

ВЪРХУ КАЧЕСТВЕНАТА ТЕОРИЯ НА ИМПУЛСНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Катя Георгиева Дишлиева

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на

ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД

за придобиване на образователна и научна степен „доктор”

Област: 4. Природни науки, математика и информатика,
Професионално направление: 4.5 Математика
Научна специалност: 01 01 05 Диференциални уравнения

Научен ръководител

доц. дмн Иванка Стамова

София, 2011

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита от разширен катедрен съвет на катедра Математика при Химикотехнологичен и металургичен университет, град София, проведен на 06. 06. 2011 г.

Дисертантката е главен асистент в катедра Алгебра и геометрия на Факултета по приложна математика и информатика при Технически университет – София.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 15.07. 2011 от 13 ч. в зала 100, сграда Б на ХТМУ – София.

Научно жури:

1.	доц. д-р	Димитър Колев	ХТМУ	Председател и рецензент Научен ръководител Рецензент
2.	доц. дмн	Иванка Стамова	БСУ	
3.	проф. дмн	Снежана Христова	ПУ “П. Хилендарски”	
4.	доц. д-р	Маргарита Димитрова	ТУ-Сливен	
5.	доц. д-р	Валентина Проичева	ТУ-Пловдив	

Основни данни за дисертационния труд:

- автор: гл. ас. Катя Георгиева Дишлиева;
- научен ръководител: доц. дмн Иванка Стамова;
- заглавие: «Върху качествената теория на импулсни диференциални уравнения и приложения»;
- научна специалност: Диференциални уравнения;
- шифър: 01 01 05;
- брой параграфи: 13, разпределени в 5 глави;
- брой страници: 141;
- брой литературни източници: 241;
- брой публикации на дисертантката, свързани с дисертационния труд: 3.

Глава 0. Увод

Разглежданите въпроси в дисертационния труд се отнасят към качествената теория на някои видове импулсни диференциални уравнения и приложенията им в различни математически модели от популационната динамика и фармакокинетиката. Този клас уравнения е удобен математически апарат за моделиране на процеси и явления, които по време на своето развитие са подложени на кратковременни външни въздействия. Предполага се, че времетраенето на въздействията е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процесите или явленията, които импулсните уравнения описват. Поради това може да се приеме, че въздействията са „мигновени” и се извършват под формата на импулси. Изучаването на „скокообразно” развиващи се динамични състояния е предмет и на други науки, като: механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. В тези случаи използването на математически апарат под формата на моделиращи импулсни диференциални уравнения, като правило, е задължително.

Така например, скокообразни изменения в развитието на процесите се наблюдават при:

- действието на амортизатор, подложен на ударни въздействия [32] и [35];
- изменението на скоростта на затвора на клапан при преминаването му от отворено в затворено състояние [18] и [113];
- колебанията на системи от махала при наличие на външни импулсни смущения [10], [11] и [12];
- ударен модел на часовников механизъм [3] и [17];
- виброударни системи [2] и [16];
- релаксионни колебания на електромеханични системи [1];
- електронни схеми [9] и [25];
- затихващ осцилатор, подложен на импулсни въздействия [32];
- динамиката на системи за автоматично регулиране [25] и [34];
- управление на орбитата на спътник с помощта на радиални ускорения [8] и [9];
- преминаването на твърдо тяло от флуид с дадена плътност във флуид с друга плътност [32];
- изменението на скоростта на химична реакция при прибавянето или отнемането на катализатор;
- смущения в клетъчни невронни мрежи [42], [44], [101], [104], [105], [205], [207] и [229];
- импулсни пертурбации в скоростта на развитие на кълбовидни бактерии, подчинени на закона на Schmalhausen [117];
- импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на изолирана популация [51], [66], [67], [92], [122], [141], [174], [216] и [239];
- загиване на популации в резултат на импулсни въздействия [179];
- импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на общество от тип жертва-хищник [48], [49], [53], [152], [154], [155], [188], [189], [227] и [236];
- фармакокинетиката [108], [132] и [133];
- епидемиологията [237];
- „шокови” изменения на цените на затворените пазари [211] и др.

Математическата теория на системите, които в определени моменти се изменят скокообразно, се развива в две основни направления.

Едното от тези направления е въведено в работите на С. Завалищин, А. Сесекин и С. Дрозденко [8], А. Халанай и Д. Векслер [33], S. Pandit и S. Deo [195] и др. Тук основен математически апарат за описание на импулсните въздействия са обобщени функции (от типа на Дирак). При задачите, които се изучават в това направление на теорията на импулсните диференциални уравнения, моментите на импулсно въздействие са предварително фиксирани. Ще отбележим, че в този случай използваният подход за описание на „скокообразни“ процеси не е подходящ за моделиращите системи, при които импулсните моменти се определят динамично, в зависимост от стойностите на решението във всеки момент от дефиниционното му множество.

Началото на второто направление в изучаването на „скокообразни“ процеси е поставено от В. Мильман и А. Мышкис в първата половина на шестдесетте години на миналия век [19] и [20]. В тези работи са дадени някои общи съображения за необходимостта от изучаване на системите с импулсно въздействие. Получени са първите резултати за устойчивост на техните решения. Непосредствено след първоначалните изследвания на В. Мильман и А. Мышкис тази математическа теория се развива от редица украински математици, от които ще посочим: А. Самойленко, Н. Перестюк, В. Плотников, С. Борисенко, А. Игнатиев, Ю. Роговченко, М. Ахметов, О. Черникова и П. Забрейко ([6], [7], [22], [23], [24], [27], [29], [31], [47], [77], [197], [198] и [232]). В началото на осемдесетте години и след това се създадоха няколко математически школи, продължаващи научните изследвания върху фундаменталната и качествената теория на импулсните диференциални уравнения и тяхните приложения. Тук ще посочим школите на: М. Pinto ([139], [126] и [185]), J. Nieto ([127], [165], [190] и [193]) и V. Lakshmikantham ([163], [164] и [240]).

Най-общо, импулсните уравнения се състоят от три части (виж [52], [191], [192], [196], [226] и др.):

- диференциално уравнение (система уравнения), която описва диференцируемата част на решението и обикновено има вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

където функцията f е непрекъсната в област на променливите t и x ;

- условие за последователно определяне на моментите на импулсно въздействие върху решението. В най-простия случай импулсните моменти са предварително фиксирани. В по-сложния и по-общ случай импулсните моменти са последователни решения на уравнение (система уравнения) от вида

$$g(t, x(t)) = 0,$$

където функцията g е дефинирана и непрекъсната в разширеното фазово (или само във фазовото) пространство на системата диференциални уравнения, а $x = x(t)$ е решение на същата система;

- импулсна функция, която определя големината и посоката на импулсното въздействие. Тази функция обикновено има вида

$$x(t_{imp} + 0) = I(x(t_{imp})),$$

където функцията I е дефинирана и непрекъсната във фазовото пространство на разглежданата импулсна система, а t_{imp} е решение на уравнението от предходната точка.

По начина на определяне на моментите на импулсни въздействия импулсните диференциални уравнения се разделят на различни класове, от които тук ще посочим следните:

- с фиксирани моменти на импулсно въздействие ([36], [37], [38], [94], [131] и др.);
- с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които интегралната крива на уравнението среща предварително зададени множества, разположени в разширеното фазово пространство. Най-често тези множества са непресичащи се хиперповърхнини ([64], [71], [93], [95], [97], [129], [130] и др.);
- с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които траекторията на уравнението среща предварително зададени множества, разположени във фазово пространство [48];
- с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които решението минимизира даден функционал [67];
- с импулсни моменти, които имат случаен характер и удовлетворяват определен закон на разпределение и др.

Решенията на съответните начални задачи за импулсни диференциални уравнения са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род, в които решенията са непрекъснати отляво.

Специфичните особености, свързани с изследването на импулсните диференциални уравнения и възникващите трудности при тяхното изучаване, са както следва:

- Прекъснатост на решението: Точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът” е ограничен. Обикновено се предполага, че решението е непрекъснато отляво в точките на импулсно въздействие (виж монографиите [28] и [162]);
- Наличие на ефекта „биене” ([30], [111] и [115]): В този случай, интегралната крива или траекторията на уравнението среща многократно (възможно е и безбройно много пъти) импулсното множество. Тогава е възможно да се достигне до специфична ситуация, при която импулсните моменти да притежават точка на сгъстяване и следователно решението да не е продължимо надясно от тази точка. Това означава, че решението „загива”. Поради тази причина при описаната по-горе ситуация, не може да се изучават различни аспекти на качествената теория на този тип уравнения, като например: непрекъснатата зависимост, периодичност, устойчивост и др.;
- Загуба на свойството автономност: Ще отбележим, че дори и в случаите, когато десните страни на уравненията с импулси не зависят от времето, импулсните моменти се получават като решения на уравнения, в които участва решението

(което разбира се е функция на времето). Следователно тези моменти зависят от времето, включително и от началния момент. Това означава, че решението на задачата с импулси (което зависи от импулсните моменти) е съставна функция на началния момент. По този начин заключаваме, че то не е автономно;

- Сливане на решения: Обикновено сливането се осъществява след импулсно въздействие;
- Промяна на импулсните моменти след промяна на началното условие: Различните решения на едно и също импулсно уравнение (с начални условия, които не съвпадат) имат различни импулсни моменти, включително при едното от тези решения е възможно да липсват импулси. При смущения на началното условие изходната и смутената задача е възможно да имат разлики и в големините и посоките на импулсите;
- Промяна на импулсните моменти при смущаване на системата: Смущенията на системата може да се състоят в промяна на дясната страна, в промяна на параметри на уравнението, в промяна на импулсните функции и др. Решението на изследваната задача и съответното решение на смутената задача (при едни и същи начални условия) в общия случай имат различни импулсни моменти и различни по големина и направление импулсни въздействия;
- Натрупване на грешки: Пертурбациите и неточностите при импулсните въздействия се „натрупват” във времето и оказват съществено влияние при определяне на поведението на решението. Така например при неограничен брой импулси тези пертурбации могат да имат непреодолим характер и да доведат до формирането на решения, които се различават неограничено от изучаваното „не пертурбирано” решение и др.

Ще обърнем внимание на факта, че голяма част от известните класически резултати, отнасящи се за диференциални уравнения без импулси (виж като пример монографиите [4], [26], [140] и [231]), са преформулирани и обобщени за някои от споменатите по-горе класове импулсни диференциални уравнения. Така например, класическата качествената теория почти изцяло е преформулирана за класа на уравненията с предварително фиксирани моменти на импулсни въздействия. Ще споменем, че в някои случаи съответните резултати за уравненията с фиксирани моменти на импулсно въздействие са тривиално обобщение на известните класически теореми, поради което те дори не са отразени в научната литература. От друга страна, за някои специални класове импулсни диференциални уравнения съответната на класическата качествена теория е все още в начален стадий. Тук, като пример ще посочим уравненията с импулсни моменти, които имат случаен характер.

При изследването на импулсните диференциални уравнения възникват редица специфични особености, които провокират изучаването на съответните им специфични качествени свойства на тяхните решения. Ще припомним резултатите, отбелязани по-горе и посветени на явлениято „биеене”. Те се отнасят за уравнения, при които импулсни моменти, съвпадат с моментите, в които съответната интегрална крива среща предварително зададени непресичащи се хиперповърхнини. Тук ще допълним списъка на специфичните свойства за импулсните уравнения от посочения клас, като посочим и работи, посветени на изучаването на равномерна устойчивост на решенията им относно изменения в

големините на импулсните смущения [116] и относно изменения на импулсните хиперповърхнини [71]. При уравненията без импулси такива резултати са лишени от смисъл. Ще отбележим, че за споменатия клас уравнения импулсните моменти зависят от началното условие на решението. В общия случай тези моменти са различни за всяко отделно решение. С други думи, импулсните моменти съществено зависят от решението. Това означава, че „близост” между две различни решения не може да се очаква в достатъчно малки околности на импулсните моменти. Това се дължи на обстоятелството, че в тези околности е възможно едното от решенията да е извършило „импулсен скок”, а на другото решение такъв скок да предстои.

Основните цели на дисертационния труд са две:

1. Въвеждането на нови класове импулсни диференциални уравнения, съответни на процеси и явления от практиката.
2. Изучаването на специфични и характерни само за тях непрекъснати зависимости, диференцируемости и устойчивости на решенията. Във всички разглеждани в дисертацията импулсни уравнения смущенията са в импулсните множества (в частност импулсните моменти) или в големините на импулсните функции (големините на импулсните „скокове”).
3. Получените резултати са приложен върху известни математически модели от популационната динамика или фармакокинетиката. Намерените асимптотични качества на решенията са интерпретирани в термините на съответните модели. Изрично е подчертано, че изследваните свойства на моделите са възможни само благодарение на предходните теоретични резултати в дисертационния труд.

При следващите разглеждания номерацията на главите, условията, дефинициите и теоремите са запазени както в дисертационния труд.

Глава 1. Непрекъснатата зависимост и устойчивост на решенията на диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и импулсните моменти

Основен обект на изследване в тази глава са нелинейни системи обикновени диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсни въздействия. За този тип уравнения са изучени понятията непрекъснатата зависимост и устойчивост относно началното условие и импулсните моменти. Изрично ще подчертаем, че тези понятия са специфични за решенията на импулсните системи диференциални уравнения и са въведени за първи път тук. Намерени са достатъчни условия, при които решенията на тези системи притежават споменатите свойства. Резултатите са приложени върху импулсен математически модел от фармакокинетиката.

Върху устойчивостта на решенията на различни класове импулсни диференциални уравнения относно началното условие са посветени множество изследвания. Освен посочените в увода резултати, тук ще отбележим допълнително: [137], [175], [228], [230] и [233]. В следващите два параграфа изследванията, които се отнасят за непрекъснатата зависимост и устойчивост по отношение на импулсните моменти, са нови. Импулсният модел от третия параграф е взиман от [180]. Представените изследвания върху този модел са нови. Различни аспекти на динамични импулсни математически модели от фармакокинетиката се изучават в [54], [169] и [219].

