



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ДЕПАРТАМЕНТ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧНИ

И ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА“

Доц. д-р Гани Трендафилов Стамов

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

***ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ НА СИСТЕМИ ИМПУЛСНИ
ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ***

за придобиване
на

научна степен “Доктор на математическите науки”
по научните специалности Диференциални уравнения, Математическо
моделиране и приложение на математиката

Научно жури:

1. доц. д-р Димитър Колев
2. акад. Иван Попчев
3. проф. д-р Михаил Константинов
4. проф. дмн Светослав Марков
5. проф. дтн, дмн Красимир Атанасов
6. проф. д-р Степан Костадинов
7. доц. д-р Маргарита Бонева

София, 2011

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита от катедрен съвет на катедра „Математика“ при Департамент по физикоматематични и технически науки на Химико-технологичен и металургичен университет – София, състояло се на 11.06.11.

Дисертантът работи в катедра „Математика Физика и Химия“ при Инженерно-педагогически факултет – Сливен на Технически университет - София

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 10.10.11 от 11 часа в зала 46, етаж 1, сграда Б.

Данни за дисертационния труд:

Брой на страниците –285

Брой на литературните източници – 224

Импулсни диференциални уравнения

Изучаването на импулсни диференциални уравнения се дължи на факта, че тези уравнения са полезни математически средства при описването на много процеси и явления изследвани в теорията на оптималния контрол, биология, механика, биотехнология, медицина, електроника, радиотехника, икономика и т.н.

Например, към импулсни диференциални уравнения се свеждат много задачи на нелинейната механика, като импулсни смущения се разглеждат в модела на часовниковия механизъм, описан в [1, 4] и в модела на линеен осцилатор с импулсно въздействие [1]. Такива задачи се срещат и в теорията на релаксионни колебания в електромеханични системи [1], в изследвания по комуникационна сигурност [107, 108], в Лотка-Волтера моделите [25-28, 104, 124, 127, 130, 189, 194, 210, 213, 214], в теория на управлението [103, 128, 167, 201], в моделите на невронни мрежи [29, 61, 63, 66, 183, 186, 190, 193, 199], в икономически модели [78, 162, 200]. Във всички тези случаи реалните процеси претърпяват скокообразни промени на състоянието си в дадени моменти от време между интервалите на непрекъснато развитие. Продължителността на тези промени често е пренебрежимо малка в сравнение с продължителността на разглеждания процес и следователно е естествено тези бързи промени най-адекватно да се опишат като “мигновени” промени на състоянието на процеса или като импулси.

В следващите примери е показана само малка част от разнообразното приложение на импулсните диференциални уравнения.

Пример 1. Математическият модел за съвместното съществуване на два биологични вида, които са в съотношение “хищник - жертва” е разработен почти едновременно от италианския математик Вито Волтера [207] и от Алфред Лотка [132] и може да се представи по следния начин:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{H}(t) = H(t)[r_1 - bP(t)], \\ \dot{P}(t) = P(t)[-r_2 + cH(t)], \end{cases}$$

където с $H(t)$ и $P(t)$ са означени съответно популационните числености на биологичните видове “жертва” и “хищник” в момента t , $r_1 > 0$ е коефициент на популационно нарастване на “жертвата” (при отсъствие на “хищници”), $r_2 > 0$ е коефициент на популационно намаляване на “хищника” (при отсъствие на “жертви”), а b и c са коефициенти, които характеризират междувидовото взаимодействие. По-конкретно константата b характеризира нивото на “защита” на “жертвата” (константа на “ефективност” на “жертвата”), а c – нивото на “агресивност” на “хищника”. Линеината функция $p = p(H) = bH$ е известна като *функционален отговор от тип I* на жертвата.

С помощта на външни въздействия е възможно да се контролира популационната численост на двата биологични вида. Например, чрез отстраняване на част от биологичния вид “хищник” след лов или третиране с химикали, използвани в агрокултурата, се постига намаляване на неговата популация. Импулсно увеличаване на числеността на един от двата биологични вида е възможно чрез отглеждането му във естествената среда и добавянето в определени моменти от време.

Ако например в момента $t = t_k$ популационната численост на “хищника” е променена, то можем да предположим, че

$$(2) \quad \Delta P(t_k) = P(t_k^+) - P(t_k^-) = g_k P(t_k^-),$$

където $P(t_k^-) = P(t_k)$ и $P(t_k^+)$ са съответно популационните числености на биологичния вид “хищник” преди и след импулсното въздействие в момента t_k , а константите $g_k \in R$ характеризират изменението на популационната численост на “хищника” в момента t_k . Ако $g_k > 0$, то популационната численост се увеличава, а ако $g_k < 0$, то числеността на “хищника” намалява в момента t_k .

Съотношенията (1) и (2) определят следната система импулсни диференциални уравнения

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{H}(t) = H(t)[r_1 - bP(t)], & t \neq t_k, \\ \dot{P}(t) = P(t)[-r_2 + cH(t)], & t \neq t_k, \\ H(t_k^+) = H(t_k), \\ P(t_k^+) = P(t_k) + g_k P(t_k), \end{cases}$$

където $g_k \in R$, $t \geq 0$ и t_k , $k=1, 2, \dots$ са фиксирани импулсни моменти такива, че $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.

В математическата биология моделът (3) описва динамиката в популационна система от два биологични вида в съотношение “хищник-жертва”, в която се отчита междувидовата и вътрешновидовата конкуренция за общи ресурси и в моментите t_k , $k=1, 2, \dots$ биологичната система е подложена на импулсно въздействие.

Чрез модели от вида (3) може да се изучават и вземат под внимание възможните външни ефекти, вследствие на които, популационната численост на хищника търпи кратковременни изменения.

Пример 2. Едно от направленията при изследване на Лотка-Волтера модели от типа (1) е свързано с въвеждане на функционален отговор от тип II или т.нар *Холинг тип II функция*

$$p(H) = \frac{CH}{m + H},$$

където с C е означен капацитетът на “хищника”, а m е половината от константата на насищане. На Лотка-Волтера моделите с функционален отговор от типа II, при който p е функция само на популационната численост H на “жертвата”, са посветени голям брой научни разработки и динамиката на тези системи е добре изучена [105, 114, 147, 161, 204, 214].

В действителност в реалните екосистеми функционалните отговори на “жертвата” не зависят само от популационната численост на “жертвата”, а и от числеността на “хищника” и в последните години, някои изследователи разглеждат функционални отговори, които са функции на отношението на двете популационни числености

$$p\left(\frac{H}{P}\right) = \frac{C \frac{H}{P}}{m + \frac{H}{P}} = \frac{CH}{mP + H}$$

и Лотка-Волтера модели от вида

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{H}(t) = H(t) \left[r_1 - aH(t) - \frac{CP(t)}{mP(t) + H(t)} \right], \\ \dot{P}(t) = P(t) \left[-r_2 + \frac{KH(t)}{mP(t) + H(t)} \right], \end{cases}$$

където K е капацитетът на “жертвата”.

Ако отчетем закъснението при изучаване на популационната динамика, достигаме до функционално-диференциалния модел от тип “хищник-жертва”:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{H}(t) = H(t) \left[r_1 - a \int_{-\infty}^t k(t-u)H(u)du - \frac{CP(t-\tau(t))}{mP(t) + H(t)} \right], \\ \dot{P}(t) = P(t) \left[-r_2 + \frac{KH(t-\tau(t))}{mP(t) + H(t-\tau(t))} \right], \end{cases}$$

където $k: R^+ \rightarrow R^+$ е функция (т.нар. закъснително ядро или теглови фактор), която дава предварителна информация за броя на нападенията, които трябва да бъдат направени върху популацията на “жертвата”, за да се определи настоящият ефект на ресурсната наличност. Функцията $\tau(t)$, $0 \leq \tau(t) \leq T$, характеризира възрастта за възпроизводство на биологичните видове.

Екологичните системи често са обект на кратковременни въздействия, дължащи се на климатични промени или на човешка активност. В редица реални ситуации хищникът или паразитът се отстраняват за кратко време. Следователно за адекватно моделиране на процесите в екологични системи (5) е необходимо да се разглеждат модели с импулсни въздействия от вида

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{H}(t) = H(t) \left[r_1 - a \int_{-\infty}^t k(t-u)H(u)du - \frac{CP(t-\tau(t))}{mP(t)+H(t)} \right], \quad t \neq t_k, \\ \dot{P}(t) = P(t) \left[-r_2 + \frac{KH(t-\tau(t))}{mP(t)+H(t-\tau(t))} \right], \quad t \neq t_k, \\ H(t_k^+) = (1+h_k)H(t_k), \quad k=1, 2, \dots, \\ P(t_k^+) = (1+g_k)P(t_k), \quad k=1, 2, \dots, \end{array} \right.$$

където $h_k, g_k \in R$, $t \geq 0$ и t_k , $k=1, 2, \dots$ са фиксирани импулсни моменти такива, че $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.

С помощта на модели от вида (6) може да се изследва един от основните проблеми в математическата екология - проблемът за устойчивост на екосистемите. Под “устойчивост” се разбира запазване на количеството на биомасите в дадено съобщество с течение на времето (отсъствие на колебания в численостите на популациите).

Пример 3. В работите [67, 68] Леон Чуа и Лин Янг дефинират математически модел на клетъчна невронна мрежа като обширна нелинейна аналогова верига, която произвежда сигнали в реално време.

Математическото моделиране в невронни мрежи се базира на понятието “неврони”, което се различава както от реалните биологични неврони така и от реалното функциониране на прости електронни вериги.

Невронните мрежи притежават някои ключови свойства и имат важни приложения в такива области като сигнални процеси, отразени процеси, разпознаване на образи и др. Големите възможности за приложение обуславят интензивното развитие на теорията на невронните мрежи в последните няколко години [65 - 69, 97].

