерени са достатъчни условия за:

1. Отсъствие на явлението биене и продължимост на решенията;
2. Непрекъсната зависимост на решенията относно началното условие и дясната страна на системата;
3. Тотална устойчивост на изходното импулсно уравнение, ако съществува гранично уравнение, което е еквитотално устойчиво, независимо от транслагациите на импулсните хиперповърхнини;
4. Тотална устойчивост на всяко гранично уравнение, ако изходното уравнение е еквитотално устойчиво, независимо от транслагациите на импулсните хиперповърхнини;
5. Получените теоретични резултати са приложени върху конкретни импулсни математически модели от популационната динамика.

ДЕКЛАРАЦИЯ

1. Резултатите и сведенията от увода са предварителни и се основават на различни литературни източници, които са надлежно посочени.
2. Основните резултати в параграфите с номера 1, 2 и 3 са публикувани в статията:
Stoykov D., Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the initial condition and on the right-hand side of the system, Mathematica Balkanica New Series, Vol. 11, (1997), 97-113.
3. Няколко помощни резултата в параграф 1 са взимствани от статията:
Dishliev A., Bainov D., Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.
4. Резултатите в параграфите с номера 4 и 6 са публикувани в статията:
Dishliev A., Stoykov D., Stability via limiting equations of impulsive differential equations, International J. of Differential Equations and Applications, Vol. 6, № 4, (2002), 369-388.
5. Резултатите в параграф 5 са публикувани в статията:
Dishliev A., Stoykov D., Stability of limiting equations of impulsive differential equations, International J. of Differential Equations and Applications, Vol. 6, № 4, (2002), 389-410.

СПИСЪК

на публикации по дисертационния труд
с автор Димитър Стойков Стойков

1. *Stoykov D., Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the initial condition and on the right-hand side of the system, Mathematica Balkanica New Series, Vol. 11, (1997), 97-113.*
2. *Dishliev A., Stoykov D., Stability via limiting equations of impulsive differential equations, International J. of Differential Equations and Applications, Vol. 6, № 4, (2002), 369-388.*
3. *Dishliev A., Stoykov D., Stability of limiting equations of impulsive differential equations, International J. of Differential Equations and Applications, Vol. 6, № 4, (2002), 389-410.*