В първия параграф на първа глава разглеждаме следната начална задача за импулсни диференциални уравнения:

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i,$$

$$(1.2) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \quad i=1, 2, \dots,$$

$$(1.3) \quad x(t_0) = x_0,$$

където: $f: \mathbb{R}^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$; D е област, $D \subset \mathbb{R}^n$; $t_i \in \mathbb{R}^+$; $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots$; $I_i: D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $(Id + I_i): D \rightarrow D$ и $x_0 \in D$. Тук идентитетът в $\mathbb{R}^n$ е означен с Id .

Заедно със задачата (1.1), (1.2), (1.3) ще разгледаме съответната смутена задача:

$$(1.4) \quad \frac{dx^*}{dt} = f(t, x^*), \quad t \neq t_i^*,$$

$$(1.5) \quad x^*(t_i^* + 0) = x^*(t_i^*) + I_i(x^*(t_i^*)), \quad i=1, 2, \dots,$$

$$(1.6) \quad x^*(t_0^*) = x_0^*,$$

където $0 \leq t_0^* < t_1^* < t_2^* < \dots$ и $x_0^* \in D$.

Решенията на задачите (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4), (1.5), (1.6) означаваме съответно с $x(t; t_0, x_0)$ и $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$.

Дефиниция 1.1. Ще казваме, че решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3) зависи непрекъснато от началната точка (t_0, x_0) и импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$, ако:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) (\forall T > t_0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, T) > 0): \\ & (\forall (t_0^*, x_0^*) \in [0, T] \times D, |t_0^* - t_0| < \delta, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & (\forall t_1^*, t_2^*, \dots \in \mathbb{R}^+, t_0^* < t_1^* < t_2^* < \dots, |t_1^* - t_1| < \delta, |t_2^* - t_2| < \delta, \dots) \\ & \Rightarrow \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, T] \setminus \bigcup_{i=0,1,\dots} \langle t_i^*, t_i \rangle. \end{aligned}$$

По-нататък ще използваме следните условия:

H1.1. Функцията $f \in C[\mathbb{R}^+ \times D, \mathbb{R}^n]$.

H1.2. Съществува константа $C_f > 0$, такава че

$$(\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times D) \Rightarrow \|f(t, x)\| \leq C_f.$$

H1.3. Съществува константа $L > 0$, такава че

$$(\forall (t, x^*), (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times D) \Rightarrow \|f(t, x^*) - f(t, x)\| \leq L \|x^* - x\|.$$

H1.4. Изпълнено е $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

H1.5. $(\forall (t_0^*, x_0^*) \in \square^+ \times D) \Rightarrow$ задачата без импулси (1.4), (1.6) притежава единствено решение в интервала $[t_0^*, \infty)$.

H1.6. Функциите $I_i \in C[D, \square^n]$, $i = 1, 2, \dots$

Основният резултат в параграфа се съдържа в следната теорема:

Теорема 1.2. Нека са изпълнени условията H1.1÷H1.6.

Тогава решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3) зависи непрекъснато от началното условие и импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$

Във втория параграф на глава 1 са въведени следните две дефиниции:

Дефиниция 1.2. Ще казваме, че решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3) е устойчиво по отношение на началната точка (t_0, x_0) и импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$, ако:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0): \\ & (\forall (t_0^*, x_0^*) \in \square^+ \times D, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & \left(\forall t_1^*, t_2^*, \dots \in \square^+, t_0^* < t_1^* < t_2^* < \dots, \left(\sum_{i=0,1,\dots} |t_i^* - t_i| \right) < \delta \right) \\ & \Rightarrow \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, t \in [t_0, \infty) \setminus \bigcup_{i=0,1,\dots} \langle t_i^*, t_i \rangle. \end{aligned}$$

С $X(t; t_0, x_0)$ означаваме решението на задачата без импулси (1.1), (1.3).

Дефиниция 1.3. Ще казваме, че системата (1.1) (без импулси) е гравитираща с константа κ , ако:

$$(\forall t_0 \geq 0) (\forall x_0^*, x_0^* \in D) (\forall t \geq t_0) \Rightarrow \|X(t; t_0, x_0^*) - X(t; t_0, x_0)\| < \kappa \|x_0^* - x_0\|.$$

Въвеждаме допълнително следните условия:

H1.7. Съществуват константи $L_i > 0$ такива, че:

$$H1.7.1. \prod_{i=1,2,\dots} (1 + L_i) < \infty;$$

$$H1.7.2. (\forall x^*, x \in D) \Rightarrow \|I_i(x^*) - I_i(x)\| \leq L_i \|x^* - x\|, i = 1, 2, \dots$$

H1.8. Съществува константа $C_I > 0$ такава, че

$$(\forall x^*, x \in D) \Rightarrow \|(x^* + I_i(x^*)) - (x + I_i(x))\| \leq C_I \|x^* - x\|, i = 1, 2, \dots$$

Основните резултати се съдържат в следните две теореми:

Теорема 1.3. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Условията H1.1-H1.5 и H1.7 са валидни.*
2. *Системата (1.1) е гравитираща с константа 1.*
3. *Константата $C_f \leq 1$.*

Тогава решението на задачата с импулси (1.1), (1.2), (1.3) е устойчиво по отношение на началната точка (t_0, x_0) и импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$

Теорема 1.4. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията H1.1-H1.5 и H1.8.*
2. *Системата (1.1) е гравитираща с константа κ .*
3. *Валидни са неравенствата $C_1 C_f \leq 1$ и $C_1 \kappa \leq 1$.*

Тогава решението на задачата с импулси (1.1), (1.2), (1.3) е устойчиво относно началната точка (t_0, x_0) и импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$

Получените в предходните параграфи резултати са използвани в третия параграф на главата при моделирането на процес на лечение.

Редица болестни състояния се лекуват чрез осъществяване и поддържане на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта (плазмата) на пациента. Това може да се постигне по два основни начина:

- чрез непрекъснато подаване на лекарството;
- чрез прекъснато (импулсно) подаване на лекарството - през определени времеви интервали.

От гледна точка на ефективното лечение непрекъснатото подаване на лекарствата е за предпочитане. За съжаление, този начин на лечение е затруднен при практическото му реализиране. По-точно, в общия случай е невъзможно предписаното лекарство да се подава непрекъснато в продължение на периода на лечение на болния (този период може да е с продължителност от няколко седмици или месеци). Поради тази причина поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта чрез дискретно във времето импулсно подаване на лекарството е по-често срещано. Естествено е да се предполага, че обемът на дискретно подаденото лекарствено средство е ограничен отдолу, т.е. съществува минимално количество от лекарството, което може да се приеме еднократно. При този тип лечение лекуващият лекар може да манипулира с два фармакокинетични параметъра: размер на еднократната доза на лекарството D_i и дължина на дозовия интервал T_{i+1} , $i=1, 2, \dots$ По-точно D_i е дозата при i -тото подаване на лекарството, а T_{i+1} е времето между моментите на i -тото и $(i+1)$ -то подаване на лекарството, $i=1, 2, \dots$ В случаите, когато дозовите интервали са по-кратки от времето, необходимо за пълното елиминиране на лекарството от организма, лекарственото средство започва да се натрупва (кумулира). Тази кумулация е полезна за лечението на пациента, ако се поддържа в интервал, определен от минимална и максимална плазмени граници, наричани още терапевтични граници (терапевтичен прозорец) на концентрацията на лекарството. Фармакокинетичният модел на този тип лечение се състои в избора на подходяща дозова схема на лечението,

гарантираща поддържането на концентрацията на лекарството в рамките на терапевтичния прозорец.

Въвеждаме следните ограничения и означения:

1. Организмът се представя чрез един компартимент с обем V_d , в който лекарственото средство се разпределя. Възможно е концентрацията на лекарството да е различна в различните части на организма. За удобство, по-нататък ще предполагаме, че съотношението между нивата на лекарствената концентрация във всяка част на организма в периода на лечението е постоянно. Това означава, че всяка промяна в плазмената концентрация рефлектира в строго определена съответна количествена промяна в тъканните концентрации;
2. Началният момент на лечението означаваме с t_0 ;
3. Времетраенето от началния момент на лечение t_0 до първия момент t_1 , в който се внася лекарствено средство с обем D_1 , означаваме с T_1 , т.е. изпълнено е $t_1 = t_0 + T_1$;
4. Дозата D_i от лекарственото средство се внася директно в компартимента в момента $t_i = t_{i-1} + T_i = t_0 + \sum_{j=1,2,\dots,i} T_j$, $i=1, 2, \dots$;
5. Елиминирането на лекарството протича със скорост, която е пропорционална на моментното му количество в организма, т.е. разглежда се като процес от първи порядък, характеризиращ се със скоростна константа K . Последната константа е сума от константата на метаболизиране K_m и константата на екстрекция на непромененото лекарство K_e . Валидно е равенството $K = K_m + K_e$;
6. Означаваме с $A(t)$ количеството лекарствено средство в организма в момента $t \geq t_0$. В общия случай, количеството на това вещество, което се намира в цялото тяло на пациента в произволен момент, не може да бъде определено експериментално. В действителност се определя концентрацията на лекарственото средство в някои от биологичните течности (най-често в кръвта). За математическото моделиране на процеса на лечението е удобно да се въведе обемът, в който се разпределя лекарственото средство. Тази величина, наречена обем на разпределение, означаваме с V_d и е дефинирана така, че е изпълнено равенството

$$C(t) = \frac{A(t)}{V_d}, \quad t \geq t_0,$$

където $C(t)$ е концентрацията на лекарството, измерена в кръвта или по-общо в плазмата. Ще отбележим, че обемът на разпределение няма физиологичен смисъл. Можем да считаме, че това е фиктивен обем, в който ако се разпредели равномерно лекарството в количество $A(t)$, то ще е в концентрация $C(t)$, измерена в плазмата. В действителност част от лекарството се свързва с плазмените и тъканните протеини, поради което неговото разпределение не е равномерно. Поради тази

причина, обемът на разпределение е възможно да е различен от обема на телесните течности;

7. В началния момент t_0 ще предполагаме, че лекарствената концентрация е C_0 . В някои случаи се приема, че $C_0 = 0$.

Математическият модел на идеализирания по-горе процес се описва в [63] с помощта на следната начална задача за импулсно диференциално уравнение:

$$(1.7) \quad \frac{dC}{dt} = -KC, \quad t \neq t_i,$$

$$(1.8) \quad C(t_i + 0) = C(t_i) + \frac{D_i}{V_d}, \quad i=1, 2, \dots,$$

$$(1.9) \quad C(t_0) = C_0.$$

Решението на горната задача се получава сравнително тривиално:

$$C(t) = \frac{\exp(-Kt)}{V_d} \sum_{j=0,1,\dots,i} D_j \exp(Kt_j) = C_i \exp(-Kt), \quad t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

където

$$C_i = \frac{1}{V_d} \sum_{j=0,1,\dots,i} D_j \exp(Kt_j) \quad \text{и} \quad D_0 = C_0 V_d.$$

За да приложим към модела (1.7), (1.8), (1.9), получените основни резултати в предходните два параграфа, допълнително ще предполагаме, че дозовите интервали T_i са ограничени отдолу, т.е. съществува положителна константа Δ_t такава, че

$$t_{i+1} - t_i = T_{i+1} \geq \Delta_t, \quad i = 0, 1, \dots$$

Може да се провери, че условията на теорема 1.2 са изпълнени и следователно решението на задачата (1.7), (1.8), (1.9) зависи непрекъснато от началната точка и импулсните моменти. Този факт има следното тълкуване:

Концентрациите на лекарствените средства в тялото на пациента при две различни схеми на лечение са приблизително равни, ако са изпълнени следните условия:

- Схемите на лечение са приложени към един и същи пациент;
- Манипулационният период (периодът, през който се приемат лекарствени средства) е ограничен;
- Концентрациите на лекарствата в началния момент на лечението при двете схеми на лечение се различават несъществено;
- Началните моменти на лечението и при двете схеми приблизително съвпадат;
- Дозировките при всеки дискретен лекарствен прием и при двете схеми на лечение са равни;
- Дозовите интервали (интервалите между два последователни момента на лекарствен прием) са ограничени отдолу;

- Моментите на прием на лекарството в двете схеми на лечение са приблизително едни и същи.

Може да се покаже, че уравнението (1.7) е гравитиращо с константа 1. Означаваме $f(t, C) = f(C) = -KC$. Тогава:

$$\|f(t, C)\| = |-KC| \leq KC_{\max} = C_f.$$

Ако допълнително се установи, че решението $C = C(t)$ е ограничено отгоре от константата $C_{\max} = 1/K$, то непосредствено се вижда, че $C_f \leq 1$ и следователно решението на задачата (1.7), (1.8), (1.9) е устойчиво относно началните данни и импулсните моменти. Тълкуването на този факт е подобно на направеното по-горе с тази разлика, че манипулационният период може да не е ограничен.

Тривиално се проверява, че оценката $C(t) \leq C_{\max} \leq 1/K$ е валидна, ако са изпълнени неравенствата:

$$C_0 \leq 1/K, \quad \exp(-KT_i) + \frac{KD_i}{V_d} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Глава 2. Непрекъсната зависимост и диференцируемост на решенията на диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и импулсните смущения

Основен обект на изследване във втората глава на дисертацията е начална задача за нелинейни системи диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие. В първия параграф на главата са намерени достатъчни условия, при които решенията на разглежданата система са непрекъснато зависими по отношение на импулсните смущения. В следващия параграф е изучен въпросът за диференцируемост на решенията на описаната по-горе задача относно импулсните пертурбации. Изучената непрекъсната зависимост и диференцируемост са специфични за решенията на импулсните системи диференциални уравнения и са въведени за първи път тук. Накрая, получените резултати са приложени върху импулсен логистичен модел от популационната динамика.