Те могат да бъдат моделирани със следните диференциални уравнения

$$(7) \quad \dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

класическият модел на Хопфилдова невронна мрежа, или с функционално-диференциалните уравнения:

$$(8) \quad \dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i,$$

където $i = 1, 2, \dots, n$ за невронна мрежа със зависещи от времето закъснения където n е броят на елементите в невронната мрежа; $x_i(t)$ е състоянието на i -тия елемент (неврон) в момента от време t ; $f_j(x_j(t))$ е активационната функция на j -тия елемент; a_{ij} , b_{ij} , I_i и c_i са константи; a_{ij} е теглото на j -тия елемент, което определя значимостта му относно i -тия елемент в момента t ; b_{ij} е теглото на j -тия елемент, което определя значимостта му относно i -тия елемент в момента $t - \tau_j(t)$; I_i описва външното отклонение на i -тия елемент; $\tau_j(t)$ е трансмисионното закъснение на състоянието на j -тия елемент и удовлетворява условието $0 \leq \tau_j(t) \leq \tau$ ($\tau = \text{const}$); c_i са константи, които характеризират нивото след което i -тия елемент ще постави своя потенциал в следващо състояние на изолация, в което е изключен от мрежата и от външния източник.

Невронните мрежи често са обект на кратковременни смущения в определени моменти от време, поради които те претърпяват бързи изменения. При математическото моделиране на такива невронни мрежи времетраенето на тези бързи смени се пренебрегва и се предполага, че процесът се изменя скокообразно. Бързите изменения могат да се дължат на променливи превключвания, внезапни шумове, електрически импулси при придвижване по мрежата и др.

Ако в резултат на импулсно въздействие в момента t_k състоянието на i -тия елемент на невронната мрежа е изменено, то адекватни математически модели на разглеждания по-горе процес ще бъдат импулсните диференциални уравнения

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, & t \neq t_k, \\ x_i(t_k^+) = x_i(t_k) + P_{ik}(x_i(t_k)), & k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

или

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i, & t \neq t_k, \\ x_i(t_k^+) = x_i(t_k) + P_{ik}(x_i(t_k)), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В горните уравнения $i = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, $t \in R$, $x_i(t_k)$ описва състоянието на i -тия елемент преди импулсно въздействие в момента от време t_k , а $x_i(t_k^+)$ описва състоянието на i -тия елемент след импулсно въздействие в момента от време t_k , P_{ik} са функции, които характеризират изменението на състоянието на i -тия елемент в момента от време t_k .

С помощта на моделите от вида (9) и (10) могат да се изследват въпросите за оптимално управление и синхронизация на тези системи. Важен аспект в тези случаи е, че импулсите могат да се използват в ролята на контрол.

В разгледаните примери математическите модели, базирани на импулсни диференциални уравнения, се задават с помощта на диференциални уравнения и условия за скок. В зависимост от типа на диференциалните уравнения се определя и типът на импулсните диференциални уравнения: импулсни диференциални уравнения, диференциално-диференчни уравнения с постоянно закъснение, интегро-диференциални уравнения, функционално - диференциални уравнения с променливи крайни закъснения, функционално- диференциални уравнения с безкрайни закъснения и др.

Теорията на импулсните обикновени диференциални уравнения бележи началото си от 1960 година с работата на В.Д. Милман и А.Д. Мишкис [13]. В тази работа са дадени някои общи съображения за системи с импулси и са получени първите резултати по устойчивост. Следва интензивно развитие на теорията на импулсните диференциални уравнения. Получени са редица резултати от фундаменталната и качествена теория [5, 20, 21, 36, 37, 38, 63, 64, 77, 103, 107, 120, 137, 151, 152, 154]. Получените резултати са използвани при изследването на модели, изучавани в приложните науки [25-29, 33, 37, 53, 54, 76, 85-88, 90, 118, 121, 122, 133, 201, 221].

Почти периодичност

Концепцията за почти периодичност е с дълбоки исторически корени. Един от най-старите проблеми в астрономията е бил как да се обяснят някои от станните движения на луната, слънцето и планетите след „първичния взрив“. Този проблем за астрономите на древна Гърция е бил достатъчно труден за разрешаване, като се обележи факта, че

модела на слънчевата система в тази епоха е свързан с отчитане само на равномерните линейни и равномерните кръгови движения на планетите. Едно такова решение, понякога отнасящо се към „Алмагест“ на Птоломей е методът на така наречените „епицикли“.

Нека P е произволна планета или луната. Моделът на движение на P е описван с релацията

$$r_1 e^{i\lambda_1 t} + r_2 e^{i\lambda_2 t},$$

където r_1, λ_1 и r_2, λ_2 са реални константи. Когато обаче този модел е приложен към движението на луната се оказало, че това не е достатъчно добра апроксимация.

Коперник показва, че ако се добави трети цикъл към движенията може да се получи по-добра апроксимация на използваните в този момент данни. Това означава, че ако $\varphi(t)$ е точното движение на луната, тогава съществуват $r_1, r_2, \dots, r_n$ и реалните числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ са такива, че

$$\left| \varphi(t) - \sum_{j=1}^n r_j e^{i\lambda_j t} \right| \leq \varepsilon,$$

където $\varepsilon > 0$ е грешката от астрономическите наблюдения. Ако числата $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не са рационални множители на едно и също реално число, тогава крайната сума не е периодична. Тя е почти периодична в смисъла на следното представяне. Ако за всяко $\varepsilon > 0$ сумата

$$\sum_{j=1}^n r_j e^{i\lambda_j t} \equiv p(t)$$

е крайна и за всяко $t \in R$ е изпълнено неравенството

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon,$$

то функцията f е *почти периодична*.

Идеята е била да се представят движенията на планетите и луната да се опишат с функции от посочения тип. Основните аспекти в историческото развитие на този проблем могат да се намерят в работите [144, 202]

Формалната теория на почти периодичните функции в математика е развита от датския математик Харалд Бор [48]. Бор публикува серия от работи, в които изследва редове от вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n s},$$

известен като ред на Дирихле (в частност един от тях е Римановата дзета функция). В неговите изследвания се отбелязва, че по линията $\operatorname{Re}(s) = \text{const}$ тези функции притежават регулярно развитие. Очевидно той е предполагал че формалното изучаване на това развитие може да му даде възможност за намиране на разпределението на стойностите на редовете на Дирихле.

Регулярното развитие, което той открива формулира по следния начин.

Непрекъснатата функция f е *регулярна*, ако за всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко $t \in R$ множеството $T(f, \varepsilon)$,

$$T(f, \varepsilon) \equiv \left\{ \tau, \sup_{t \in R} |f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon \right\}$$

е относително плътно в този смисъл, че за всяко число l всеки интервал с дължина l притежава поне една обща точка с $T(f, \varepsilon)$. Лесно може да се установи, че сумата на две регулярни функции е също регулярна и равномерната сходимост в този клас от функции води до гранична функция от същия клас. Тогава всички регулярни функции са *почти периодични* в посочения от Бор смисъл. По-късно той разглежда и проблемите за съществуване на почти периодични интеграли (разгледани като функции на горната си граница) от почти периодични функции, както и редица нови приложения на тази теория.

През 1920 г. се получават и първите резултати свързани с почти периодичност на решенията на различни класове диференциални уравнения. Един от резултатите свързан с работите на Бор и Нюгебауер [49] се отнася към факта, че ограничените решения на системите диференциални уравнения от вида

$$\dot{x} = Ax + f(t)$$

са по необходимост почти периодични, когато A е скаларна величина, а $f(t)$ е почти периодична.

Достатъчно сериозни и приложими свойства на почти периодичните решения на диференциални уравнения от последния вид са изследвани от Бохнер [50]. В тази работа той въвежда следната дефиниция.

Непрекъснатата функция f е *нормална*, ако от всяка редица от реални числа $\{\alpha_n\}$ може да се извлече подредица от вида $\{\alpha_{n_k}\}$ такава, че границата

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + \alpha_{n_k}) = g(t)$$

съществува равномерно в R . В същата работа е доказана и еквивалентност на класовете от *нормални* и *регулярни* функции, а по-късно в работите на Бохнер [51, 52] ползата от този клас функции е показана при различни класове диференциални уравнения.

През 1933 г. в работата на Марков [135], при изучаването на почти периодичните решения на диференциалните уравнения е намерена зависимостта между съществуването на почти периодични решения и тяхната устойчивост. Тук за първи път е доказано, че силно устойчивите ограничени решения са и почти периодични.

След първите съществени постижения в тази област, в средата на XX век се появяват редица забележителни резултати, както и нови дефиниции за почти периодичност, част от които могат да се намерят в работите [7, 9, 10, 32, 46, 74, 77, 81, 82, 163, 164, 165, 203, 215, 216, 224].

Началото в развитието на почти периодичните частично-непрекъснати функции може да се отнесе към 60 години на XX век, когато заедно с изследванията в областта на импулсните диференциални уравнения се появява необходимостта от дефинирането на тези нови обекти.

Първите дефиниции и по съществени резултати в тази област могат да се намерят в работите на Халанай и Векслер [91], Перестюк, Самойленко и Ахмедов [2, 3, 4, 16 - 19], както и Хекимова и Байнов [94].

В настоящия дисертационен труд са обобщени и систематизирани основните резултати на автора, свързани с приложението на почти периодичните функции при моделиране и изследване на съществуване, устойчивост и ограниченост на почти периодични импулсни системи диференциални уравнения. Получените теоретични резултати са приложени при изследването на динамиката на редица биологични модели и невронни мрежи.

Дисертационният труд се състои от увод и четири глави.

Първа глава е посветена на фундаменталната теория за импулсни диференциални уравнения, почти периодичните редици и почти периодичните функции. Главата се състои от три параграфа.

Параграф 1.1. разглежда въпросите свързани със съществуването и единствеността на решенията на основни видове импулсни диференциални уравнения.