Върху непрекъснатата зависимост на решенията на различни класове импулсни диференциални уравнения относно началните условия са посветени множество изследвания. Тук ще отбележим: [22], [28], [46], [87], [113] и [144]. В първия параграф на главата резултатите, които се отнасят за непрекъсната зависимост относно големините на импулсните пертурбации, са нови. Върху диференцируемост на решенията на импулсни диференциални уравнения относно началното условие и параметър са посветени работите [114] и [203]. Изследванията във втория параграф на главата са посветени на диференцируемост относно импулсните смущения и са представени за първи път тук. Импулсният логистичен модел от третия параграф на същата глава е обект на редица научни интереси, списъкът на които (освен споменатите резултати в увода) можем да допълним още

със следните работи: [98], [125], [128], [140], [172], [218] и [238]. Изследванията върху този модел са нови.

По-конкретно, в тази глава се изучава следната начална задача за импулсни диференциални уравнения:

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i,$$

$$(2.2) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i), \mu_i), \quad i=1, 2, \dots,$$

$$(2.3) \quad x(0) = I_0(\mu_0),$$

където: $\mu_0, \mu_1, \dots$ са реални параметри, $\mu_0, \mu_1, \dots \in (m_1, m_2) = M \subset \mathbb{R}^n$; $f: \mathbb{R}^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$; D е област, $D \subset \mathbb{R}^n$; $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$; $I_i: D \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$; $(Id + I_i): D \times M \rightarrow D$ и $I_0: M \rightarrow D$. Тук Id е идентитета в $\mathbb{R}^n \times M$.

При всеки избор на параметрите $\mu_0, \mu_1, \dots \in M$ решението на разглежданата задача ще означаваме с $x(t; \mu_0, \mu_1, \dots)$. Изпълнено е:

- При $0 \leq t \leq t_1$ решението зависи от началното условие, т.е. зависи от параметъра μ_0 . Също така изследваното решение в посочения по-горе интервал не зависи от импулсните функции $I_1, I_2, \dots$, т.е. не зависи от параметрите $\mu_1, \mu_2, \dots$. Имаме

$$x(t; \mu_0, \mu_1, \dots) = x(t; \mu_0).$$

- При $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i=1, 2, \dots$, решението зависи от началното условие, а също така и от импулсните функции $I_1, I_2, \dots, I_i$. Разглежданото решение не зависи от останалите импулсни функции $I_{i+1}, I_{i+2}, \dots$, т.е. можем да запишем

$$x(t; \mu_0, \mu_1, \dots) = x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_i).$$

Въведени са следните дефиниции:

Дефиниция 2.1. Нека при $t_i < t \leq t_{i+1}$ съществува крайната граница

$$\lim_{\mu_0^* \rightarrow \mu_0} x(t; \mu_0^*, \mu_1, \dots, \mu_i) = x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_i), \quad i=1, 2, \dots$$

Тогава ще казваме, че решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) зависи непрекъснато от началната точка $I_0(\mu_0)$.

Дефиниция 2.2. Нека при $t_i < t \leq t_{i+1}$ съществува крайната граница

$$\lim_{\mu_j^* \rightarrow \mu_j} x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_j^*, \mu_{j+1}, \dots, \mu_i) = x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_i), \quad i=j, j+1, \dots$$

Тогава ще казваме, че решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) зависи непрекъснато от импулсната функция I_j .

Целта на разглежданията в настоящия параграф е да се посочат достатъчни условия за непрекъсната зависимост на решението на началната задача (2.1), (2.2), (2.3) по отношение на началната точка $I_0(\mu_0)$ и импулсните функции I_j , $j=1, 2, \dots$

За целта ще използваме следните условия:

H2.1. Функцията $f \in C[\square^+ \times D, \square^n]$.

H2.2. Валидна е границата $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

H2.3. За всяка точка $(t_0, x_0) \in \square^+ \times D$ уравнение (2.1) с начално условие $x(t_0) = x_0$ притежава единствено решение, дефинирано в интервала $[t_0, \infty)$.

H2.4. Съществува константа $L > 0$, такава, че

$$(\forall (t, x^*), (t, x) \in \square^+ \times D) \Rightarrow \|f(t, x^*) - f(t, x)\| \leq L \|x^* - x\|.$$

H2.5. Функцията $I_0 \in C[M, \square^n]$ и функциите $I_i \in C[D \times M, \square^n]$, $i=1, 2, \dots$

Основен резултат в първия параграф на втора глава е следната теорема:

Теорема 2.2. Нека са изпълнени условията H2.1 ÷ H2.5.

Тогава решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) зависи непрекъснато от началната точка $I_0(\mu_0)$ и импулсните функции I_j , $j=1, 2, \dots$

В следващия параграф на главата отново се изучава задачата (2.1), (2.2), (2.3). Валидни са следните дефиниции:

Дефиниция 2.3. Нека при $t_i < t \leq t_{i+1}$ съществува крайната граница

$$\lim_{\mu_0^* \rightarrow \mu_0} \frac{1}{\mu_0^* - \mu_0} (x(t; \mu_0^*, \mu_1, \dots, \mu_i) - x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_i)), \quad i=1, 2, \dots$$

Тогава решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е диференцируемо относно началната точка $I_0(\mu_0)$.

Дефиниция 2.4. Нека при $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i=j, j+1, \dots$, съществува крайната граница

$$\lim_{\mu_j^* \rightarrow \mu_j} \frac{1}{\mu_j^* - \mu_j} (x(t; \mu_0, \dots, \mu_{j-1}, \mu_j^*, \mu_{j+1}, \dots, \mu_i) - x(t; \mu_0, \dots, \mu_{j-1}, \mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_i))$$

Тогава решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е диференцируемо относно импулсната функция I_j .

Основната цел на този параграф е да се намерят достатъчни условия за диференцируемост на решението на началната задача (2.1), (2.2), (2.3) по отношение на началната точка $I_0(\mu_0)$ и импулсните функции I_j , $j = 1, 2, \dots$

По-нататък с $(\square^n \times \square^n)$ означаваме множеството от квадратните матрици от ред n . Ако векторът $x \in \square^n$ и матрицата $A \in \square^n \times \square^n$, то съответно с $\|x\|$ и $\|A\|$ ще означаваме произволни съгласувани норми на този вектор и матрица

Въвеждаме следните условия:

H2.6. Матричната функция $\frac{\partial f}{\partial x} \in C[\square^+ \times D, (\square^n \times \square^n)]$.

H2.7. Съществува константа $F > 0$, такава че за всяко $(t, x) \in \square^+ \times D$ е изпълнено неравенството

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \right\| \leq F.$$

H2.8. Изпълнено е:

H2.8.1. Началната функция $I_0 \in C^1[M, \square^n]$;

H2.8.2. Векторната функция $\frac{\partial I_i}{\partial \mu} \in C[D \times M, \square^n]$, $i = 1, 2, \dots$;

H2.8.3. Матричната функция $\frac{\partial I_i}{\partial x} \in C[D \times M, (\square^n \times \square^n)]$, $i = 1, 2, \dots$

Доказана е следната теорема:

Теорема 2.3. Нека са изпълнени условията H2.1 ÷ H2.8.

Тогава:

1. Решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е непрекъснато диференцируемо относно началната точка $I_0(\mu_0)$ (т.е. по параметъра μ_0), а също така решението е непрекъснато диференцируемо относно импулсните функции I_j (т.е. по параметъра μ_j), $j = 1, 2, \dots$

2. При $t_0 < t \leq t_1$ производната $\frac{\partial}{\partial \mu_0} x(t; \mu_0)$ удовлетворява началната задача

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_0} x(t; \mu_0) \right) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x(t; \mu_0)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mu_0} x(t; \mu_0) \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_0} x(t_0; \mu_0) = \frac{\partial}{\partial \mu} I_0(\mu_0).$$

3. При $t_j < t \leq t_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$, производната $\frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j)$ удовлетворява началната задача

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} f(t, x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j) \right), \\ \frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t_j; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j) &= \frac{\partial}{\partial \mu} I_j(x(t_j; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{j-1}), \mu_j). \end{aligned}$$

4. При $t_j < t_i < t \leq t_{i+1}$, $j = 0, 1, \dots$, производната $\frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t; \mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_i)$ удовлетворява началната задача

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t; \mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_i) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} f(t, x(t; \mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_i)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t; \mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_i) \right), \\ \frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t_i; \mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_i) &= \frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t_{i+1}; \mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_{i-1}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} I_i(x(t_{i+1}; \mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_{i-1}), \mu_i) \frac{\partial}{\partial \mu_j} x(t_i; \mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_{i-1}). \end{aligned}$$

Като илюстриращ пример в последния параграф на глава 2 се разглежда динамичното развитие на изолирана популация, подложена на външно импулсно въздействие. Обикновено това въздействие се изразява в отнемането или (по-рядко) в прибавянето на определени количества биомаса от изследваната популация. Естествено е да се предполага, че количеството биомаса, което се отнема или прибавя при всяко отделно външно въздействие, е ограничено отдолу. Освен това диапазона, в който популацията се възстановява, т.е. времетраенето между два съседни импулсни моменти е също ограничено отдолу. Адекватен математически модел на такива процеси е импулсното логистично уравнение. Съответната начална задача има вида:

$$(2.4) \quad \frac{dN}{dt} = \frac{r}{K} N(K - N), \quad t \neq t_i,$$

$$(2.5) \quad N(t_i + 0) = N(t_i) - p_i(N(t_i) + \mu_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(2.6) \quad N(0) = \mu_0,$$

където:

- $N = N(t)$ е количеството биомаса в момента $t \geq 0$;
- $t_1, t_2, \dots$ са моментите, в които се осъществяват импулсните въздействия, $0 < t_1 < t_2 < \dots$;

- $K = K(t) > 0$ е капацитетът на обкръжаващата среда (нивото на насищане);
- $r = r(t) > 0$ е репродуктивният потенциал на популацията;
- $\mu_0, \mu_1, \dots \in \mathbb{R}, 0 < \mu_0 < K$;
- $p_1, p_2, \dots \in \mathbb{R}, 0 < p_i < 1, i = 1, 2, \dots$;
- N_0 е количеството на биомасата в началния момент $t = 0, 0 < N_0 < K$.

При някои допълнителни естествени огръсничения се установява, че получените в предходния параграф основни резултати са валидни за импулсния логистичен модел.

Съответното тълкуване на резултатите е както следва. Да разгледаме две еднотипни изолирани популации (видове), които се подчиняват на един и същи логистичен закон на развитие. Нека допустимите разлики в динамиката на развитие на тези популации са в началното количество на биомасите им и (или) в големините на импулсните отнемания или добавяния на биомаси към тях. Ще припомним, че тези външни импулсни интервенции се осъществяват в едни и същи моменти. Нека за удобство едната популация се нарича регулярна, а другата смутена. Тогава са в сила следните твърдения:

1. Количествата на биомасите в регулярната и смутената популации няма да се различават съществено за ограничен период от време при наличие на „малки“ разлики в изходните количества на биомасите в двата „експеримента“. Също така разликите в биомасите на тези две популации са „контролируемо малки“ и при допускане на „малки“ разлики в големините на импулсните отнемания (или добавяния) на биомаси.
2. Количеството на биомасата в регулярния логистичен импулсен вид, подчинил развитието си на посочения по-горе модел, зависи гладко от началното количество на биомасата и големините на импулсните отнемания (добавяния).

Глава 3. Непрекъсната зависимост на решенията на диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулси относно началното условие и бариерните криви

Основен обект на изследване в тази глава са нелинейни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсно въздействие. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива среща някоя от така наречените „бариерни криви“. В първия параграф на главата за споменатия тип уравнения са намерени достатъчни условия, при които решението е непрекъснато зависимо по отношение на пертурбации, свързани с началното условие и бариерните криви. Споменатите по-горе понятия: бариерни криви и непрекъсната зависимост на решенията по отношение на тях се въвеждат за първи път тук. В следващия параграф получените резултати са приложени към математически модел от популационната динамика, по-точно към импулсния модел на Gompertz.

В последните години импулсните диференциални уравнения с променливи моменти на импулсно въздействие предизвикват сериозен научен интерес във връзка с тяхните многобройни приложения. Тук ще посочим следните резултати: [96], [100], [103], [112], [119], [120], [128] и [224]. На импулсния модел на Gompertz от популационната динамика са посветени множество изследвания, най-новите от

които са: [99], [151], [107] и [223]. Получените резултати в първия и втория параграф на тази глава са нови.

По-конкретно в настоящата глава се изучава следната начална задача за нелинейни импулсни диференциални уравнения от първи ред:

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad \chi_1(t) < x(t) < \chi_2(t),$$

$$(3.2) \quad x(t+0) = x(t) + I_1(t, x(t)), \quad x(t) = \chi_1(t),$$

$$(3.3) \quad x(t+0) = x(t) + I_2(t, x(t)), \quad x(t) = \chi_2(t),$$

$$(3.4) \quad x(t_0) = x_0,$$

където: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; $D = \{(t, x); t \geq 0, X_1(t) < x < X_2(t)\}$; $\chi_1, \chi_2, X_1, X_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $X_1(t) < \chi_1(t) < \chi_2(t) < X_2(t), t \geq 0$; $I_1: D \rightarrow \mathbb{R}^+$; $I_2: D \rightarrow \mathbb{R}^-$; $(\chi_1(t) + I_1(t, \chi_1(t))) < \chi_2(t)$ и $(\chi_2(t) + I_2(t, \chi_2(t))) > \chi_1(t)$ при $t \geq 0$; $t_0 \geq 0$ и $\chi_1(t_0) < x_0 < \chi_2(t_0)$.