Нека R^n е n -мерното Евклидово пространство с норма $\|x\|$ на елемента $x \in R^n$ и нека $R^+ = [0, \infty)$. При $J \subseteq R$ са дефинирани следните класове от функции:

$PC[J, R^n] = \left\{ \sigma : J \rightarrow R^n : \sigma(t) \text{ е непрекъсната във всяка точка от } J, \text{ с изключение на краен брой точки } \tilde{t} \in J, \text{ в които } \sigma(\tilde{t}^+) \text{ и } \sigma(\tilde{t}^-) \text{ съществуват и } \sigma(\tilde{t}^-) = \sigma(\tilde{t}) \right\}.$

$PC^1[J, R^n] = \left\{ \sigma : J \rightarrow R^n : \sigma(t) \text{ е непрекъснато диференцируема във всяка точка от } J, \text{ с изключение на краен брой точки } \tilde{t} \in J, \text{ в които } \dot{\sigma}(\tilde{t}^+) \text{ и } \dot{\sigma}(\tilde{t}^-) \text{ съществуват и } \dot{\sigma}(\tilde{t}^-) = \dot{\sigma}(\tilde{t}) \right\}.$

Нека $\Omega \subseteq R^n$ е фазовото пространство на произволен еволюционен процес, т.е. множеството от неговите състояния. Означаваме с P_t изобразяващата точка в момента от време t и предполагаме, че състоянието на процеса е определено от n параметъра. Тогава изобразяващата точка P_t може да се интерпретира като точка (t, x) от $(n+1)$ -мерното пространство R^{n+1} . Множеството $R \times \Omega$ наричаме разширено фазово пространство.

Предполагаме, че законът на движение се описва от:

(а) система диференциални уравнения

$$(11) \quad \dot{x} = f(t, x),$$

където $t \in R$; $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$; $f : R \times \Omega \rightarrow R^n$;

(б) множества $M_t \subseteq R \times \Omega$ и $N_t \subseteq R \times \Omega$ с произволна топологична структура;

(в) оператора $A_t : M_t \rightarrow N_t$.

Движението на изобразяващата точка P_t в разширеното фазово пространство започва от начално положение $(t_0, x(t_0))$, $t_0 \in R$ и се извършва по интегралната крива $(t, x(t))$, която се описва от решението $x(t)$ на система (11) с начално условие $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \Omega$ до момента $t_1 > t_0$, в който изобразяващата точка среща множеството M_t . В момента t_1 операторът A_{t_1} "мигновено" прехвърля точката P_t от положение $(t_1, x(t_1))$ в положение $(t_1, x_1^+) \in N_{t_1}$, $x_1^+ = A_{t_1}(x(t_1))$. След това изобразяващата точка P_t продължава да се движи по интегралната крива $(t, y(t))$, която

се описва от решението $y(t)$ на система (11) с начално условие $y(t_1) = x_1^+$ до нова среща с множеството M_t и т.н.

Обединението от релациите (а), (б) и (в), които описват еволюционния процес се нарича *импулсна система диференциални уравнения*, а кривата, която се описва при движението на изобразяващата точка P_t - *интегрална крива* на импулсната система. Моментите $t_1, t_2, \dots$, в които изобразяващата точка среща множеството M_t , се наричат *моменти на импулсно въздействие*. Ще приемем, че решенията на импулсните диференциални уравнения са непрекъснати отляво функции в моментите на импулсно въздействие, т.е.

$$x(t_k^-) = x(t_k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Свободата на избора на множествата M_t , N_t и оператора A_t определя голямото разнообразие на системите импулсни диференциални уравнения.

Решенията на система импулсни диференциални уравнения могат да бъдат:

- Непрекъснати функции, ако интегралната крива не пресича множеството M_t или го пресича в неподвижни точки за оператора A_t ;
- Частично непрекъснатата функция с краен брой точки на прекъсване, ако интегралната крива пресича множеството M_t в краен брой точки, които не са неподвижни за оператора A_t ;
- Частично непрекъснатата функция с изброимо много точки на прекъсване, ако интегралната крива пресича множеството M_t в изброимо много точки, които не са неподвижни за оператора A_t .

В настоящия дисертационен труд се изследват системи диференциални уравнения, при които импулсните въздействия настъпват, когато е изпълнено дадено пространствено-времево съотношение $\Phi(t, x) = 0$, $(t, x) \in R \times \Omega$, т.е. когато изобразяващата точка P_t от разширеното фазово пространство на разглеждания еволюционен процес попадне върху хиперповърхнина с уравнение $\Phi(t, x) = 0$. Такива системи ще записваме във вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x), & \Phi(t, x(t)) \neq 0, \\ \Delta x(t) = I(x(t)), & \Phi(t, x(t)) = 0. \end{cases}$$

Множествата M_t , N_t и операторът A_t се определят със съотношенията

$$M_t = \{ (t, x) \in R \times \Omega : \Phi(t, x) = 0 \}, \quad N_t = R \times \Omega,$$

$$A_t : M_t \rightarrow N_t, \quad (t, x) \rightarrow (t, x + I(x)),$$

където $I : \Omega \rightarrow \Omega$ и $t = t_k$ е момент на импулсно въздействие за решението $x(t)$, ако $\Phi(t_k, x(t_k)) = 0$.

По-подробно описание е дадено на следните два класа системи импулсни диференциални уравнения, които са разгледани в дисертационния труд.

I. Системи импулсни диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие

Системите импулсни диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие се характеризират с това, че множеството M_t се задава с редица от хиперравнини $t = t_k$, където $\{t_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е дадена редица от моменти на импулсно въздействие. Операторът A_t се определя само за $t = t_k$, като се задава редицата от оператори $A_k : \Omega \rightarrow \Omega$, $x \rightarrow A_k x = \psi_k(x) = x + I_k(x)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Системите от този клас се записват по следния начин:

$$(12) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad t \neq t_k,$$

$$(13) \quad \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)) \quad , \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

където $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$, $I_k : \Omega \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Нека $\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ и $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} t_k = \pm \infty$.

С $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ е означено решението на система (12), (13), което удовлетворява следното начално условие

$$(14) \quad x(t_0^+) = x_0$$

Решението $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ на задачата на Коши (12), (13), (14) се характеризира със следните свойства:

- (а) За $t = t_0$ решението $x(t)$ удовлетворява началното условие (14);
- (б) За $t \in (t_k, t_{k+1}]$ решението $x(t)$ удовлетворява (12);
- (в) В момента $t = t_k$ решението $x(t)$ удовлетворява (13).

II. Системи импулсни диференциални уравнения с променливи импулсни въздействия

При системите от този тип множеството M_t е редица от хиперповърхнини $\sigma_k : t = \tau_k(x), k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Ще предполагаме, че $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ за $x \in \Omega$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty$ за $x \in \Omega$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \tau_k(x) = -\infty$ при $k \rightarrow -\infty$).

Системите от този клас се записват по следния начин:

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x(t)), \\ \Delta x(t) = I_k(x(t)), & t = \tau_k(x(t)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Решението $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ на задачата на Коши (15), (14) е частично непрекъсната функция, но за разлика от решенията на уравненията (12), (13) и (14) точките на прекъсване зависят от самото решение. Системите от този клас са значително по-труден за изучаване обект, в сравнение със системите с фиксирани моменти на импулсно въздействие.

Един от основните проблеми свързани с тези системи е явлението “биене” на решението [21, 41]. Това е случая, в които интегралната крива на дадено решение среща някоя хиперповърхнина σ_k няколко или безброй много пъти в различни моменти. Част от трудностите при изучаване на системи от вида (15) са свързани с възможността различни интегрални криви да се слоят след импулс, възможността за загиване на решението и др.

Очевидно системите импулсни диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие могат да се разглеждат като частен случай на системите от този вид. Ако $t = t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ са фиксирани моменти от време и въведем означението $\sigma_k = \{(t, x) \in R \times \Omega, t = t_k\}$, тогава системата от втория клас се редуцира до система от първия клас.

Разгледани са редица теореми свързани с условия за отсъствие на явлението “биене” продължимост на решенията наляво и надясно, единственост на решенията и представяне на решенията с матрица на Коши.

В този параграф са описани и класовете от частично непрекъснати функции на Ляпунов които се използват в Трета глава.

Въведени са означенията

$$G_k = \{(t, x) \in R \times \Omega : \tau_{k-1}(x) < t < \tau_k(x)\}, \quad G = \bigcup_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} G_k.$$

Дефиниция 1.1.15. Ще казваме, че функцията $V : R \times \Omega \rightarrow R^+$ принадлежи на класа от функции V_0 , ако са изпълнени условията:

1. Функцията $V(t, x)$ е непрекъсната в G и е локално Липшицова по втория си аргумент във всяко едно от множествата G_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

2. За всяко $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $(t_0^*, x_0^*) \in \sigma_k$ съществуват и са крайни границите

$$V(t_0^{*-}, x_0^*) = \lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (t_0^*, x_0^*) \\ (t, x) \in G_k}} V(t, x) \quad \text{и} \quad V(t_0^{*+}, x_0^*) = \lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (t_0^*, x_0^*) \\ (t, x) \in G_{k+1}}} V(t, x)$$

и е валидно равенството $V(t_0^{*-}, x_0^*) = V(t_0^*, x_0^*)$.

Нека функцията $V \in V_0$ и $(t, x) \in G$. Дефинирана е производната

$$\dot{D}_{(15)} V(t, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\delta} [V(t + \delta, x + \delta f(t, x)) - V(t, x)].$$

Класът от функции на Ляпунов V_0 се използва и за изследване на качествените свойства на решенията на системи диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие (12), (13). В този случай $\tau_k(x) \equiv t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, σ_k са хиперравнини в R^{n+1} , множествата G_k имат вида

$$G_k = \{(t, x) \in R \times \Omega : t_{k-1} < t < t_k\},$$

а условието 2 на Дефиниция 1.1.15 се заменя със следното условие:

2'. За всяко $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $x \in \Omega$ съществуват и са крайни границите

$$V(t_k^-, x) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_k \\ t < t_k}} V(t, x) \quad \text{и} \quad V(t_k^+, x) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_k \\ t > t_k}} V(t, x),$$

а също е валидно равенството

$$V(t_k^-, x) = V(t_k, x).$$

За $t \neq t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ дясната производна на функцията на Ляпунов $V \in V_0$ върху решенията на система (12), (13) е дефинирана чрез равенството

$$D_{(12)}^+ V(t, x(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\delta} [V(t + \delta, x(t + \delta)) - V(t, x(t))].$$

Във Трета глава ще използваме и следните класове от частично непрекъснати функции на Ляпунов

$$V_1 = \left\{ V : R \times \Omega \times \Omega \rightarrow R^+, \text{ непрекъснати в } (t_{k-1}, t_k] \times \Omega \times \Omega \text{ и } \lim_{\substack{(t,x,y) \rightarrow (t_k, x_0, y_0) \\ t > t_k}} V(t, x, y) = V(t_k^+, x_0, y_0) \right\}.$$

Дефиниция 1.1.16. Ще казваме, че функцията $V \in V_1$ принадлежи на класа от функции V_2 , ако са изпълнени условията:

1. $V(t, 0, 0) = 0, \quad t \in R.$
2. Функцията V е локално Липшицова по отношение на втория и третия си аргумент, т.е. при $x_1, x_2 \in \Omega, \quad y_1, y_2 \in \Omega$ за всяко $t \in R$ съществува положителна константа H_1 такава, че

$$|V(t, x_1, y_1) - V(t, x_2, y_2)| \leq H_1 (\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|).$$

за всяко $G_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Нека $V \in V_2, \quad t \neq t_k, \quad x \in PC[R, \Omega], \quad y \in PC[R, \Omega].$

Въведена е и

$$D^+V(t, x(t), y(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\delta} [V(t + \delta, x(t) + \delta f(t, x(t)), y(t) + \delta f(t, y(t))) - V(t, x(t), y(t))].$$

Приведени са и основните теореми за сравнение, които се използват в дисертационния труд. Сравнителният метод се състои в изследване на връзките, които съществуват между дадената система и сравнителна система зададена така, че от определен вид свойства на сравнителната система да следват съответните свойства на изследваната система.