Разглеждаме следните криви:

$$\gamma_1 = \{(t, x); x = \chi_1(t), t \geq 0\} \text{ и } \gamma_2 = \{(t, x); x = \chi_2(t), t \geq 0\},$$

които по-нататък ще наричаме бариерни криви, а съответните функции χ_1 и χ_2 ще наричаме бариерни функции. Естествено е да предполагаваме, че бариерните функции са непрекъснати в дефиниционната си област. Ще отбележим, че е възможно при $t \geq 0$ интегралната крива на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) да срещне някоя от кривите γ_1 или γ_2 . Нека тези срещи се реализират последователно в моментите $t_1, t_2, \dots$, за които са валидни неравенствата $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 \dots$. Тези моменти се наричат импулсни моменти. Решението на разглежданата задача е по части непрекъснатата функция. Имаме:

1. При $t_0 \leq t \leq t_1$ решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) е идентично с решението на задачата (без импулси) (3.1), (3.4);

2. Ако $x(t_i) = \chi_1(t_i)$, то при $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i=1, 2, \dots$, решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) съвпада с решението на уравнение (3.1) с начално условие

$$(3.5) \quad x(t_i + 0) = (Id + I_1)(t_i, x(t_i)),$$

където Id е идентитетът в D ;

3. Ако $x(t_i) = \chi_2(t_i)$, то при $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i=1, 2, \dots$, решението на изучаваната задача е идентично с решението на уравнение (3.1) с начално условие

$$(3.6) \quad x(t_i + 0) = (Id + I_2)(t_i, x(t_i)).$$

Равенствата (3.5) и (3.6) ще наричаме импулсни смущения (пертурбации). Решението на изучаваната задача ще означаваме с $x(t; t_0, x_0)$. Ще предпологаме, че са валидни следните неравенства:

$$\chi_1(t) \leq x(t; t_0, x_0) \leq \chi_2(t), t \geq t_0.$$

Заедно с изходната задача разглеждаме и съответната смутена начална задача:

$$(3.7) \quad \frac{dx^*}{dt} = f(t, x^*), \quad \chi_1^*(t) < x^*(t) < \chi_2^*(t),$$

$$(3.8) \quad x^*(t+0) = x^*(t) + I_1(t, x^*(t)), \quad x^*(t) = \chi_1^*(t),$$

$$(3.9) \quad x^*(t+0) = x^*(t) + I_2(t, x^*(t)), \quad x^*(t) = \chi_2^*(t),$$

$$(3.10) \quad x^*(t_0^*) = x_0^*,$$

където: $\chi_1^*, \chi_2^* : [0, \infty) \rightarrow \square$; $X_1(t) < \chi_1^*(t) < \chi_2^*(t) < X_2(t), t \geq 0$, $(\chi_1^*(t) + I_1(t, \chi_1^*(t))) < \chi_2^*(t), t \geq 0$; $(\chi_2^*(t) + I_2(t, \chi_2^*(t))) > \chi_1^*(t), t \geq 0$; $t_0^* \geq 0$ и $\chi_1^*(t_0^*) < x_0^* < \chi_2^*(t_0^*)$.

Нека моментите, в които интегралната крива на пертурбираната задача (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) среща последователно някоя от бариерните криви:

$$\gamma_1^* = \{(t, x); x = \chi_1^*(t), t \geq 0\} \text{ или } \gamma_2^* = \{(t, x); x = \chi_2^*(t), t \geq 0\},$$

са $t_1^*, t_2^*, \dots$. Валидни са неравенствата $0 \leq t_0^* < t_1^* < t_2^* < \dots$. Ясно е, че пертурбациите в смутената задача са свързани както с началната точка, така и с бариерните функции. Решението на задачата (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) ще означаваме с $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$. Въвеждаме означението $B_\eta(t^*) = (t^* - \eta, t^* + \eta)$.

Дадена е следната дефиниция.

Дефиниция 3.1. Ще казваме, че решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) зависи непрекъснато от началната точка (t_0, x_0) и бариерните функции χ_1 и χ_2 , ако:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\forall \eta > 0)(\forall T > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T) > 0): \\ & (\forall t_0^* \in \square^+, |t_0^* - t_0| < \delta)(\forall x_0^* \in \square, |x_0^* - x_0| < \delta) \\ & (\forall \chi_1^*, \chi_2^* \in C^1[[0, T], \square], |\chi_1^*(t) - \chi_1(t)| < \delta, |\chi_2^*(t) - \chi_2(t)| < \delta \text{ при } t \in [0, T]) \\ & \Rightarrow \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, t \in [t_0, T] \setminus \bigcup_{i=0,1,\dots} B_\eta(t_i). \end{aligned}$$

Въведени са условията:

НЗ.1. Функцията $f \in C[D, \square]$ и съществува положителна константа C_f такава, че за всяка точка $(t, x) \in D$ е изпълнено неравенството

$$|f(t, x)| \leq C_f.$$

НЗ.2. Функциите $\chi_1, \chi_2, X_1, X_2 \in C[\square^+, \square]$ и за всяко $t \geq 0$ са валидни неравенствата

$$X_1(t) < \chi_1(t) < \chi_2(t) < X_2(t).$$

НЗ.3. Съществуват положителни константи Δ_χ, L_{χ_1} и L_{χ_2} такива, че:

НЗ.3.1. За всяко $t \geq 0$ е изпълнено неравенството

$$\chi_2(t) - \chi_1(t) \geq \Delta_\chi;$$

НЗ.3.2. За всеки две точки $t', t'' \in \square^+$ е валидно неравенството

$$|\chi_1(t'') - \chi_1(t')| \leq L_{\chi_1} |t'' - t'|;$$

НЗ.3.3. За всеки две точки $t', t'' \in \square^+$ е изпълнено неравенството

$$|\chi_2(t'') - \chi_2(t')| \leq L_{\chi_2} |t'' - t'|.$$

НЗ.4. Функциите $I_1: \gamma_1 \rightarrow \square^+, I_2: \gamma_2 \rightarrow \square^-$ и съществуват положителни константи I_* и I^* , $0 < I_* < I^* < 1$, такива, че за всяко $t \in \square^+$ имаме:

$$I_* \leq \frac{I_1(t, \chi_1(t))}{\chi_2(t) - \chi_1(t)} \leq I^*, \quad I_* \leq \frac{I_2(t, \chi_2(t))}{\chi_1(t) - \chi_2(t)} \leq I^*.$$

НЗ.5. За всяка точка $(t', x') \in D$ уравнението (3.1) с начално условие $x(t') = x'$ притежава единствено решение, дефинирано при $t \geq 0$.

НЗ.6. Функциите $\chi_1, \chi_2 \in C^1[\square^+, \square]$.

НЗ.7. Изпълнени са следните неравенства:

$$f(t, \chi_1(t)) < \frac{d}{dt} \chi_1(t), \quad f(t, \chi_2(t)) > \frac{d}{dt} \chi_2(t), \quad t \geq 0.$$

НЗ.8. Функциите $I_1 \in C[D, \square^+]$ и $I_2 \in C[D, \square^-]$.

Валидна е основната теорема:

Теорема 3.3. Нека е изпълнено:

1. Валидни са условията НЗ.1÷ НЗ.8.
2. Изпълнени са неравенствата $\chi_1(t_0) < x_0 < \chi_2(t_0)$.

Тогава решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) зависи непрекъснато относно началната точка (t_0, x_0) и бариерните функции χ_1 и χ_2 .

Приложения на горната теорема са дадени във втория параграф на глава 3.

Редица изолирани популации се развиват оптимално (в определен смисъл: например, тяхният растеж е сравнително по-интензивен), ако количеството на биомасата им се поддържа в определени граници. Обикновено тези количествени ограничения са в тясна зависимост от хранителните запаси, жизнената среда, вътрешновидовата конкуренция и др. За да се поддържа биомасата на популацията в тези оптимални граници е възможно да се осъществяват външни, дискретни въздействия, които се състоят в отнемане или прибавяне на биомаса към нея. Една от възможностите е времетраенето на тези външни въздействия да е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процеса на развитието на разглеждания изолиран вид. При този вариант на поддържане на оптималните граници на биомасата на популацията, въздействията се извършват мигновено под формата на импулси. Естествено е да се предполага, че импулсните въздействия, състоящи се в прибавяне или отнемане на определени количества биомаса, се осъществяват при достигане на количеството на биомасата до предварително фиксирани граници, ограничаващи оптималните количества на биомасата. Може да се приеме, че в общия случай тези гранични количества не са фиксирани, а зависят от времето.

Адекватен математически модел на такива процеси е импулсното уравнение на Gompertz. Съответната начална задача има вида:

$$(3.11) \quad \frac{dN}{dt} = N(r - \gamma \ln N), \quad \chi_1 < N(t) < \chi_2,$$

$$(3.12) \quad N(t+0) = N(t) + I_1(t, N(t)), \quad N(t) = \chi_1,$$

$$(3.13) \quad N(t+0) = N(t) + I_2(t, N(t)), \quad N(t) = \chi_2,$$

$$(3.14) \quad N(0) = N_0,$$

където:

- $N = N(t)$ е количеството биомаса в момента $t \geq 0$;
- $r = \text{const} > 0$ е репродуктивният потенциал на популацията;
- $\gamma = \text{const} > 0$ е специфичен за вида коефициент на вътрешновидовата конкуренция (коефициент на вътрешновидово равновесие);
- $\chi_1(t) = \chi_1 = \text{const} > 0$ и $\chi_2(t) = \chi_2 = \text{const} > 0$ са съответно долна и горна бариерни функции (константи), определящи оптималните гранични стойности на количеството на биомасата. С други думи, биомасата $N = N(t)$ на изолирания вид, чиято динамика на развитие се описва с импулсната задача (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), е оптимална, ако са валидни ограниченията

$$\chi_1 \leq N(t) \leq \chi_2, \quad t \geq 0;$$

- Ще предпологаме, че са изпълнени неравенствата

$$0 < \chi_1 < \chi_2 < \exp\left(\frac{r}{\gamma}\right).$$

Ще обърнем внимание на факта, че константите $X_1 = 0$ и $X_2 = \exp\left(\frac{r}{\gamma}\right)$ са нули на дясната страна на уравнението (3.11) и следователно те са особени решения. Ясно е че тези решения са недостижими, ако началната точка е между тях;

- $I_1 = I_1(t, N) = \text{const} > 0$ е големината на импулсното добавяне на биомаса при достигане на долната бариерна стойност. Предпологаме, че е изпълнено $0 < I_1 < \chi_2 - \chi_1$;

- $I_2 = I_2(t, N) = \text{const} < 0$ е големината на импулсното отнемане на биомаса при достигане на горна бариерна стойност. Имаме $\chi_1 - \chi_2 < I_2 < 0$;

- N_0 е количеството на биомасата в началния момент $t = 0$. Валидни са неравенствата $\chi_1 < N_0 < \chi_2$.

В горния модел се извършват дискретни въздействия в моментите, в които биомасата на разглежданата изолирана популация се изравни с някое от бариерните количества. Ако в момента t_i е изпълнено $N(t_i) = \chi_1$, то големината на импулсното въздействие съвпада с $I_1(t_i, N(t_i)) = I_1 > 0$ и в този момент имаме дискретно добавяне на биомаса. Ако в момента t_i е изпълнено $N(t_i) = \chi_2$, то големината на импулсното въздействие съвпада с $I_2(t_i, N(t_i)) = I_2 < 0$ и в този момент имаме дискретно отнемане на биомаса, $i = 1, 2, \dots$. Целта на тези дискретни интервенции е да се поддържа биомасата в оптимални граници, т.е. за всяко $t \geq 0$ да е изпълнено $\chi_1 \leq N(t) \leq \chi_2$.

Тъй като стойностите на фазовата променлива $N = N(t)$ са между бариерните функции (в случая между бариерните константи), то дясната страна на уравнението (3.11) е положителна. Тогава количеството на биомасата в модела на Gompertz нараства между два съседни импулсни моменти. Следователно, единствено горната бариерна константа е достижима, т.е. в разглеждания модел се извършват само дискретни отнемания в моментите, в които количеството на биомасата на изучаваната изолирана популация се изравни с горното бариерно количество χ_2 .

В резултат на направени допълнителни естествени допускания се установява, че условията НЗ.1 ÷ НЗ.8 са удовлетворени от изучавания импулсен модел на Gompertz (3.11), (3.12), (3.13), (3.14). Следователно резултатите, получени в предходния параграф на настоящата глава, са валидни за него. Това означава, че:

1. Изолираният биологичен вид, развитието на който е подчинено на импулсния модел на Gompertz, съгласно теорема 3.1, продължава своето съществуване неограничено дълго време;
2. Лесно се съобразява, че горната бариерна константа се достига от решението на импулсния модел на Gompertz безбройно много пъти. Ако моментите на тези срещи са $t_1, t_2, \dots$, то съгласно теорема 3.1 е изпълнено $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.
3. Ако променим незначително както количеството на биомасата N_0 в началния момент $t_0 = 0$, така също и стойностите на долната и горна бариерни константи, то новополученият импулсен модел ще наричаме смутен. Съгласно теорема 3.3 количествата на биомасите в регулярния модел и в смутения модел, пресметнати за един и същи момент, няма да се различават съществено, ако периодът от време, в който се извършват замерванията, е ограничен. Такава „близост“ между количествата на биомасите на двете популации няма за сравнително „малки“ интервали от време, разположени между съответните за двата модела моменти на импулсни въздействия.

Глава 4. Орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост на решенията на автономни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулси относно началното условие и импулсните смущения

Основен обект на изследване в тази глава са импулсни нелинейни автономни системи диференциални уравнения. Импулсните моменти са нефиксирани. По-точно, импулсите се осъществяват, когато траекторията на разглежданата начална задача пресича така нареченото „импулсно множество“, разположено във фазовото пространство на системата. Тук ще предполагаме, че импулсното множество е гладка повърхнина. В първия параграф на главата за този тип задачи е въведено понятието орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост по отношение на началната точка и импулсните смущения. Намерени са достатъчни условия, при които решенията притежават това свойство. Във втория параграф на главата, получените теоретични резултати, са приложени за импулсен математически модел на Лотка-Волтера, описващ еволюционната динамика на съобщество от тип хищник-жертва, което е подложено на кратковременни външни въздействия.

Първите работи, посветени на импулсни уравнения с използване на Хаусдорфова метрика, са на В. Ahmad и S. Sivasundaram [41] и [39]. На споменатия по-горе импулсен модел на Лотка-Волтера са посветени редица изследвания, от които тук ще посочим следните: [45], [102], [109], [121], [123], [138], [142], [149], [153], [167], [168], [170], [171], [173], [176], [177], [178], [199], [201], [225], [235] и [241]. Изследванията в главата са нови.

В първия параграф на главата се изследва следната начална задача:

$$(4.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad \varphi(x(t)) \neq 0,$$

$$(4.2) \quad x(t+0) = x(t) + I(x(t)), \quad \varphi(x(t)) = 0,$$

$$(4.3) \quad x(0) = x_0,$$

където: $f:D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\varphi:D \rightarrow \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; D е област от $\mathbb{R}^n$; $x_0 \in D$. Множеството от точки $x \in D$, които удовлетворяват равенството $\varphi(x) = 0$, се нарича импулсно множество (в случая това е импулсна повърхнина, разположена в D). Това множество ще бележим с Φ , т.е. $\Phi = \{x \in D; \varphi(x) = 0\}$. Функцията $I:\Phi \rightarrow \mathbb{R}^n$ се нарича импулсна функция. Ще предполагаме, че е изпълнено $(Id + I):\Phi \rightarrow D$, където Id е идентитета в $\mathbb{R}^n$. Моментите, в които траекторията на горната задача последователно среща импулсната повърхнина, означаваме с $t_1, t_2, \dots$, $0 < t_1 < t_2 < \dots$

Решението $x(t; x_0)$ на разглежданата задача е по части непрекъсната функция. Заедно със задачата (4.1), (4.2), (4.3) разглеждаме и съответната ѝ смутена задача

$$(4.4) \quad \frac{dx^*}{dt} = f(x^*), \quad \varphi(x^*(t)) \neq 0,$$

$$(4.5) \quad x^*(t+0) = x^*(t) + I(x^*(t)), \quad \varphi(x^*(t)) = 0,$$

$$(4.6) \quad x^*(0) = x_0^*,$$

където $I^*:\Phi \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $(Id + I^*):\Phi \rightarrow D$, $x_0^* \in D$. Както се вижда, разликата между задачите (4.1), (4.2), (4.3) и (4.4), (4.5), (4.6) е в началната точка и импулсната функция. Решението на смутената задача (4.4), (4.5), (4.6) ще означаваме с $x^*(t; x_0^*)$, а моментите, в които траекторията на тази задача среща импулсната повърхнина Φ , ще означаваме с $t_1^*, t_2^*, \dots$, $0 < t_1^* < t_2^* < \dots$. С $X(t; x_0)$ и $X^*(t; x_0^*)$ ще бележим съответно решенията на задачите без импулси (4.1), (4.3) и (4.4), (4.6). За траекториите на задачите (4.1), (4.2), (4.3) и (4.4), (4.5), (4.6) въвеждаме съответно означенията:

$$\gamma(x_0; [0, T]) = \{x(t; x_0), 0 \leq t \leq T\}, \quad \gamma^*(x_0^*; [0, T]) = \{x^*(t; x_0^*), 0 \leq t \leq T\},$$

където T е положителна константа.

Ако точките $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, то тяхното скалярно произведение, Евклидова норма и Евклидово разстояние между тях ще бележим съответно с:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \quad \|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}, \\ \rho_E(a, b) &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \end{aligned}$$

Ясно е, че е валидно равенството $\|a-b\| = \rho_E(a,b)$. Ако непразните множества $A, B \subset \square^n$, то Евклидовото и Хаусдорфовото разстояние между тях означаваме съответно с:

$$\rho_E(A, B) = \inf \left\{ \inf \{ \rho_E(a, b), b \in B \}, a \in A \right\},$$

$$\rho_H(A, B) = \max \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \rho_E(a, b), b \in B \}, a \in A \right\}, \sup \left\{ \inf \{ \rho_E(a, b), a \in A \}, b \in B \right\} \right\}.$$

Неравенството $\rho_E(A, B) \leq \rho_H(A, B)$ е очевидно. Затворената обвивка и контурът на множеството A означаваме съответно с $\bar{A}$ и ∂A . Имаме:

$$\begin{aligned} \rho_E(\gamma(x_0; [0, T]), \gamma^*(x_0^*; [0, T])) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \rho_E(x^*(t^*; x_0^*), x(t; x_0)), 0 \leq t \leq T \right\}, 0 \leq t^* \leq T \right\}; \\ \rho_H(\gamma(x_0; [0, T]), \gamma^*(x_0^*; [0, T])) &= \max \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \rho_E(x^*(t^*; x_0^*), x(t; x_0)), 0 \leq t \leq T \right\}, 0 \leq t^* \leq T \right\}, \right. \\ &\quad \left. \sup \left\{ \inf \left\{ \rho_E(x^*(t^*; x_0^*), x(t; x_0)), 0 \leq t^* \leq T \right\}, 0 \leq t \leq T \right\} \right\}; \end{aligned}$$

Дефиниция 4.1. Ще казваме, че решението на задачата (4.1), (4.2), (4.3) зависи орбитално Хаусдорфова непрекъснато относно началната точка x_0 и импулсната функция I , ако:

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0) (\forall T > 0) (\forall x_0 \in D) (\forall I : \Phi \rightarrow \square^n) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, T, x_0, I) > 0): \\ &(\forall x_0^* \in D, \rho_E(x_0^*, x_0) < \delta) (\forall I^* : \Phi \rightarrow \square^n, \rho_E(I^*(x), I(x)) < \delta \text{ при } x \in \Phi) \\ &\Rightarrow \rho_H(\gamma^*(x_0^*; [0, T]), \gamma(x_0; [0, T])) < \varepsilon. \end{aligned}$$

В този параграф са намерени достатъчни условия за орбитална непрекъсната Хаусдорфова зависимост относно началната точка и импулсната функция на решението на задачата (4.1), (4.2), (4.3).

По-нататък ще използваме следните условия:

Н4.1. Функцията $f \in C[D, \square^n]$.

Н4.2. Ако импулсните моменти са безбройно много, то $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Н4.3. За всяка точка $x_0 \in D$ задачата без импулси (4.1), (4.3) притежава единствено решение, дефинирано при $t \geq 0$.

Н4.4. За импулсното множество $\Phi = \{x \in D; \varphi(x) = 0\}$ е валидно включването

$$\bar{\Phi} \setminus \Phi \subset \bar{D} \setminus D.$$

Н4.5. Функцията $\varphi \in C^1[D, \square]$ и за всяка точка $x \in \Phi$ е изпълнено

$$\left| \langle \operatorname{grad} \varphi(x), f(x) \rangle \right| > 0.$$

Н4.6. Съществува положителна константа C_f такава, че за всяка точка $x \in D$ е валидно неравенството

$$\|f(x)\| \leq C_f.$$

Н4.7. Функцията $I \in C[\Phi, \square^n]$.

Н4.8. Изпълнено е неравенството

$$\rho_E(\Phi, (Id + I)(\Phi)) > 0.$$

При горните условия е валидна теоремата:

Теорема 4.2. Нека са изпълнени условията Н4.1 ÷ Н4.8.

Тогава решението на задачата (4.1), (4.2), (4.3) зависи орбитално Хаусдорфово непрекъснато относно началната точка x_0 и импулсната функция I .

Математическият модел на Лотка-Волтера сравнително адекватно описва динамиката на развитието на изолирано съобщество от тип жертва-хищник, при условие, че няма външни въздействия. В последния параграф на четвъртата глава се изучава съобщество от тип жертва-хищник, което е подложено на външни въздействия (обикновено дължащи се на намесата на човека). Тези въздействия се изразяват в отнемането или добавянето на определени количества биомаса както от жертвата, така и от хищника. Естествено е да се изискват следните ограничения на външните въздействия:

- Времетраенето на всяко от въздействията е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процеса, поради което може да се приеме, че въздействията са „мигновени“ под формата на импулси;
- Въздействията се осъществяват в моментите, в които биомасите на жертвата и хищника достигнат определени количествени характеристики. Математически описано, импулсните отнемания или добавяния на биомаса се осъществяват при срещата на траекторията на системата с предварително фиксирано множество, наречено „импулсно множество“, което е разположено във фазовото пространство на системата. Обикновено, импулсното множество е гладка крива от пространството на допустимите състояния на системата;
- „Големините“ на импулсните въздействия са ограничени отдолу, тъй като практически е невъзможно да се добавя или отнема биомаса под определен минимум;
- „Големините“ на импулсните въздействия са ограничени отгоре, тъй като:

- Ако въздействието е от типа отнемане на биомаса (това е най-често срещаният случай, който е обект на изследване и в настоящата глава), то е невъзможно отнетото количество да е повече от наличното в момента на импулсното въздействие;

- Ако въздействието е от типа добавяне на биомаса (това е рядко срещан случай), то от финансова гледна точка не е целесъобразно добавеният обем на биомасата да е над определен „икономически оправдан” максимум;

- Много често, по обективни причини, е невъзможно жертвата и хищникът да се сепарират отделно. В тези случаи, отнетата биомаса от съобществото е смес от биомасата на жертвата и биомасата на хищника. Нещо повече, отнетите обеми от двата вида са пропорционални на количествата на биомасите им в момента на отнемането. По-точно, ако количествата на биомасите на жертвата и на хищника в момента на импулсните въздействия са съответно m и M , то количествата, които се отнемат са съответно $\Delta \cdot m$ и $\Delta \cdot M$. Функцията $\Delta = \Delta(m, M)$ е дефинирана за всяка точка от импулсното множество и удовлетворява неравенствата: $0 \leq \Delta(m, M) \leq 1$. Често срещан случай е $\Delta = \text{const}$.

- Оказва се, че експлоатацията на съобщества от разглеждания тип е улеснено, ако те притежават периодичен закон на развитие. Следователно е желателно след импулсно въздействие от типа „отнемане” количествата на биомасите на двата вида да са в такива обеми, че те отново да лежат върху същата траектория, която е описана преди импулсния момент.

Обобщеният импулсен модел на Лотка-Волтера със зададено начално условие, отговарящ на горните изисквания, има вида:

$$(4.7) \quad \frac{dm}{dt} = \dot{m} = F_m(m, M) = m(r_1 - q_1 M), \quad M(t) \neq k \cdot m(t);$$

$$(4.8) \quad \frac{dM}{dt} = \dot{M} = F_M(m, M) = -M(r_2 - q_2 m), \quad M(t) \neq k \cdot m(t);$$

$$(4.9) \quad m(t+0) = (1-\Delta)m(t), \quad M(t) = k \cdot m(t);$$

$$(4.10) \quad M(t+0) = (1-\Delta)M(t), \quad M(t) = k \cdot m(t);$$

$$(4.11) \quad m(0) = m_0; \quad M(0) = M_0,$$

където:

- $m = m(t) > 0$ и $M = M(t) > 0$ са съответно количествата на биомасите на жертвата и хищника в момента $t \geq 0$;

- Константите $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ са специфични коефициенти на растежа, които са съответни на първия вид (жертвата) и втория вид (хищника);

- Константите $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ са коефициентите, отразяващи вътрешно-видовата борба, съответни за жертвата и хищника;

- Множеството от точки (m, M) , принадлежащи на допустимите състояния на съобществото $\square^+ \times \square^+$, които удовлетворяват равенството $M = k \cdot m$, се нарича импулсно множество (в случая това множество е лъч с начало, съвпадащо с началото на координатната система, и с ъглов коефициент $k > 0$, който ще бъде уточнен допълнително);

- $\Delta m(t)$ и $\Delta M(t)$ са количествата биомаса, съответно от жертвата и от хищника, които се отнемат под формата на импулси. „Импулсните моменти” съвпадат с моментите, в който отношението на количествата на биомасите на хищника и на жертвата достигне стойност k .

- Константите $m_0 > 0$ и $M_0 > 0$ са количествата на биомасите на двата вида в началния момент $t = 0$.

Известно е, че системата (без импулси) (4.7), (4.8) притежава:

- Устойчива стационарна точка $(m_{00}, M_{00}) = \left(\frac{r_2}{q_2}, \frac{r_1}{q_1} \right)$;

- Първи интеграл от вида

$$\begin{aligned} U(m, M) &= q_1 M + q_2 m - r_1 \ln M - r_2 \ln m + r_1 \left(\ln \frac{r_1}{q_1} - 1 \right) + r_2 \left(\ln \frac{r_2}{q_2} - 1 \right) \\ &= W(m, M) - W(m_{00}, M_{00}), \end{aligned}$$

където

$$W(m, M) = q_1 M + q_2 m - r_1 \ln M - r_2 \ln m;$$

- За всяка точка $(m, M) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $(m, M) \neq (m_{00}, M_{00})$ е валидно неравенството $U(m, M) > 0$. Изпълнено е $U(m_{00}, M_{00}) = 0$;

- За всяка константа $c \geq 0$ неявно зададената крива

$$\gamma_c = \{(m, M) : U(m, M) = c\}$$

е траектория на система (4.7), (4.8) с подходящо избрано начално условие (достатъчно е да се предположи, че $U(m_0, M_0) = c$);

- За всяка константа $c > 0$ множеството

$$D_c = \{(m, M) : U(m, M) < c\}$$

е едносвързана област, разположена в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, която притежава контур $\partial D_c = \gamma_c$;

- За всяка константа $c > 0$ е изпълнено $(m_{00}, M_{00}) \in D_c$;

- Ако $0 < c_1 < c_2$, то $\gamma_{c_1} \in D_{c_2}$.

Ще предполагаме, че:

- Областта D , в която е разположена траекторията на задачата с импулси от популационната динамика, се намира „между” две „гранични” траектории γ_{c_1} и γ_{c_2} , където константите c_1 и c_2 удовлетворяват неравенствата $0 < c_1 < c_2$, т.е. $D = D_{c_2} \setminus D_{c_1}$.

- Траекторията на импулсната задача е част от траекторията γ_{c_0} , където константата c_0 удовлетворява неравенствата $c_1 < c_0 < c_2$.