Параграф 1.2. е посветен на теорията на почти периодичните редици и от [21] са използвани основните дефиниции и свойства на почти периодичните редици от вектори и реални числа.

Разгледана е редицата $\{x_k\}, \quad x_k \in R^n, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволно число.

Дефиниция 1.2.1. Цялото число p ще наричаме ε -почти период на редицата $\{x_k\}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$, ако

$$\|x_{k+p} - x_k\| < \varepsilon.$$

Дефиниция 1.2.2. Редицата $\{x_k\}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ще наричаме почти периодична,

ако за произволно $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество от ε -почти периоди, т.е. съществува естествено число $N = N(\varepsilon)$ такова, че за произволно цяло число k измежду целите числа принадлежащи на интервала $[k, k + N]$, съществува поне едно число p , за което е изпълнено неравенството от Дефиниция 1.2.1.

Разгледано е пълното доказателство на следните теореми:

Теорема 1.2.3. Нека са изпълнени следните условия:

1. Редицата $\{x_k\} \subset B_\alpha$ е почти периодична.
2. Функцията $y = f(x)$ е равномерно непрекъсната в B_α .

Тогава:

1. Редицата $\{x_k\}$ е ограничена.
2. Редицата $\{y_k\}$, $y_k = f(x_k)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

Теорема 1.2.4. Нека са изпълнени следните условия:

1. Редиците $\{x_k^m\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$ са почти периодични.
2. Съществува границата $\{y_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ на редиците $\{x_k^m\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $m \rightarrow \infty$.

Тогава редицата $\{y_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

Теорема 1.2.5. Редицата $\{x_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична, тогава и само тогава, когато за всяка редица от цели числа $\{m_i\}$, $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ съществува подредица $\{m_{i_j}\}$ такава, че редицата $\{x_{k+m_{i_j}}\}$ е сходяща при $j \rightarrow \infty$ равномерно по отношение на $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Теорема 1.2.7. Нека редиците $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $x_k, y_k \in R^n$ са почти периодични. Тогава за произволно $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество съставено от общите им ε -почти периоди.

В цялата работа е използвано следното множество

$$B = \left\{ \{t_k\}, t_k \in R, t_k < t_{k+1}, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \lim_{k \rightarrow \pm \infty} t_k = \pm \infty \right\},$$

съставено от неограничени растящи редици от реални числа и с $i(t, t+a)$ е означен броя на точките t_k в интервала $(t, t+a]$.

Разглеждани са и редиците $\{t_k^j\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Дефиниция 1.2.10. Множеството от редици $\{t_k^j\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ се нарича *равномерно почти периодично*, ако за произволно $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество от техните ε – почти периоди .

Пример 1.2.11. [21] Нека $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in R$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична редица такава, че $\sup_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} |\alpha_k| = \alpha < \frac{A}{2}$, $A > 0$ и нека

$$t_k = kA + \alpha_k, \alpha_k \in R, k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогава $t_{k+1} - t_k \geq A - 2\alpha > 0$ и $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} t_k = \pm\infty$.

Нека $\varepsilon > 0$ и p е $\frac{\varepsilon}{2}$ - почти период на редицата $\{\alpha_k\}$. Тогава за произволни цели числа k и j е изпълнено неравенството

$$|t_{k+p}^j - t_k^j| = |\alpha_{k+j+p} - \alpha_{k+j}| + |\alpha_{k+p} - \alpha_k| < \varepsilon,$$

което показва, че редицата $\{t_k^j\}$ е равномерно почти периодична.

Пример 1.2.12. [94] Нека $t_k = k + \alpha_k$, където

$$\alpha_k = \frac{1}{4} |\cos k - \cos k\sqrt{2}|, k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Редицата $\{t_k\}$ е строго растяща, тъй като

$$t_{k+1} - t_k = 1 + \frac{1}{4} |\cos(k+1) - \cos(k+1)\sqrt{2}| - \frac{1}{4} |\cos k - \cos k\sqrt{2}| \geq \frac{1}{2}$$

и лесно може да се провери, че $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} t_k = \pm\infty$.

Доказано е, че множеството от редици $\{t_k^j\}$ е равномерно почти периодично.

По-нататък са разгледани следните основни свойства на равномерно почти периодични редици.

Лема 1.2.13. [21] Нека множеството от редици $\{t_k^j\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ е равномерно почти периодично. Тогава за всяко $p > 0$ съществува положително цяло число N такова, че всеки интервал с дължина p притежава не повече от N елемента на редицата $\{t_k\}$ и

$$i(s, t) \leq N(t - s) + N.$$

Лема 1.2.14. [21] Нека множеството от редици $\{t_k^j\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ е равномерно почти периодично. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува положително

число $l=l(\varepsilon)$ такова, че всеки интервал A с дължина l съществува такъв подинтервал I , $I \subseteq A$ и цяло q такова, че

$$\left| t_k^q - r \right| < \varepsilon, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, r \in I.$$

Лема 1.2.15. [91] Нека множеството от редици $\left\{ t_k^j \right\} \quad t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ е равномерно почти периодично и функцията $\Phi(t)$ е почти периодична в смисъл на Бор. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува положително число $l=l(\varepsilon)$ такова, че всеки интервал A с дължина l съществува подинтервал I , $I \subseteq A$ и цяло q такова, че

$$\left| t_k^q - r \right| < \varepsilon, \quad \left| \Phi(t+r) - \Phi(t) \right| < \varepsilon,$$

за всички $k = \pm 1, \pm 2, \dots, r \in I, t \in R$.

Лема 1.2.16. [91] Нека множеството от редици $\left\{ t_k^j \right\} \quad t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ е равномерно почти периодично, а функцията $\Phi(t)$ е почти периодична в смисъл на Бор. Тогава редицата $\left\{ \Phi(t_k) \right\}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

В следващата дефиниция класическото разглеждане на Бохнер [51,52] за почти периодичност е приложено към множеството B .

Дефиниция 1.2.17. Ще казваме, че множеството $T \in B$ е почти периодично, ако за всяка редица $\{s'_m\}$ от реални числа следва, че съществува подредица $\{s_n\}$, $s_n = s'_{m_n}$, която е равномерно сходяща при $n \rightarrow \infty$ към множество $T_1 \in B$.

Лема 1.2.18. Множеството от редици $\left\{ t_k^j \right\} \quad t_k^j = t_{k+j} - t_k, k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ е равномерно почти периодично тогава и само тогава, когато за всяка редица от реални числа $\{s'_m\}$ следва, че съществува подредица $\{s_n\}$, $s_n = s'_{m_n}$ такава, че редицата $T + s_n = \{t_k + s_n\}$ е равномерно сходяща при $n \rightarrow \infty$ в множеството B .

В изследванията за съществуване на почти периодични решения на импулсни диференциални уравнения е важен въпросът за *отделимост от нулата* на редиците от вида $\{t_k\} \in B$, т. е. в цялата работа се предполага, че е изпълнено е неравенството

$$\inf_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} t_k^1 = \theta > 0.$$

Използвано е и множеството $UAPS$, $UAPS \subset B$, за което редиците $\{t_k^j\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ образуват равномерно почти периодично множество и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

Параграф 1.3.1. е свързан с почти периодични частично непрекъснати функции и техните свойства, които се използват в останалата част от дисертацията.

Въведена е следната основна дефиниция.

Дефиниция 1.3.1. Функцията $\varphi \in PC[R, R^n]$ се нарича *почти периодична*, ако:

(а) $\{t_k\} \in UAPS$.

(б) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такова, че ако точките t' и t'' са от един и същи интервал на непрекъснатост на функцията $\varphi(t)$ и удовлетворяват неравенството $|t' - t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| < \varepsilon$.

(в) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество $\bar{T}$ такова, че ако $\tau \in \bar{T}$, то $\|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ за всяко $t \in R$, което удовлетворява условието $|t - t_k| > \varepsilon$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Елементите на множеството $\bar{T}$ ще наричаме ε -почти периоди.

Пример 1.3.2. [94] Нека $\{\mu_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $\mu_k \in R^n$ е почти периодична редица, а $\{t_k\} \in UAPS$. Тогава стъпаловидната функция $\varphi(t) = \mu_k$, $t_k < t \leq t_{k+1}$ е почти периодична.

Разгледани са и са доказани следните свойства на почти периодичните функции.

Теорема 1.3.3. Ако $\varphi \in PC[R, R^n]$ е почти периодична функция, то тя е ограничена.

Теорема 1.3.4. Ако $\varphi \in PC[R, R^n]$ е почти периодична функция, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество от интервали с дължина γ , $0 < \gamma < \varepsilon$, което съдържа ε -почти периоди на функцията $\varphi(t)$.