- Импулсната повърхнина (в случая импулсната отсечка) е част от правата $l: M = km$. Следователно е изпълнено $\varphi(m, M) = M - km$.
- Предполагаме, че траекторията на импулсната задача (4.7) ÷ (4.11) от популационната динамика е периодична. Предположението е наложително, тъй като наличието на цикличност в развитието и периодичност в отнеманията на биомаса от разглежданото съобщество от гледна точка на експлоатацията е удобно. Това предположение ще е изпълнено, ако „изобразяващата точка” (m, M) , която се движи по траекторията на разглежданата задача γ_{c_0} , след импулс попадне отново върху тази траектория. Така достигаме до извода, че импулсният вектор има вида

$$I(m, M) = I(m, km) = -(\Delta_m, k\Delta_m),$$

където m и Δ_m са решения на следната система:

$$U(m, km) = c_0, \quad U(m - \Delta_m, k(m - \Delta_m)) = c_0, \quad \Delta_m > 0.$$

При направените предположения се показва, че обобщеният импулсен модел на Лотка-Волтера удовлетворява условията на теорема 4.2. Следователно периодичното решение на задачата (4.7) ÷ (4.11) зависи орбитално Хаусдорфово непрекъснато от началната точка (m_0, M_0) и импулсната функция I .

Възможно е следното тълкуване на получените резултати. Нека:

- Изходните количества на биомасите на жертвата и хищника в „смутеното” съобщество не се различават съществено съответно от началните количества на биомасите на жертвата и хищника в „оригиналното” съобщество;
- Импулсните отнемания в пертурбираното съобщество и оригиналното съобщество са „приблизително равни”.

Тогава за краен интервал от време (независимо колко голям е той) изменението на биомасите в съобществата в двете биосистеми се развиват „приблизително по един и същи закон” („траектория”).

Глава 5. Орбитална Хаусдорфова устойчивост на решенията на автономни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулси относно началното условие

Основен обект на изследване в последната глава е начална задача за автономни системи диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия. Импулсите се реализират в моментите, в които траекторията на изучаваната задача среща така нареченото „импулсно множество”, разположено във фазовото пространство на системата. При изследванията в главата се предполага, че импулсното множество съвпада с част от хиперравнина. За описаната по-горе задача, тук за първи път са въведени термините орбитална гравитация и орбитална Хаусдорфова устойчивост по отношение на началното условие. В първия параграф на главата са намерени достатъчни условия, при които, ако решението на съответната задача без импулси е орбитално гравитиращо, то решението на основната (изучаваната) задача с импулси е орбитално Хаусдорфово

устойчиво относно началното условие. Във втория параграф на главата е разгледан класическия (без импулси) модел на Лотка-Волтера от популационната динамика. Намерени са достатъчни условия за орбитално гравитиране и за Хаусдорфова устойчивост относно началната точка.

През последните години редица изследвания са посветени на качествената теория на диференциалните уравнения без импулси, при които се използва Хаусдорфова метрика: [136], [138], [184] и [194]. Тук тази метрика се използва при изучаването на импулсни диференциални уравнения.

Разглеждаме следната начална задача:

$$(5.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad \langle a, x(t) \rangle \neq a_0,$$

$$(5.2) \quad x(t+0) = x(t) + I(x(t)), \quad \langle a, x(t) \rangle = a_0,$$

$$(5.3) \quad x(0) = x_0,$$

където: $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$; $a_0 \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; D е област от $\mathbb{R}^n$; $x_0 \in D$. Множеството от точки $x \in D$, които удовлетворяват равенството $\langle a, x \rangle = a_0$, се нарича импулсно множество (в случая това е част от хиперравнина, разположена в D). Това множество означаваме с α , т.е. $\alpha = \{x \in D; \langle a, x \rangle = a_0\}$. Функцията $I: \alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ се нарича импулсна функция. Ще предполагаме, че е изпълнено $(Id + I): \alpha \rightarrow D$, където, както и в предходните глави, Id е идентитетът в $\mathbb{R}^n$. Моментите, в които траекторията на горната задача последователно среща импулсното множество, означаваме с $t_1, t_2, \dots$, $0 < t_1 < t_2 < \dots$. Решението $x(t; x_0)$ на разглежданата задача е по части непрекъсната функция.

Заедно със задачата (5.1), (5.2), (5.3) разглеждаме и съответната и смутена начална задача (5.1), (5.2) с начално условие

$$(5.4) \quad x(0) = x_0^*, \quad x_0^* \in D.$$

Решението на смутената задача (5.1), (5.2), (5.4) ще означаваме с $x(t; x_0^*)$, а моментите, в които траекторията на тази задача среща импулсната хиперравнина α , ще означаваме с $t_1^*, t_2^*, \dots$, $0 < t_1^* < t_2^* < \dots$. Траекториите на задачите (5.1), (5.2), (5.3) и (5.1), (5.2), (5.4) ще бележим съответно както следва:

$$\gamma(x_0; [0, \infty)) = \{x(t; x_0), 0 \leq t < \infty\}, \quad \gamma(x_0^*; [0, \infty)) = \{x(t; x_0^*), 0 \leq t < \infty\}.$$

Решенията и траекториите на задачите без импулси (5.1), (5.3) и (5.1), (5.4) означаваме съответно с:

$$X(t; x_0), \quad \Gamma(x_0; [0, \infty)), \quad X(t; x_0^*) \quad \text{и} \quad \Gamma(x_0^*; [0, \infty)).$$

Дефиниция 5.1. Ще казваме, че системата (5.1) е орбитално гравитираща в областта D с константа $\kappa \geq 1$, ако:

$$\begin{aligned}
(\forall x_0^*, x_0 \in D) \Rightarrow \rho_H(\Gamma(x_0^*; [0, \infty)), \Gamma(x_0; [0, \infty))) &\leq \kappa \cdot \rho_E(\Gamma(x_0^*; [0, \infty)), \Gamma(x_0; [0, \infty))) \\
&\Leftrightarrow \max \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \rho_E(X(t^*; x_0^*), X(t; x_0)), t \geq 0 \right\}, t^* \geq 0 \right\}, \right. \\
&\quad \left. \sup \left\{ \inf \left\{ \rho_E(X(t^*; x_0^*), X(t; x_0)), t^* \geq 0 \right\}, t \geq 0 \right\} \right\} \\
&\leq \kappa \cdot \inf \left\{ \inf \left\{ \rho_E(X(t^*; x_0^*), X(t; x_0)), t \geq 0 \right\}, t^* \geq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Дефиниция 5.2. Ще казваме, че решението на задачата (5.1), (5.2), (5.3) е орбитално устойчиво относно началното условие, ако:

$$\begin{aligned}
&(\forall \varepsilon > 0) (\forall x_0 \in D) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0): \\
&(\forall x_0^* \in D, \rho_E(x_0^*, x_0) < \delta) \Rightarrow \rho_H(\gamma(x_0^*; [0, \infty)), \gamma(x_0; [0, \infty))) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Тук са получени достатъчни условия за орбитална Хаусдорфова устойчивост относно началното условие на решението на задачата (5.1), (5.2), (5.3).

По-нататък ще използваме следните условия:

H5.1. Функцията $f \in C[D, \mathbb{R}^n]$.

H5.2. Съществуват положителни константи C_f и C^f такива, че за всяка точка $x \in D$ са изпълнени неравенствата:

$$C_f \leq \|f(x)\| \leq C^f.$$

H5.3. За всяка точка $x_0 \in D$ задачата без импулси (5.1), (5.3) притежава единствено решение, дефинирано при $t \geq 0$.

H5.4. Множеството $\alpha = \{x \in D; \langle a, x \rangle = a_0\}$, където $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$ и $a_0 \in \mathbb{R}$, е ограничено.

H5.5. Съществува константа C_a , $0 < C_a \leq 1$, такава, че за всяка точка $x \in \alpha$ е изпълнено неравенството

$$\langle a, f(x) \rangle \geq C_a \|f(x)\|.$$

H5.6. Съществува константа C_{Id+I} такава, че е валидно неравенството

$$\rho_E(\alpha, (Id + I)(\alpha)) \geq C_{Id+I} > 0.$$

H5.7. Съществува положителна константа C_I , такава, че за всеки две точки $x', x'' \in \alpha$ е изпълнено неравенството

$$\rho_E(x' + I(x'), x'' + I(x'')) \leq C_I \cdot \rho_E(x', x'').$$

Целта в параграфа се постига с помощта на теоремата:

Теорема 5.2. Нека:

1. Изпълнени са условията H5.1÷H5.7.
2. Системата (5.1) е орбитално гравитираща в областта D с коефициент $\kappa \geq 1$.
3. Валидно е неравенството

$$C_I < \frac{C_a}{\kappa(1+C_a)}.$$

Тогава за всяка начална точка $x_0 \notin \alpha$ решението на задачата (5.1), (5.2), (5.3) е орбитално Хаусдорфово устойчиво относно началното условие.

В последния параграф на последната глава разглеждаме следната начална задача за системата на Лотка-Волтера (без импулси):

$$(5.5) \quad \frac{dm}{dt} = \dot{m} = F_m(m, M) = m(r_1 - q_1 M),$$

$$(5.6) \quad \frac{dM}{dt} = \dot{M} = F_M(m, M) = -M(r_2 - q_2 m),$$

$$(5.7) \quad m(0) = m_0; \quad M(0) = M_0,$$

където параметрите на системата са както в параграф 4.2 на предходната глава.

Евклидовото и Хаусдорфовото разстояние между траекториите γ_{c_0} и $\gamma_{c_0}^*$ удовлетворяват съответно равенствата:

$$\begin{aligned} \rho_E(\gamma_{c_0}^*, \gamma_{c_0}) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \rho_E((m^*, M^*), (m, M)), (m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}^* \right\}, (m, M) \in \gamma_{c_0} \right\}, \\ \rho_H(\gamma_{c_0}^*, \gamma_{c_0}) &= \max \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \rho_E((m^*, M^*), (m, M)), (m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}^* \right\}, (m, M) \in \gamma_{c_0} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \sup \left\{ \inf \left\{ \rho_E((m^*, M^*), (m, M)), (m, M) \in \gamma_{c_0} \right\}, (m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}^* \right\} \right\}. \end{aligned}$$

В следващите две дефиниции ще перефразираме съответно дефинициите за орбитална гравитация и орбитална Хаусдорфова устойчивост на решението на началната задача за системата на Лотка-Волтера.

Дефиниция 5.3. Ще казваме, че системата (5.5), (5.6) е орбитално гравитираща в областта D с константа $\kappa \geq 1$, ако:

$$(\forall c_0^*, c_0 \in \square^+): (\gamma_{c_0}^*, \gamma_{c_0} \in D) \Rightarrow \rho_H(\gamma_{c_0}^*, \gamma_{c_0}) \leq \kappa \cdot \rho_E(\gamma_{c_0}^*, \gamma_{c_0}).$$

Дефиниция 5.4. Ще казваме, че решението на задачата (5.5), (5.6), (5.7) е орбитално Хаусдорфово устойчиво относно началното условие, ако:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall (m_0, M_0) \in \square^+ \times \square^+) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, m_0, M_0) > 0):$$

$$\left(\forall (m_0^*, M_0^*) \in \square^+ \times \square^+, \rho_E((m_0^*, M_0^*), (m_0, M_0)) < \delta \right) \Rightarrow \rho_H(\gamma_{c_0}^*, \gamma_{c_0}) < \varepsilon,$$

където $c_0 = U(m_0, M_0)$ и $c_0^* = U(m_0^*, M_0^*)$.

Основните резултати в параграфа се съдържат в следващите две теореми.

Теорема 5.5. *Нека е изпълнено:*

1. Константите c_1 и c_2 удовлетворяват неравенствата $0 < c_1 < c_2$.
2. Областта $D = D_{c_2} \setminus D_{c_1}$.

Тогава системата (5.5), (5.6) е орбитално Хаусдорфово гравитираща в областта D с константа

$$\kappa = \frac{\sup \{ \| \text{grad} U(m', M') \|, (m', M') \in D \}}{\inf \{ \| \text{grad} U(m', M') \|, (m', M') \in D \}}.$$

Теорема 5.6. *Решението на задачата (5.5), (5.6), (5.7) е орбитално Хаусдорфово устойчиво относно началната точка.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящия дисертационен труд са получени следните по-важни резултати:

1. Въведени са нови понятия и са получени достатъчни условия за:

- 1.1. Орбитална гравитация на решенията на диференциални уравнения без импулси;
- 1.2. Непрекъсната зависимост на решенията на импулсни системи диференциални уравнения (ИСДУ) с фиксирани моменти на импулси относно:
 - началното условие и импулсните моменти,
 - началното условие и импулсните смущения;
- 1.3. Непрекъсната зависимост на решенията на ИСДУ с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и бариерните криви;
- 1.4. Орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост на решенията на ИСДУ с променливи моменти на импулси относно началното условие и импулсните смущения;
- 1.5. Устойчивост на решенията на ИСДУ с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и импулсните моменти;
- 1.6. Орбитална Хаусдорфова устойчивост на решенията на ИСДУ с променливи моменти на импулси относно началното условие;
- 1.7. Диференцируемост на решенията на ИСДУ с фиксирани моменти на импулси относно импулсните моменти.

2. Получените резултати са приложени за изследване на:

- 2.1. Непрекъсната зависимост и устойчивост на решенията на модел от фармакокинетиката с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и импулсните моменти;

2.2. Непрекъсната зависимост и дифференцируемост на решенията на логистичен модел с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и импулсните смущения;

2.3. Непрекъсната зависимост на решенията на модел на Gompertz с променливи моменти на импулси относно началното условие и бариерните криви;

2.4. Орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост на решенията на модел на Лотка-Волтера с променливи моменти на импулси относно началното условие и импулсните смущения;

2.5. Орбитална Хаусдорфова устойчивост на решенията на модел на Лотка-Волтера без импулси относно началното условие.