Теорема 1.3.5. Нека $\varphi \in PC[R, R^n]$ е почти периодична функция с област от стойности $Y \subset R^n$. Ако функцията $F(y)$ е равномерно непрекъснатата и дефинирана над Y , то функцията $F(\varphi(t))$ е почти периодична.

Теорема 1.3.6. За две почти периодични функции с точки на прекъсване от редицата $\{t_k\} \in UAPS$ и за произволно $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество от общите им ε – почти периоди.

Теорема 1.3.7. Сумата от две почти периодични функции с точки на прекъсване от редицата $\{t_k\} \in UAPS$ е почти периодична функция.

За следната система импулсни диференциални уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = B_k x(t_k) + I_k(x(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $A \in C[R, R^{n \times n}]$ е почти периодична в смисъл на Бор матрична функция, $\{t_k\} \in B$, $f \in PC[R, R^n]$, $B_k \in R^{n \times n}$, $I_k \in C[R^n, R^n]$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е доказана следната лема.

Лема 1.3.9. Нека са изпълнени следните условия:

1. $U(t, s)$ е фундаментална матрица на системата $\dot{x} = A(t)x$.
2. $f(t)$ е почти периодична функция.
3. Редиците $\{I_k\}$, $I_k \in R^n$ и $\{B_k\}$, $B_k \in R^{n \times n}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ са почти периодични.
4. Редицата $\{t_k\} \in UAPS$.

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ и всяко $\theta > 0$ съществува ε_1 , $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ и относително плътно множество $\bar{T}$ от реални числа и множество P от цели числа такива, че са изпълнени следните релации:

- (a) $\|U(t+\tau, s+\tau) - U(t, s)\| < \varepsilon$, $t, s \in R$, $\tau \in \bar{T}$, $0 \leq t-s \leq \theta$;
- (б) $\|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon$, $t \in R$, $\tau \in \bar{T}$, $|t-t_k| > \varepsilon$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$;
- (b) $\|B_{k+q} - B_k\| < \varepsilon$, $q \in P$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$;
- (в) $\|I_{k+q} - I_k\| < \varepsilon$, $q \in P$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$;
- (д) $|t_k^q - r| < \varepsilon$, $q \in P$, $r \in \bar{T}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Разгледана е и следната дефиниция за почти периодични частично непрекъснати функции.

Нека за $T, P \in B$, $s(T \cup P): B \rightarrow B$ е такова изображение, че $s(T \cup P)$ образува строго растяща редица и ако $D \subset R$ нека за всяко $\varepsilon > 0$, $\theta_\varepsilon(D) = \{t + \varepsilon, t \in D\}$, $F_\varepsilon(D) = \bigcap \{\theta_\varepsilon(D)\}$.

С $\phi = (\varphi(t), T)$ ще означаваме елемент от пространството $PC[R, R^n] \times B$ и за всяка редица от реални числа $\{s_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ с $\theta_{s_n} \phi$ означаваме $\{\varphi(t + s_n), T - s_n\} \subset PC[R, R^n] \times B$, където

$$T - s_n = \{t_k - s_n, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots\}.$$

Дефиниция 1.3.10. Редицата $\{\phi_n\}$, $\phi_n = (\varphi_n(t), T_n) \in PC[R, R^n] \times B$ е *сходяща* към $\phi = (\varphi(t), T)$, $(\varphi(t), T) \in PC[R, R^n] \times B$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $n_0 > 0$ такова, че за $n \geq n_0$ следва, че неравенствата

$$\rho(T, T_n) < \varepsilon, \quad \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon,$$

където $\rho(T, T_n)$ е произволно разстояние в B , са изпълнени за всяко $t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T_n \cup T))$.

Дефиниция 1.3.11. Функцията $\varphi \in PC[R, R^n]$ се нарича *почти периодична* частично непрекъснатата функция с точки на прекъсване от първи род в множеството $\bar{T} \in B$, ако за всяка редица от реални числа $\{s'_m\}$ следва, че съществува подредица $\{s_n\}$, $s_n = s'_{m_n}$ такава, че $\theta_{s_n} \phi$ е равномерно сходяща в $PC[R, R^n] \times B$.

Разгледана е система от импулсни диференциални уравнения от вида (12), (13), където $\{t_k\} \in B$ при условие, че са изпълнени следните условия:

H1.3.1. Функцията $f(t, x)$ е почти периодична по t равномерно при $x \in \Omega$.

H1.3.2. Редицата $I_k(x)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно при $x \in \Omega$.

H1.3.3. $\{t_k\} \in UAPS$.

Тогава, ако $\{s'_m\}$ е произволна редица от реални числа, то съществува подредицата $\{s_n\}$, $s_n = s'_{m_n}$ такава, че редицата $\{f(t + s_n, x)\}$ е равномерно сходяща към функцията $\{f^s(t, x)\}$ и от Лема 1.2.18 следва, че множеството от редици $\{t_k - s_n\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е сходящо към редицата $\{t_k^s\}$ равномерно по отношение на $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ при $n \rightarrow \infty$.

По-нататък с $\{k_{n_i}\}$ е означена редицата от цели числа такива, че подредицата $\{t_{k_{n_i}}\}$ е равномерно сходяща по отношение на $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ при $i \rightarrow \infty$.

Тогава за всяка редица $\{s'_m\}$ системата (12), (13) се "премества" в

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{x} = f^s(t, x), & t \neq t_k^s, \\ \Delta x(t_k^s) = I_k^s(x(t_k^s)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

която е означена с $H(f, I_k, t_k)$.

В Трета глава е използван и следният клас от частично непрекъснати функции аналогични на функциите на Ляпунов и свързани със системите от вида (16).

Дефиниция 1.3.13. Ще казваме, че функцията $W : R \times \Omega \rightarrow R^+$ принадлежи на класа от функции W_0 , ако са изпълнени условията:

1. W е непрекъсната при $(t, x) \in R \times \Omega$, $t \neq t_k^s$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $W(t, 0) = 0$, $t \in R$.
2. Функцията W е локално Липшицова по отношение на втория си аргумент.
3. За всяко $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $x \in \Omega$ съществуват и са крайни границите

$$W(t_k^{s-}, x) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_k^s \\ t < t_k^s}} W(t, x) \quad \text{и} \quad W(t_k^{s+}, x) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_k^s \\ t > t_k^s}} W(t, x),$$

а също е валидно равенството $W(t_k^{s-}, x) = W(t_k^s, x)$.

Въведено е означението

$$D^+W(t, x(t)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\delta} [W(t + \delta, x(t) + \delta f^s(t, x(t))) - W(t, x(t))],$$

където $x \in PC[R, \Omega]$.

Втора глава е посветена на основните резултати за съществуване и единственост на почти периодични частично непрекъснати решения на системи импулсни диференциални уравнения. Главата се състои от 8 параграфа, в които са разгледани основни видове импулсни диференциални уравнения и с помощта на оценки на функцията на Грийн, оценки на матрицата на Коши, отделяне на решенията и други методи са получени достатъчни условия за съществуване, както и са изследвани някои от основните свойства на почти периодичните решения.

Параграф 2.1. разглежда въпроси свързани със съществуване и единственост на почти периодични решения на хиперболични системи импулсни диференциални уравнения.

Разгледани са следните системи импулсни диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{z} = A(t)z + f(t), & t \neq t_k, \\ \Delta z(t_k) = b_k, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

и

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{z} = A(t)z + F(t, z), & t \neq t_k, \\ \Delta z(t_k) = I_k(z(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $A: R \rightarrow R^{n \times n}$, $f: R \rightarrow R^n$, $b_k \in R^n$, $F: R \times \Omega \rightarrow R^n$, $I_k: \Omega \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

С $z(t) = z(t; t_0, z_0)$ е означено решението на съответната на (17) и (18) хомогенна система $\dot{z} = A(t)z$ и е дадена следната дефиниция.

Дефиниция 2.1.1. [98] Хомогенната система $\dot{z} = A(t)z$ се нарича *хиперболична*, ако съществуват константи $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ и за всяко $t \in R$ съществуват линейни пространства $M^+(t)$ и $M^-(t)$, директната външна сума на които е $M^+(t) \oplus M^-(t) = R^n$ такива, че ако $z_0 \in M^+(t)$ и $t \geq t_0$ е изпълнено неравенството

$$\|z(t; t_0, z_0)\| \leq \alpha \|z_0\| e^{-\lambda(t-t_0)},$$

докато при $z_0 \in M^-(t)$ и $t \leq t_0$ е изпълнено неравенството

$$\|z(t; t_0, z_0)\| \leq \alpha \|z_0\| e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Въведени са следните условия:

H2.1.1. Матричната функция $A \in C[R, R^{n \times n}]$ е почти периодична в смисъл на Бор.

H2.1.2. Функцията $f \in C[R, R^n]$ е почти периодична.

H2.1.3. Редицата $\{b_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

H2.1.4. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k \end{smallmatrix} \right\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

H2.1.5. $F \in C[R \times \Omega, R^n]$ е почти периодична по отношение на t равномерно по отношение на $z \in \Omega$.

H2.1.6. Редицата от функции $\{I_k\}$, $I_k \in C[\Omega, R^n]$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична по отношение на k равномерно по отношение на $z \in \Omega$.

С помощта на Лема 2.1.2 и Лема 2.1.3 са доказани следните основни теореми.

Теорема 2.1.4. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н2.1.1-Н2.1.4.
2. Системата $\dot{z} = Az$ е хиперболична.

Тогава за система (17) съществува единствено почти периодично решение, което е експоненциално устойчиво.

Теорема 2.1.5. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н2.1.1 и Н2.1.4-Н2.1.6.
2. Системата $\dot{z} = A(t)z$ е хиперболична.

3. Функциите $F(t, z)$ и $I_k(z)$ са Липшицови с константа $L > 0$ по отношение на променливата $z \in B_h$ или

$$\|F(t, z_1) - F(t, z_2)\| + \|I_k(z_1) - I_k(z_2)\| \leq L\|z_1 - z_2\|, \quad z_1, z_2 \in B_h,$$

и са ограничени, т.е. съществува константа $H_1 > 0$ такава, че

$$\max \left(\sup_{t \in R, z \in B_h} \|F(t, z)\| + \sup_{k=\pm 1, \pm 2, \dots, z \in B_h} \|I_k(z)\| \right) = L_1 < \infty.$$

4. Изпълнени са неравенствата

$$L_1 \frac{\bar{a}}{\lambda} + L_1 \frac{2\bar{a}N}{1 - e^{-\lambda}} < h,$$

$$L \frac{\bar{a}}{\lambda} + L \frac{2\bar{a}N}{1 - e^{-\lambda}} < 1.$$

Тогава съществува единствено почти периодично решение на система (18).