ПУБЛИКАЦИИ

по дисертационния труд

1. Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments*, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 1, 39-64.
2. Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves*, *Acta Mathematica Scientia*, (2011), (to appear).
3. Dishliev A., Dishlieva K., *Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations*, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 2, 167-187.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Андронов А., Витт А., Хайкин С., *Теория колебаний*, Наука, Москва, (1981).
2. Бабицкий В., Крупенин В., *Колебания в сильно нелинейных системах*, Наука, Москва, (1985).
3. Баутин Н., *Теория точечных преобразований и динамическая теория часов*, Труды ICNO V, АН УССР, Киев, (1963), Том 2, 29-54.
4. Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, И-во Иностранной литературы, Москва, (1954).
5. Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., *Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях*, Научная думка, Москва, (1988).
6. Борисенко С., *Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсными воздействиями*, Укр. мат. журнал, (1983), Том 35, № 2, 144-150.
7. Борисенко С., *Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсными воздействиями*, Дифференц. уравнения, (1986), Том 22, № 5, 884-886.
8. Завалицин С., Сесекин А., Дрозденко С., *Динамические системы с импульсной структурой*, Средне Урал. кн. изд-во, Свердловск, (1983).
9. Завалицин С., Сесекин А., *Импульсные процессы: Модели и приложения*, Наука, Москва, (1991).
10. Калитин Б., *О колебаниях маятника с ударными импульсами*, Дифференц. уравнения, (1969), Том 5, № 7, 1267-1274.
11. Калитин Б., *О колебаниях маятника с ударными импульсами, часть 2*, Дифференц. уравнения, (1970), Том 6, № 12, 2174-2181.
12. Калитин Б., *О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением*, Дифференц. уравнения, (1971), Том 7, № 3, 540-542.
13. Каранджулов Л., Бойчук А., Божко В., *Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной линейной краевой задачи*, Докл. АН Украины, (1994), Том 1, 7-10.
14. Каранджулов Л., Стоянова Я., *Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае*, Весці НАН Беларусі, (2003), Том 2, 59-65.
15. Каранджулов Л., Стоянова Я., *Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае*, Дифференц. уравнения, (2004), Том 40, № 3, 310-323.
16. Кобринский А. Е., *Выброударные системы*, Наука, Москва, (1973).
17. Крылов Н., Боголюбов Н., *Введение в нелинейную механику*, Изд. УССР, Киев, (1937).
18. Матов В., *Определение градиента на оптимизация на динамичен модел, зависящ от параметър*, Математика и математическо образование, И-во на БАН, (1983), 195-201.
19. Мильман В., Мышкис А., *Об устойчивости движения при наличии толчков*, Сиб. мат. журнал, (1960), Том 1, № 2, 233-237.

20. Мильман В., Мышкис А., *Случайные толчки в линейных динамических системах, Приближенные методы решения дифференциальных уравнений*, Киев, Изд-во АН УкрССР, (1963), 64-81.
21. Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., *Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью*, Институт математики НАН Украины, Киев, (2007).
22. Плотников В., Китанов Н., *Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления*, Кибернетика и системный анализ, (2002), Том 5, 71-85.
23. Плотников В., Китанов П., *Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами*, Укр. мат. журнал, (1997), Том 49, № 11, 1504-1511.
24. Плотников В., Плотникова Л., *Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами*, Укр. мат. журнал, (1995), Том 47, № 11, 1526-1532.
25. Попов Е., *Динамика систем автоматического регулирования*, Гостехиздат, Москва, (1964).
26. Руш Н., Абетс П., Лалуа М., *Прямой метод Ляпунова в теорий устойчивости*, Мир, Москва, (1983).
27. Самойленко А., Перестюк Н., *Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействием*, Дифференц. уравнения, (1974), Том 10, № 11, 2001-2010.
28. Самойленко А., Перестюк Н., *Дифференциальные уравнений с импульсными воздействием*, Вища шк., Киев, (1987).
29. Самойленко А., Перестюк Н., *О методе усреднения в системах с импульсными воздействием*, Укр. мат. журнал, (1974), Том 24, № 3, 411-418.
30. Самойленко А., Перестюк Н., Трофимчук С., *Проблема "биений" в импульсных системах*, Институт математики АН УкрССР, Киев, (1990).
31. Самойленко А., *Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром*, Укр. мат. журнал, (1961), Том 13, № 3, 85-94.
32. Симеонов П., *Върху качествена теория на импулсните диференциални уравнения*, Автореферат за присъждане на научна степен „доктор на математическите науки”, София, (1998).
33. Халанай А., Векслер Д., *Качественная теория импульсных систем*, Мир, Москва, (1971).
34. Цыпкин Я., *Критерии абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента*, ДАН СССР, (1964), Том 155, № 5, 1029-1032.
35. Черноусько Ф., Акуленко Л., Соколов Б., *Управление колебаниями*, Наука, Москва, (1980).
36. Agarwal R., Franco D., O'Regan D., *Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations*, Aequationes Mathematicae, (2005), Vol. 69, № 1-2, 83-96.
37. Agarwal R., O'Regan D., *A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem*, Applied Mathematics and Computation, (2003), Vol. 161, № 2, 433-419.
38. Agarwal R., O'Regan D., *Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations*, Applied Mathematics and Computation, (2000), Vol. 114, № 1, 51-59.
39. Ahmad B., Sivasundaram S., *Dynamics and stability of impulsive hybrid setvalued integro-differential equations with delay*, Nonlinear Analysis, (2006), Vol. 65, № 11, 2289-2293.
40. Ahmad B., Sivasundaram S., *Instability criteria for impulsive hybrid state dependent delay integrodifferential systems*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2010), Vol. 11, № 2, 750-758.
41. Ahmad B., Sivasundaram S., *The monotone iterative technique for impulsive hybrid set valued integro-differential equations*, Nonlinear Analysis, (2006), Vol. 65, № 12, 2260-2276.
42. Ahmad S., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E., *Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses*, J. of Math. Analysis and Applications, (2004), Vol. 290, № 2, 436-451.
43. Ahmad S., Stamov G., *Almost periodic solutions of N-dimensional impulsive competitive systems*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.
44. Ahmad S., Stamova I., *Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2008), Vol. 69, № 3, 786-795.
45. Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., *An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2006), Vol. 7, № 5, 1255-1267.
46. Akhmet M., *On the smoothness of solutions of impulsive autonomous system*, Nonlinear Analysis, (2005), Vol. 60, № 2, 311-324.
47. Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., *Control over linear pulse systems*, Ukrainian Math. J., (1995), Vol. 47, № 3, 360-368.
48. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., *I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model*, Computers & Mathematics with Applications, (2002), Vol. 43, № 10-11, 1203-1218.
49. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., *Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model*, International J. of Differential Equations and Applications, (2000), Vol. 3, № 4, 7-18.
50. Angelova J., Dishliev A., *Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Vol. 39, № 4, (2000), 483-497.
51. Angelova J., Dishliev A., *Optimization problems in population dynamics*, Applicable Analysis, (1999), Vol. 69, № 3&4, 207-221.

52. Anokhin A., Berezansky L., Braverman E., Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1995), Vol. 193, 923-941.
53. Baek H., Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008), Article ID 752403, 18 p.
54. Bailey J., Shafer S., A simple analytical solution to the three-compartment pharmacokinetic model suitable for computer-controlled infusion pumps, *Biomedical Engineering*, (1991), Vol. 38, № 6, 522-525.
55. Bainov D., Covachev V., *Impulsive differential equations with a small parameter*, World Scientific, Singapore, (1994).
56. Bainov D., Covachev V., Stamova I., Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, (1991), Vol. 12, № 2, 149-161.
57. Bainov D., Covachev V., Stamova I., Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1994), Vol. 187, № 3, 790-808.
58. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument, *Kodai Math. J.*, (1997), Vol. 20, № 2, 120-126.
59. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument, *Aplicable Analysis*, (1996), Vol. 63, № 3&4, 287-297.
60. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument, *J. of Applied Analysis*, (1998), Vol. 4, № 2, 215-230.
61. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument, *J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, (1998), Vol. 11, № 1, 95-102.
62. Bainov D., Dimitrova M., Petrov V., Oscillatory properties of solutions of impulsive differential equations with several retarded argument, *Georgian Math. J.*, (1998), Vol. 5, № 3, 201-212.
63. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., An application of the method of quasilinearization for a periodic problem for systems of nonlinear differential equations, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, (1997), Tome 50, № 11-12, 21-22.
64. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations, *Multivariate Approximation and Splines*, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.
65. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations, *Indian J. pure Appl. Math.*, (1999), Vol. 30, № 9, 893-910.
66. Bainov D., Dishliev A., Population dynamic control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, *Math. Model. Numer. Anal.*, (1990), Vol. 24, № 6, 681-692.
67. Bainov D., Dishliev A., Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences*, (1989), Tome 42, № 12, 29- 32.
68. Bainov D., Dishliev A., Stamov G., Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations, *Kumamoto J. Math.*, (1997), Vol. 10, 1-10.
69. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations, *Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII-Sc. Mat.*, (1995), Vol. 41, 45-54.
70. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics, *ANZIAM J.*, (2002), Vol. 43, 525-539.
71. Bainov D., Dishliev A., Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, *International J. Systems Sci.*, (1990), Vol. 21, № 12, 2637-2643.
72. Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., Partial averaging for impulsive differential equations with supremum, *Georgian Math. J.*, (1996), Vol. 3, № 1, 11-26.
73. Bainov D., Kolev D., Nakagawa K., The control of the blowing-up time for the solution of the semilinear parabolic equation with impulsive effect, *J. Korean Math. Soc.*, (2000), Vol. 37, № 5, 793-802.
74. Bainov D., Kostadinov S., Minh N., Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations, *Science Culture Technology Publishing*, (1994).
75. Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 36, № 2, 383-393.
76. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., Lp-equivalence of linear and nonlinear impulsive differential equations in a Banach space, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (1992), Vol. 36, 17-33.
77. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space, *International J. of Theoretical Physics*, (1989), Vol. 28, № 7, 797-814.
78. Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1995), Vol. 194, № 3, 612-639.

79. Bainov D., Kulev G., Stamova I., *Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations*, SUT J. of Math., (1995), Vol. 1, 55-71.
80. Bainov D., Kulev G., Stamova I., *Instability of solutions of impulsive systems of differential equations*, International J. of Theoretical Physics, (1996), Vol. 35, № 8, 1799-1804.
81. Bainov D., Markova N., Simeonov P., *Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown functions*, J. of Computational and Applied Math., (1998), Vol. 91, № 1, 87-96.
82. Bainov D., Milusheva S., *Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses*, J. of Math. Analysis and Applications, (1983), Vol. 95, № 1, 85-105.
83. Bainov D., Milusheva S., *Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses*, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, (1981), Vol. 32, 237-254.
84. Bainov D., Minchev E., *Trends in the theory of impulsive partial differential equations*, Nonlinear Word, (1996), Vol. 3, 357-384.
85. Bainov D., Nenov S., *Limit sets of impulsive dynamical systems*, Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations, (1994), 31-34.
86. Bainov D., Petrov V., Proytcheva V., *Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with "maxima"*, J. of Computational and Applied Mathematics, (1997), Vol. 83, № 2, 237-249.
87. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions*, World Scientific, Singapore, (1995).
88. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications*, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1993).
89. Bainov D., Simeonov P., *Integral inequalities and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
90. Bainov D., Simeonov P., *Oscillation theory of impulsive differential equations*, International Publications, FL, (1998).
91. Bainov D., Simeonov P., *System with impulse effect: Stability theory and applications*, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
92. Ballinger G., Liu X., *Permanence of population growth model with impulsive effects*, Mathematics and Computer Modeling, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.
93. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive differential equations and inclusions*, Contemporary Mathematics and its Applications, Hindawi Publishing Corporations, Vol. 2, (2006).
94. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces*, Applicable Analysis, (2001), Vol. 80, № 3, 353-365.
95. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times*, Computers & Mathematics with Applications, (2004), Vol. 47, № 10-11, 1659-1665.
96. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay*, International J. of Applied Math. Sciences, (2005), Vol. 2, № 1, 130-148.
97. Benchohra M., Ouahab A., *Impulsive neutral functional differential equations with variable times*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2003), Vol. 55, № 6, 679-693.
98. Berezhansky L., Braverman E., *On Impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications*, J. of Differential Equations and Applications, (2004), Vol. 10, № 9, 851-868.
99. Braverman E., Mamdani R., *Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment*, J. of Mathematical Biology, (2008), Vol. 57, № 3, 413-434.
100. Chellaboina V., Bhat S., Haddad W., *An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems*, Nonlinear Analysis, (2003), Vol. 53, № 3-4, 527-550.
101. Chen G., Shen J., *Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks*, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A, (2007), Vol. 14, 177-188.
102. Chen J., Tisdell C., Yuan R., *On the solvability of periodic boundary value problems with impulse*, J. of Math. Analysis and Applications, (2007), Vol. 331, № 2, 902-912.
103. Chen S., Qi J., Jin M., *Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments*, Computers & Mathematics with Applications, (2003), Vol. 46, № 8-9, 1281-1287.
104. Chua L., Yang L., *Cellular neural networks: Applications*, IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS, (1988), Vol. 35, 1273-1290.
105. Chua L., Yang L., *Cellular neural networks: Theory*, IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS, (1988), Vol. 35, 1257-1272.
106. Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).