В параграф 2.2 са приведени основните резултати получени при изследванията за съществуване на почти периодични решения, за системи интегро-диференциални уравнения от вида

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, s)x(s)ds + f(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = B_k x(t_k), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $A \in PC[R, R^{n \times n}]$, $K \in PC[R^2, R^{n \times n}]$, $f \in PC[R, R^n]$,

$$B_k \in R^{n \times n}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Разгледани са и слабо нелинейната система интегро-диференциални уравнения от вида

$$(20) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t,s)x(s)ds + F(t, x(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = B_k x(t_k), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $F(t, x) \in PC[R \times R^n, R^n]$, както и

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} = A(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, v)R(v, s)dv, & s \neq t_k, \quad t \neq t_k, \\ R(t_k^+, s) = (E + B_k)R(t_k, s), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ R(s, s) = E, \end{cases}$$

където $R(t, s)$ е $n \times n$ матрична функция, а E е единичната $n \times n$ матрица.

Въведени са следните условия:

H2.2.1. Съществува $n \times n$ матрична функция $R(t, s)$, която удовлетворява (21).

H2.2.2. $\det(E + B_k) \neq 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

H2.2.3. $\mu[A(t) - R(t, t)] \leq -\alpha$, $\alpha > 0$, $\mu[\cdot]$ означава логаритмична норма.

H2.2.4. $A(t)$ е почти периодична $n \times n$ матрична функция.

H2.2.5. Редицата $\{B_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

H2.2.6. Множеството от редици $\{t_k^j\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

H2.2.7. Матрицата $K(t, s)$ е почти периодична по диагонал, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$, множеството $T(K, \varepsilon)$, което е съставено от ε -почти периоди на $K(t, s)$, такива, че е изпълнено неравенството

$$\|K(t + \tau, s + \tau) - K(t, s)\| \leq \varepsilon e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)},$$

където $t > s$, $\tau \in T(K, \varepsilon)$ е относително плътно в R .

H2.2.8. $f(t)$, $f \in PC[R, R^n]$ е почти периодична.

H2.2.9. $F(t, x)$ е почти периодична по отношение на t равномерно по отношение на $x \in \Omega$.

С помощта на Лема 2.2.2, Лема 2.2.4 и Лема 2.2.5 са доказани следните основни теореми.

Теорема 2.2.6. Нека са изпълнени условията H2.2.1-H2.2.8.

Тогава за система (19) съществува единствено почти периодично решение $\varphi(t)$ такова, че

$$\|\varphi(t)\| \leq \frac{2K_1}{\alpha} \max_{s < t} \|f(s)\| ,$$

което е експоненциално устойчиво.

Теорема 2.2.7. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията H2.2.1-H2.2.7 и условието H2.2.9.
2. Функцията $F(t, x)$ е Липшицова с константа $L > 0$ по отношение на променливата $x \in B_h$, т.е.

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in B_h$$

и е равномерно ограничена, т.е. съществува константа $G > 0$ такава, че

$$\|F(t, x)\| < G, \quad \|x\| < h.$$

3. Изпълнени са неравенствата

$$\frac{K_1}{\alpha} < h, \quad \frac{K_1 G}{\alpha} < 1.$$

Тогава за система (20) съществува единствено почти периодично експоненциално устойчиво решение.

Параграф 2.3 е посветен на условията за съществуване на почти периодични решения на системи силно смутени импулсни диференциални уравнения при наличие на колонна доминанта

Разгледана е системата

$$(22) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + g(t) + \mu X(t, x, \mu), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = B_k x(t_k) + g_k + \mu X_k(x(t_k), \mu), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in \mathbb{R}$, $\{t_k\} \in B$, $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mu \in M \subset \mathbb{R}$, $X: \mathbb{R} \times \Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g_k \in \mathbb{R}^n$, $X_k: \Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Разгледана е и генериращата система

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + g(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = B_k x(t_k) + g_k, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Дадена е следната дефиниция.

Дефиниция 2.3.2. [83] Ще казваме, че матрицата $A(t)$ е с *колонна доминанта* с параметър $\alpha > 0$ в интервала $[a, b]$, ако

$$a_{ii}(t) + \sum_{j \neq i} |a_{ij}(t)| \leq -\alpha < 0,$$

за всяко $i, j = 1, 2, \dots, n$ и $t \in [a, b]$.

Въведени са следните условия:

H2.3.1. $A \in C[R, R^{n \times n}]$ е почти периодична в смисъл на Бор.

H2.3.2. Редицата $\{B_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

H2.3.3. $\det(E + B_k) \neq 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

H2.3.4. $g \in PC[R, R^n]$ е почти периодична.

H2.3.5. Редицата $\{g_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

H2.3.6. Функцията $X \in C[R \times \Omega \times M, R^n]$ е почти периодична по t равномерно по отношение на $(x, \mu) \in \Omega \times M$ и удовлетворява условието на Липшиц с константа $l_1 > 0$ при $x, y \in B_h$ или

$$\|X(t, x, \mu) - X(t, y, \mu)\| \leq l_1 \|x - y\|,$$

за всяко $t \in R$, $\mu \in M$.

H2.3.7. Редицата от функции $\{X_k(x, \mu)\}$, $X_k \in C[\Omega \times M, R^n]$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по $(x, \mu) \in \Omega \times M$ и удовлетворява условието на Липшиц с константа $l_2 > 0$ по отношение на променливата $x \in B_h$ или

$$\|X_k(x, \mu) - X_k(y, \mu)\| \leq l_2 \|x - y\|,$$

за всяко $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $\mu \in M$.

H2.3.8. Множеството от редици $\{t_k^j\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

За доказателството на основните резултати са използвани Лема 2.3.3, Лема 2.3.4 и Лема 2.3.5. Тогава е доказана следната основна теорема:

Теорема 2.3.6. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията H2.3.1- H2.3.8.
2. Съществува положителна константа L_1 такава, че

$$\max \left(\sup_{\substack{t \in R \\ (x, \mu) \in \Omega \times M}} \|X(t, x, \mu)\| + \sup_{\substack{k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ (x, \mu) \in \Omega \times M}} \|X_k(x, \mu)\| \right) \leq L_1.$$

3. За генериращата система (23) съществува единствено почти периодично решение.

Тогава съществува положителна константа μ_0 , $\mu_0 \in M$ такава, че :

1. За всяко $|\mu| < \mu_0$ и $x \in B_C$, $C < C_1$, където C_1 е от Лема 2.3.4 съществува единствено почти периодично решение на (22).

2. Съществува положителна константа L такава, че :

$$\|x(t, \mu_1) - x(t, \mu_2)\| \leq L|\mu_1 - \mu_2|, \quad t \in R, \quad |\mu_i| < \mu_0, \quad i = 1, 2.$$

3. При $|\mu| \rightarrow 0$, $x(t, \mu)$ клони към единственото почти периодично решение на (23).

4. Решението $x(t, \mu)$ е експоненциално устойчиво.

Доказаната теорема и Лема 2.3.7 са използвани за изследвания на система импулсни диференциални уравнения от Лиенардов тип (Пример 2.3.8), за които са приложени получените резултати при наличие на колонна доминанта (неравенства 2.3.8). Получените резултати са оформени в Теорема 2.3.9.

В тази част са разгледани и по общите системи (2.3.9) и (2.3.10), за които при наличие и на условията H2.3.9-H2.3.10 е доказана Теорема 2.3.10, която гарантира съществуването на почти периодични експоненциално устойчиви решения за посочените системи.

Праграф 2.4. е свързан с почти периодични решения на системи импулсни диференциални уравнения и смущения на линейната част

Разглеждани са системите импулсни диференциални уравнения

$$(24) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = A_k(x(t_k)) + l_k, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $A: R \rightarrow R^{n \times n}$, $f: R \rightarrow R^n$, $A_k \in R^{n \times n}$, $l_k \in R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$,

системите импулсни диференциални уравнения със смущения в линейната част от вида

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{x} = (A(t) + B(t))x + f(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = (A_k + B_k)x(t_k) + l_k, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

и

$$(26) \quad \begin{cases} \dot{x} = (A(t) + B(t))x + F(t, x), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = (A_k + B_k)x(t_k) + I_k(x(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $B: R \rightarrow R^{n \times n}$, $F: R \times \Omega \rightarrow R^n$, $B_k \in R^{n \times n}$, $I_k: \Omega \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Въведени са следните условия:

H2.4.1. Матричната функция $A \in C[R, R^{n \times n}]$ е почти периодична в смисъл на Бор.

H2.4.2. $\det(E + A_k) \neq 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и редицата $\{A_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

H2.4.3. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k^j \end{smallmatrix} \right\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

H2.4.4. Функцията $f \in PC[R, R^n]$ е почти периодична.

H2.4.5. Редицата $\{I_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

H2.4.6. $B \in C[R, R^{n \times n}]$ е почти периодична в смисъл на Бор.

H2.4.7. Редицата $\{B_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

В Леми 2.4.1-2.4.7 са дадени основните резултати необходими за доказателството на следните теореми:

Теорема 2.4.7. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията H2.4.1- H2.4.7.
2. За система (24) съществува единствено почти периодично решение.

Тогава съществува константа $d_0 > 0$ такава, че за $d \in (0, d_0)$

система (25) притежава единствено почти периодично решение $\varphi(t)$, за което

$$\|\varphi(t)\| \leq C \max \left(\sup_{t \in R} \|f(t)\| + \sup_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} \|I_k\| \right), \quad C > 0.$$

Теорема 2.4.8. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията H2.4.1- H2.4.7.
2. За система (24) съществува единствено почти периодично решение.

Тогава съществува константа $D_0 > 0$ такава, че

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(\sigma)\| d\sigma + \sum_{t_0 < t_k} \|B_k\| < D_0,$$

и за всяко $D \in (0, D_0)$ система (25) притежава единствено почти периодично решение $\varphi(t)$, за което

$$\|\varphi(t)\| \leq C \max \left(\sup_{t \in R} \|f(t)\| + \sup_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} \|I_k\| \right), \quad C > 0.$$

По-нататък в този параграф са въведени на следните условия:

H2.4.8. Функцията $F \in C[R \times \Omega, R^n]$ е почти периодична по t равномерно по отношение на $x \in \Omega$ и удовлетворява условието на Липшиц с константа $L > 0$ или при $x, y \in B_h$

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

за всяко $t \in R$.

H2.4.9. Редицата от функции $\{I_k(x)\}$, $I_k \in C[\Omega, R^n]$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по $x \in \Omega$ и удовлетворява условието на Липшиц с константа $L > 0$ или при $x, y \in B_h$

$$\|I_k(x) - I_k(y)\| \leq L\|x - y\|,$$

за всяко $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Доказана е подобна теорема (Теорема 2.4.11) и за система (26).

Параграф 2.5. е посветен на почти периодичните решения за силно устойчиви системи импулсни диференциални уравнения и са изследвани връзките между условията за съществуване на почти периодични решения и силната устойчивост на импулсните уравнения. Използвани са частично непрекъснати функции, които са аналози на функциите на Ляпунов.

Разгледана е следната система импулсни диференциални уравнения

$$(27) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $f : R \times \Omega \rightarrow R^n$, $I_k : \Omega \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Използвани са означенията:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in R^n,$$

$$B_h(a) = \{x \in R^n, \|x - a\| < h\} \quad h > 0, \quad a \in R^n,$$

$$\Psi_h = \{(t, x) \in R \times B_h, \quad x \in B_h, \quad \text{при } (t, x) \in G \text{ и } x + I_k(x) \in B_h, \quad \text{при } t = t_k\},$$

където множеството G е дефинирано в параграф 1.1.

Въведени са следните условия и дефиниции:

H2.5.1. Функцията $f \in C[R \times B_h, R^n]$ и притежава непрекъснати частни производни по всички компоненти на променливата $x \in B_h$.

H2.5.2. Функциите $I_k \in C[B_h, R^n]$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и притежават непрекъснати частни производни по всички компоненти на променливата $x \in B_h$.

H2.5.3. Съществува число h_0 , $0 < h_0 < h$ такова, че ако $x \in B_{h_0}$, то $x + I_k(x) \in B_h$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

H2.5.4. Функциите $L_k(x) = x + I_k(x)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ са такива, че $L_k^{-1}(x) \in B_h$ при $x \in B_h$.

H2.5.5. $f(t, 0) = 0$, $I_k(0) = 0$ при $t \in R$ и $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

H2.5.6. Функцията $f(t, x)$ е почти периодична по t равномерно по отношение на x , $x \in B_h$.

H2.5.7. Редицата от функции $\{I_k(x)\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по отношение на x , $x \in B_h$.

H2.5.8. Множеството от редици $\{t_k^j\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

Дефиниция 2.5.1. [118] Нулевото решение $x(t) \equiv 0$ на система (27) се нарича *силно устойчиво*, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t_0 \in R)(\forall x_0 \in B_h : (t_0, x_0) \in \Psi_\delta)(\forall t \in R) : \rho(\bar{x}(t; t_0, x_0), 0) < \varepsilon.$$

Дефиниция 2.5.2. [116] Произволно решение $\bar{x}(t) = \bar{x}(t; t_0, x_0)$ на система (27) се нарича *силно устойчиво*, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \eta > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \tau_1 \in R \vee \forall \tau_2 \in R : \rho(x(\tau_1), x(\tau_2)) < \delta)(\forall t \in R) : \rho(\bar{x}(t + \tau_1), \bar{x}(t + \tau_2)) < \varepsilon.$$

По-нататък ще използваме множеството V_0 от частично непрекъснати функции аналогични на функциите на Ляпунов, което е дефинирано в параграф 1.1.

Дефиниция 2.5.3. Ще казваме, че функцията $V \in V_0$ *принадлежи на класа V_0^** , ако V е непрекъснато диференцируема във всяко от множествата G_k .

За всяка функция $V \in V_0^*$ дефинираме функцията

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x),$$

при $(t, x) \in G$. Ако $\bar{x}(t)$ е решение на (27), то

$$\frac{d}{dt} V(t, \bar{x}(t)) = \dot{V}(t, \bar{x}(t)), \quad t \in R, \quad t \neq t_k.$$

Дефиниция 2.5.4. Ще казваме, че функцията $V \in V_0$ принадлежи на класа V_0^{**} , ако V притежава непрекъснати частни производни от втори ред във всяко от множествата G_k .

Дефиниция 2.5.5. [135] Множеството S , $S \subset R$ ще наричаме

(а) $\Delta - m$ множество, ако от всеки $m+1$ реални числа $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m+1}$ можем да намерим индекси $i \neq j$ такава, че $\tau_i - \tau_j \in S$;

(б) симетрично $\Delta - m$ множество, ако S $\Delta - m$ множество симетрично по отношение на числото 0.

С помощта на Лема 2.5.6 е доказана следната основна теорема в този параграф

Теорема 2.5.7. Нека са изпълнени условията H2.5.1-H2.5.9. Тогава всяко силно устойчиво ограничено решение на (27) е почти периодично.

Разгледана е системата

$$(28) \quad \begin{cases} \dot{z} = g(t, z), & t \neq t_k, \\ \Delta z(t_k) = J_k(z(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $g(t, z) = f(t, z + \bar{x}(t)) - f(t, \bar{x}(t))$, $J_k(z) = I_k(z + \bar{x}(t)) - I_k(\bar{x}(t))$.

В доказателството на следващите теореми, свързани с почти периодичността на решенията на системите от вида (27) и (28) (Теореми 2.5.8, 2.5.13 и 2.5.15) са използвани дефинираните функции на Ляпунов и доказаните преди тях лемми.

В Параграф 2.6. е разгледана връзката между съществуване на дихотомии и съществуване на почти периодични решения на системи импулсни диференциални уравнения

Разгледана е линейна система импулсни диференциални уравнения

$$(29) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x, & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = B_k x(t_k), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $A: R \rightarrow R^{n \times n}$, $B_k \in R^{n \times n}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и нека

$x(t) = x(t; t_0, x_0)$ е решението на (29), което удовлетворява началното условие $x(t_0^+) = x_0$.

Въведени са следните условия:

H2.6.1. Матричната функция $A \in PC[R, R^{n \times n}]$ е почти периодична.

H2.6.2. Редицата $\{B_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

H2.6.3. $\det(E + B_k) \neq 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

H2.6.4. Множеството от редици $\{t_k^j\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

С $W(t, s)$ е означена матрицата на Коши за система (29). От условията H2.6.1-H2.6.4 следва че едно нетривиалното решение на тази система се задава с формулата $x(t; t_0, x_0) = W(t, s)x_0$. Лесно може да се провери валидността на релациите $W(t, t) = E$ и $W(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$, където $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ е някое нетривиалното решение на (29).

Използвани са следните дефиниции:

Дефиниция 2.6.1. Ще казваме, че линейната система (29) притежава експоненциална дихотомия в R , ако съществува проектор P и положителни константи K, L, α, β такава, че

$$(30) \quad \begin{aligned} \|X(t)PX^{-1}(s)\| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|X(t)(E-P)X^{-1}(s)\| &\leq Le^{-\beta(t-s)}, \quad s \geq t. \end{aligned}$$

Дефиниция 2.6.3. Функциите $f \in PC[R, \Omega]$, $g \in PC[R, \Omega]$ ще наричаме ε -еквивалентни и този факт ще означаваме $f \sim^\varepsilon g$, ако са изпълнени следните условия:

(а) Точките на възможна дихотомия на тези функции, които преномерираме с означенията t_k^f , t_k^g , допускащи краен брой повторения в R са такива, че $|t_k^f - t_k^g| < \varepsilon$.

(б) съществува строго растяща редица от числа $\{t'_k\}$, $\{t''_k\}$, $t'_k < t'_{k+1}$, $t''_k < t''_{k+1}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, за които е изпълнено

$$\sup_{t \in (t'_k, t'_{k+1}), \quad t'' \in (t''_k, t''_{k+1})} \|f(t) - g(t)\| < \varepsilon, \quad |t'_k - t''_k| > \varepsilon, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

С $\rho(f, g) = \inf \varepsilon$ е означено разстоянието между функциите $f \in PC[R, \Omega]$ и $g \in PC[R, \Omega]$, а с PC_φ е означено множеството от всички функции $f \in PC[R, \Omega]$, за които $\rho(f, \varphi)$, $\varphi \in PC[R, \Omega]$ е крайно число. Лесно може да се провери, че PC_φ е метрично пространство.

Дефиниция 2.6.4. [170] Функцията $\varphi \in PC[R, \Omega]$ се нарича *почти периодична*, ако за всяко $\varepsilon > 0$ множеството

$$T = \{\tau : \rho(\varphi(t + \tau), \varphi(t)) < \varepsilon, \quad t \in R, \tau \in R\}$$

е относително плътно в R .

По-нататък с $D = \{M_i\}$, $i \in I$ е означена фамилията от изброими множества от реални числа, неограничени отгоре и отдолу, без крайни точки на съгъстяване, където I е изброимо индексно множество. Нека M_1 и M_2 са подмножества в D .

Дефиниция 2.6.6. Множествата M_1 и M_2 се наричат ε -еквивалентни, ако техните елементи могат да се преномерират с целите числа m_k^1 и m_k^2 , които допускат краен брой повторения при подреждането им в R и са такива, че

$$\sup_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} |m_k^1 - m_k^2| < \varepsilon.$$

Дефиниция 2.6.7. Числото $\rho_D(M_1, M_2) = \inf_{M_1 \sim M_2} \{\varepsilon > 0\}$ се нарича *разстояние*

в D .

С помощта на Лема 2.6.8, скаларни системи импулсни диференциални уравнения и системи получени чрез транслиране на система (29) са доказани следните теореми.