107. Cordova-Lepe F., *Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics*, Biomat 2006, International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
108. D'onofrio A., *Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model*, Mathematical Biosciences, (2002), Vol. 179, № 1, 179, 57-72.
109. Dai B., Su H., Hu D., *Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.
110. Dimov H., Nenov S., *Some features of uncontinuable solutions of impulsive dynamical systems*, Extracta Mathematicae, (1996), Vol. 11, № 3, 443-456.
111. Dishliev A., Bainov D., *Conditions for the absence of the phenomenon "beating" for systems of impulse differential equations*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, (1985), Vol. 13, № 3, 237-256.
112. Dishliev A., Bainov D., *Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces*, J. of Math. Analysis and Applications, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.
113. Dishliev A., Bainov D., *Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure*, International J. of Theoretical Physics, (1990), Vol. 29, № 6, 655-675.
114. Dishliev A., Bainov D., *Differentiability on a parameter and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses*, Österreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, (1987), Wien, Band 196, Heft 1-3, 69-96.
115. Dishliev A., Bainov D., *Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with impulses*, Aplicable Analysis, (1984), Vol. 18, № 1&2, 67-73.
116. Dishliev A., Bainov D., *Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations*, International J. of Theoretical Physics, (1992), Vol. 31, № 2, 363-372.
117. Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right-hand side*, Communications in Applied Analysis, (2006), Vol. 10, № 2, 149-159.
118. Dishliev A., Markova N., *Sufficient conditions for oscillation of the solutions of impulsive linear homogeneous differential equations with retarded argument*, Communications in Applied Analysis, (2007), Vol. 11, № 2, 223-228.
119. Dishliev A., Stoykov D., *Stability of limiting equations of impulsive differential equations*, International J. of Differential Equations and Applications, (2002), Vol. 6, № 4, 389-410.
120. Dishliev A., Stoykov D., *Stability via limiting equations of impulsive differential equations*, International J. of Differential Equations and Applications, (2002), Vol. 6, № 4, 369-388.
121. Dong L., Chen L., Shi P., *Periodic solutions for a two-species nonautonomous competition system with diffusion and impulses*, Chaos Solitons & Fractals, (2007), Vol. 32, № 5, 1916-1926.
122. Dong L., Chen L., Sun L., *Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2007), Vol. 8, № 2, 572-578.
123. Elaydi S., Yakubu A., *Global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking*, J. Diff. Equations Appl., (2002), Vol. 8, № 6, 537-549.
124. Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., *Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth*, The J. of Australian Math. Society. Series B. Applied Mathematics, (1991), Vol. 32, 382-400.
125. Feng C., Huang Z., *Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay*, International J. of Biomathematics, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
126. Fenner L., Pinto M., *On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect*, Nonlinear Analysis, (1999), Vol. 38, № 3, 307-325.
127. Franco D., Nieto J., *Maximum principles for periodic impulsive first order problems*, J. of Computational and Applied Mathematics, (1998), Vol. 88, № 1, 149-159.
128. Frigon M., O'Regan D., *First order impulsive initial and periodic problems with variable moments*, J. of Math. Analysis and Applications, (1996), Vol. 233, № 2, 730-739.
129. Frigon M., O'Regan D., *Impulsive differential equations with variable times*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (1996), Vol. 26, № 12, 1913-1922.
130. Frigon M., O'Regan D., *Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments*, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, (2001), Vol. 8, № 2, 149-159.
131. Fu X., Li X., *Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time*, Mathematics and Computer Modeling, (2008), Vol. 48, № 5-6, 776-786.
132. Gao S., Chen L., Nieto J., Torres A., *Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence*, Vaccine, (2006), Vol. 24, № 35-36, 6037-6045.
133. Gao S., Teng Z., Nieto J., Torres A., *Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay*, J. Biotechnol., (2007), Article ID 64870.
134. Georgieva A., Kostadinov S., *Lp-equivalence of impulsive differential equations*, SUT J. of Mathematics, (1997), Vol. 33, № 2, 291-301.

135. Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the L_p -equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, *Turkish J. of Mathematics*, (2008), Vol. 32, 451-466.
136. Georgiou D., Nieto J., Rodríguez-López R., Initial value problems for higher-order fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 63, № 4, 587-600.
137. Gladilina R., Icnatyev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, *International Applied Mechanics*, (2008), Vol. 44, № 2, 228-237.
138. Gnana Bhaskar T., Lakshmikantham V., Set differential equations and flow invariance, *Applicable Analysis*, (2003), Vol. 82, № 4, 357-368.
139. Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, (1996), Vol. 26, № 1, 165-173.
140. Gopalsamy K., *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
141. Gopalsamy K., Zhang B., On delay differential equations with impulses, *J. Math. Analysis and Applications*, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.
142. Guo H., Chen L., Time-limited pest control of a Lotka-Volterra model with impulsive harvest, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 840-848.
143. Hartman F., *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).
144. Henderson J., Thompson H., Smoothness of solutions for boundary value problems with impulse effects, II, *Math and Computer Modeling*, (1996), Vol. 223, № 10, 61-69.
145. Hristova S., Bainov D., Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations, *Rocky Mountain J. Math.*, (1993), Vol. 23, № 2, 609-618.
146. Hristova S., Kulev G., Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Math.*, (2001), Vol. 132, № 2, 399-407.
147. Hristova S., Nonlinear delay integral inequalities for piecewise continuous functions and applications, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, (2004), Vol. 5, № 4, Article 88.
148. Hristova S., Roberts L., Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, (2001), Vol. 34, № 7-8, 839-847.
149. Huo H-F., Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 48, № 12, 1833-1846.
150. Ignatyev A., On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 1, 53-72.
151. Jia J., Li C., A Predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195, 15 p.
152. Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey, *Applied Mathematics and Mechanics*, (2008), Vol. 29, № 5, 653-663.
153. Jin Z., Zhien M., Maoan H., The existence of periodic solutions of the n -species Lotka-Volterra competitions system with impulsive, *Chaos Solitons & Fractals*, (2004), Vol. 22, № 1, 181-188.
154. Juang G., Lu Q., Impulsive state feedback control of a predator-prey model, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2007), Vol. 200, № 1, 193-207.
155. Juang G., Lu Q., The dynamics of a prey-predator model with impulsive state feedback control, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, (2006), Vol. 6, 1310-1320.
156. Karandjulov L., Stoyanova Y., Problem of Cauchy for linear singularly perturbed impulsive systems, *Univ. Mishcolc Inst. Mathematical Notes*, (2002), Vol. 3, № 1, 25-37.
157. Kosseva A., Kostadinov S., Schneider K., L_p -dichotomy of linear differential equations in arbitrary Banach space, *Chinese Ann. Math. Ser. B*, (2003), Vol. 24, № 4, 485-490.
158. Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator, *Rostock. Math. Kolloq.*, (1999), Vol. 53, 51-59.
159. Kulev G., Bainov D., Global stability of sets for systems with impulses, *Applied Mathematics and Computation*, (1989), Vol. 29, № 3, 255-270.
160. Kulev G., Bainov D., On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct methods, *Dynamics and stability of systems*, (1990), Vol. 110, № 3, 149-162.
161. Kulev G., Bainov D., Stability of sets for systems with impulses, *Tamkang J. of Math.*, (1988), Vol. 19, № 2, 13-22.
162. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
163. Lakshmikantham V., Liu X., Stability for impulsive differential systems in terms of two measures, *Applied Mathematics and Computations*, (1989), Vol. 29, № 1, 89-98.

164. Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., Hybrid systems with time scales and impulses, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2147-2152.
165. Li J., Nieto J., Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 226-236.
166. Lin D., Hui J., The best dosage scheme on multiple rapid vein injection, *J. of Biological Systems*, (2007), Vol. 15, № 3, 355-364.
167. Liu B., Teng Z., Liu W., Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.
168. Liu B., Zhang Y., Chen L., The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning integrated pest management, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2005), Vol. 6, № 2, 227-243.
169. Liu L., Ye Y., Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses, *International J. of Computational and Math. Sciences*, (2011), Vol. 5, № 4, 229-235.
170. Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y., Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2002), Vol. 271, № 1, 124-188.
171. Liu X., Chen L., Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator, *Chaos Solitons & Fractals*, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.
172. Liu X., Chen L., Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.
173. Liu X., Li G., Luo G., Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.
174. Liu X., Stability results for impulsive differential systems with application to population growth models, *Dyn. Stabil. Syst.*, (1994), Vol. 9, № 2, 163-174.
175. Luo Z., Shen J., Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional, *Applied Mathematics Letters*, (2009), Vol. 22, № 2, 163-169.
176. Meng X., Chen L., Li Q., The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, (2008), Vol. 198, № 1, 361-374.
177. Meng X., Chen L., Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 2, 179-196.
178. Meng X., Jiao J., Chen L., The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 2, 1255-1267.
179. Meng X., Li Z., Nieto J., Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment, *J. of Mathematical Chemistry*, (2010), Vol. 47, № 1, 123-144.
180. Mihailova D., Staneva-Stoytcheva D., The fundamentals of pharmacokinetics, State Publishing House, (1987).
181. Milev N., Bainov D., Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 353-361.
182. Milev N., Bainov D., Roach G., Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (1989), Vol. 11, № 2, 271-278.
183. Milev N., Bainov D., Stability of linear impulsive differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, (1990), Vol. 20, № 12, 35-41.
184. Mönch H., von Harten G.-F., On the Cauchy problem for ordinary differential equations in Banach spaces, *Archiv der Mathematik*, (1982), Vol. 39, № 1, 153-160.
185. Naulin R., Pinto M., Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 208, № 2, 281-297.
186. Nenov S., Bainov D., Impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations*, (1992), 145-166.
187. Nenov S., Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 36, № 7, 881-890.
188. Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects, *J. of Computational and Applied Math.*, (2009), Vol. 224, № 2, 544-555.
189. Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator, *BioSystems*, (2009), Vol. 98, № 2, 67-72.
190. Nieto J., Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 205, № 2, 423-433.
191. Nieto J., O'Regan D., Variational approach to impulsive differential equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 680-690.
192. Nieto J., Rodrigues-Lopez R., Boundary value problems for a class of impulsive functional equations. *Computers & Mathematics with Applications*, (2008), Vol. 55, № 12, 2715-2731.
193. Nieto J., Rodríguez-López R., Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.

194. Nieto J., *The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations*, Fuzzy sets and systems, (1999), Vol. 102, № 1, 159-262.
195. Pandit S., Deo S., *Differential systems involving impulses*, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
196. Perestyuk M., Chernikova O., *Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations*, Ukrainian Math. J., (2008), Vol. 60, № 1, 91-107.
197. Plotnikov V., Ivanov R., Kitanov N., *Method of averaging for impulsive differential inclusions*, Pliska Stud. Math. Bulgar., (1998), Vol. 12, 43-55.
198. Rogovchenko Y., *Nonlinear Impulse Evolution Systems and Applications to Population Models*, J. Math. Analysis and Applications, Vol. 207, № 2, 300-315.
199. Saito Y., *The necessary and sufficient condition for global stability of a Lotka-Volterra cooperative or competition systems with delays*, J. of Math. Analysis and Applications, (2002), Vol. 268, № 1, 109-124.
200. Samojlenko A., Perestyuk N., *Impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, (1995).
201. Shen J., Li J., *Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.
202. Simeonov P., Bainov D., *Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations*, Tamkang J. Math., (1991), Vol. 22, № 3, 275-284.
203. Simeonov P., Bainov D., *Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, (1988), Vol. 31, № 2, 353-368.
204. Simeonov P., Bainov D., *Estimates for Cauchy matrix of perturbed linear impulsive equations*, Chinese J. of Math., (1993), Vol. 1, 73-80.
205. Slavova A., *Cellular neural networks: Dynamics and modeling*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2003).
206. Smith L., Wahl L., *Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects*, Bulletin of Math. Biology, (2005), Vol. 67, № 4, 783-813.
207. Stamov G., Stamova I., *Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay*, Applied Math. Modeling, (2007), Vol. 31, № 7, 1263-1270.
208. Stamov G., Stamova I., *Integral manifolds for impulsive differential-difference equations*, Electronic Modeling, (2005), Vol. 4, 115-120.
209. Stamov G., Stamova I., *Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations*, J. of Math. Analysis and Applications, (2001), Vol. 258, № 2, 371-379.
210. Stamova I., *Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations*, (2008), Bulletin of the Australian Math. Society, (2008), Vol. 77, 331-345.
211. Stamova I., Emmenegger G.-F., *Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets*, International J. of Applied Math., (2004), Vol. 15, № 3, 271-290.
212. Stamova I., *On the stability of an impulsive differential-difference population model*, Communications in Applied Analysis, (2006), Vol. 10, 285-291.
213. Stamova I., *Parametric stability of impulsive functional differential equations*, J. of Dynamical and Control Systems, (2008), Vol. 14, № 2, 235-250.
214. Stamova I., *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2009).
215. Stamova I., Stamov G., *Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations*, Electronic J. of Differential Equations, (2008), Vol. 48, 1-10.
216. Stamova I., Stamov G., *Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics*, J. of Computational and Applied Math., (2001), Vol. 130, № 1-2, 163-171.
217. Stamova I., *Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations*, J. of Math. Analysis and Applications, (2007), Vol. 325, № 1, 612-623.
218. Sun S., Chen L., *Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model*, Applied Mathematics and Computation, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.
219. Thomaseth K., *Section II. Systems and programs PANSYM: a symbolic equation generator for mathematical modelling, analysis and control of metabolic and pharmacokinetic systems*, Computer Methods and Programs in Biomedicine, (1994), Vol. 42, № 4, 99-112.
220. Wang F., Pang G., Shen L., *Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations*, J. of Computational and Applied Math., (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.
221. Wang H., Feng E., Xiu Z., *Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.
222. Wang W., Shen J., Luo Z., *Partial survival and extinction in two competing species with impulses*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.
223. Wang X., Song Q., Song X., *Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay*, Applied Math. Modeling, (2009), Vol. 33, № 11, 4231-4240.

224. Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.
225. Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.
226. Xian X., O'Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, *Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems*, (2008), Vol. 2008, Article ID 197205.
227. Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, *Mathematics and Computer Modeling*, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.
228. Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.
229. Yang Z., Xu D., Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, (2005), Vol. 52, 517-521.
230. Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential p -stability of impulsive stochastic differential equations with delays, *Physics Letters A*, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.
231. Yoshizawa T., *Stability theory by Lyapunov's second method*, Math. Soc. Jap., Tokyo, (1966).
232. Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.
233. Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.
234. Zavalishchin S., Seseikin A., *Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
235. Zeeman E., Zeeman M., From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems, *Transactions of the American Math. Society*, (2002), Vol. 355, № 2, 713-734.
236. Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Advances in Complex Systems*, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.
237. Zhang H., Chen L., Nieto J., A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 4, 1714-1726.
238. Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, *Mathematical and Computer Modelling*, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.
239. Zhang X., Shuai Z., Wang K., Optimal impulsive harvesting policy for single population, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651.
240. Zhao A., Lakshmikantham V., Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.
241. Zhao Z., Jiang J., Lazer A., The permanence and global attractivity in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2004), Vol. 5, № 2, 265-276.