Теорема 2.6.9. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условия H2.6.1 - H2.6.4.
2. Фундаменталната матрица $X(t)$, $X \in PC[R, R^{n \times n}]$ е почти периодична.

Тогава $X^{-1}(t)$ е почти периодична матрична функция.

Теорема 2.6.10. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условия H2.6.1 - H2.6.4.
2. За фундаменталната матрица $X(t)$, $X \in PC[R, R^{n \times n}]$ са изпълнени

неравенствата (30).

Тогава за фундаменталната матрица $X^s(t)$, $X^s \in PC[R, R^{n \times n}]$ на транслираната система са изпълнени неравенствата (30).

Теорема 2.6.11. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условия Н2.6.1 - Н2.6.4.
2. За системата (29) съществува експоненциална дихотомия с ермитов проектор P и фундаментална матрица $X(t)$.

Тогава проекторната функция $P(t) = X(t)X^{-1}(t)$ е почти периодична.

Параграф 2.7 е посветен на съществуването на отделими решения и условия за съществуване на почти периодичност за системи импулсни диференциални уравнения с променливи импулсни смущения за следната система импулсни диференциални уравнения

$$(31) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $f: R \times \Omega \rightarrow R^n$, $\Delta x = x(t^+) - x(t)$, $I_k: \Omega \rightarrow R^n$, $\tau_k: \Omega \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Въведени са следните условия:

Н2.7.1. Функцията $f \in C^1[R \times \Omega, R^n]$.

Н2.7.2. Функциите $I_k \in C^1[\Omega, R^n]$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Н2.7.3. Ако $x \in \Omega$, то $x + I_k(x) \in \Omega$ и функциите $L_k(x) = x + I_k(x)$ са такива, че $L_k^{-1}(x) \in \Omega$ при $x \in \Omega$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Н2.7.4. Функциите $\tau_k \in C^1[\Omega, R^n]$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} \tau_k(x) = \pm \infty$, равномерно при $x \in \Omega$.

Н2.7.5. Изпълнени са неравенствата

$$\sup \left\{ \|f(t, x)\|, (t, x) \in R \times \Omega \right\} \leq A < \infty,$$

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \right\|, x \in \Omega, k = \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \leq B < \infty, \quad AB < 1,$$

$$\sup \left\{ \rho \left(\frac{\partial \tau_k}{\partial x} (x + s I_k(x)), I_k(x) \right), \quad s \in [0,1], \quad x \in \Omega, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \leq 0.$$

H2.7.6. Функцията $f(t, x)$ е почти периодична по t равномерно по отношение на $x \in \Omega$.

H2.7.7. Редиците от функции $\{I_k(x)\}$ и $\{\tau_k(x)\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ са почти периодични равномерно по отношение на $x \in \Omega$.

H2.7.8. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k^j \end{smallmatrix} \right\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

Нека са изпълнени условията H2.7.1-H2.7.8 и нека $\{s_n\}$ е произволна редица от реални числа такива, че с процеса описан в Първа глава система (31) се премества в система

$$(32) \quad \begin{cases} \dot{x} = f^s(t, x), & t \neq \tau_k^s(x), \\ \Delta x = I_k^s(x), & t = \tau_k^s(x), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

и аналогично в този случай множеството образувано от системи във вида (32) е означено с $H(f, I_k, \tau_k)$.

За яснота са въведени следните операторни означения. Ако $\{\alpha_n\}$ е подредица на редицата $\{\alpha'_n\}$, то ще записваме $\alpha \subset \alpha'$, а с $\alpha + \beta$ ще означаваме стандартната сума $\{\alpha_n + \beta_n\}$ на редиците $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$.

С $\alpha > 0$ е отбелязан случай, когато $\alpha_n > 0$ за $n = 0, 1, 2, \dots$ и ще казваме, че редиците $\alpha \subset \alpha'$ и $\beta \subset \beta'$ имат общо преместване, ако $\alpha = \{\alpha'_{n_k}\}$ и $\beta = \{\beta'_{n_k}\}$. С

$S_{\alpha+\beta}\phi$ и $S_\alpha S_\beta \phi$ са означени границите $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{\alpha_n + \beta_n} \phi$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{\alpha_n} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{\beta_n} \phi \right)$, където числото θ_{α_n} е дефинирано в Първа глава, а $\phi = (\phi(t), T_j)$, $\phi \in PC[R, \Omega] \times UAPS$.

Доказана е следната лема.

Лема 2.7.1. Функцията $\phi(t)$ е почти периодична тогава и само тогава, когато за всяка двойка от редици α' и β' можем да извлечем общи подредици $\alpha \subset \alpha'$ и $\beta \subset \beta'$ такива, че границите

$$S_{\alpha+\beta}\phi = S_\alpha S_\beta \phi$$

съществуват точково.

Използвани са дефинициите:

Дефиниция 2.7.2. Ще казваме, че функцията $\phi(t)$, $\phi \in PC[R, \Omega]$ удовлетворява условието SG , ако за дадена редица γ' , $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma' = \infty$, съществуват $\gamma \subset \gamma'$ и число $d(\gamma) > 0$ такива, че границата $S_\gamma \phi$, $\phi = (\phi(t), T)$, $T \in UAPS$ съществува точно за всяко $\varepsilon > 0$. Ако α е редица с $\alpha > 0$, а $\beta' \subset \gamma$ и $\beta'' \subset \gamma$ са такива, че $S_{\alpha+\beta'} \phi = (r_1(t), P_1)$, $S_{\alpha+\beta''} \phi = (r_2(t), P_2)$ тогава или $r_1(t) = r_2(t)$, или $\|r_1(t) - r_2(t)\| > d(\gamma)$ при $t \in R \setminus F_\varepsilon(s(P_1 \cup P_2))$.

Дефиниция 2.7.3. Нека $K \subset \Omega$ е компактно множество. Ще казваме, че решението $x(t)$ на системата (31), с точки на прекъсване от множеството T е *отделимо* в K , ако за някое друго решение $y(t)$ на (31) в Ω с точки на прекъсване в T , съществува число $d(y(t))$ такова, че $\|x(t) - y(t)\| > d(y(t))$ при $t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T))$. Числото $d(y(t))$ ще наричаме *отделяща константа*.

Доказана е и следната теорема.

Теорема 2.7.4. Функцията $\phi(t)$ е почти периодична, ако $\phi(t)$ удовлетворява условието SG .

Нека $K \subset \Omega$ е компактно множество. Разглеждана е и следната система импулсни диференциални уравнения

$$(33) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(t, x), & t \neq \sigma_k(x), \\ \Delta x = G_k(x), & t = \sigma_k(x), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $(g, G_k, \sigma_k) \in H(f, I_k, \tau_k)$.

Тогава са доказани и следните теореми:

Теорема 2.7.5. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н2.7.1 - Н2.7.8.
2. Всяко решение на система (33) в K е отделимо.

Тогава всяка система от множеството $H(f, I_k, \tau_k)$ притежава единствено краен брой решения и отделящата константа d е независима от решенията.

Теорема 2.7.6. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н2.7.1 - Н2.7.8.
2. За всяко решение на система от $H(f, I_k, \tau_k)$ съществуват единствено

отделими решения в K .

Тогава:

1. Ако за някоя система от $H(f, I_k, \tau_k)$ съществува решение в K , то за всяка система от $H(f, I_k, \tau_k)$ съществува решение в K .

2. Всички решения в K са почти периодични и за всяка система от $H(f, I_k, \tau_k)$ съществува почти периодично решение в K .

Параграф 2.8. е свързан с почти периодични решения за системи импулсни диференциални уравнения в Банахови пространства, които са естествено обобщение на абстрактните диференциални уравнения. В много области на съвременната наука те са забележителна част от възможностите за математическо моделиране на редица процеси и явления, подложени на импулсни въздействия.

Нека $(X, \|\cdot\|_X)$ произволно абстрактно Банахово пространство.

Разглеждаме следното абстрактно импулсно диференциално уравнение

$$(34) \quad \dot{x} = Ax + F(t, x) + \sum_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} [Bx + H_k(x)] \delta(t - t_k),$$

където $A: D(A) \subset X \rightarrow X$, $B: D(B) \subset X \rightarrow X$ са ограничени линейни оператори, $F: D(R \times X) \rightarrow X$ е непрекъсната по отношение на $t \in R$ и по отношение на $x \in X$ функция, $H_k: D(H_k) \subset X \rightarrow X$ са непрекъснати импулсни оператори, $\delta(\cdot)$ е δ -функция на Дирак, $\{t_k\} \in B$.

Нека $PC[R, X] = \{\varphi: R \rightarrow X, \varphi \text{ е частично непрекъсната функция с точки на прекъсване в моментите } t_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ в които } \varphi(t_k^-), \varphi(t_k^+) \text{ съществуват и } \varphi(t_k^-) = \varphi(t_k^+)\}$.

По отношение на нормата $\|\varphi\|_{PC} = \sup_{t \in R} \|\varphi\|_X$, $PC[R, X]$ е Банахово пространство [34].

С $PCB[R, X]$ е означено подпространство на $PC[R, X]$, съставено от ограничени частично непрекъснати функции и заедно с уравнението (34) са разгледани и съответните линейни нехомогенни импулсни диференциални уравнения от вида

$$(35) \quad \dot{x} = Ax + f(t) + \sum_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} [Bx + b_k] \delta(t - t_k),$$

където $f \in PCB[R, X]$, $b_k: D(b_k) \subset X \rightarrow X$, и хомогенното импулсно уравнение

$$(36) \quad \dot{x} = Ax + \sum_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} Bx \delta(t - t_k).$$

Въведени са следните условия:

H2.8.1. Операторите A и B комутират и за оператора $I + B$ съществува логаритмичният оператор $Ln(I + B)$, където I идентитета в пространството X .

H2.8.2. Множеството от редици $\{t_k^j\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

Като следваме [34] с $\Phi(t, s)$ е означен еволюционния оператор на Коши за уравнението (36),

$$\Phi(t, s) = e^{\Lambda(t-s)}(I + B)^{-p(t-s)+i(s,t)},$$

където $\Lambda = A + pLn(I + B)$, $i(s, t)$ е броят на точките t_k в интервала (s, t) , а числото $p > 0$ е дефинирано в Лема 1.2.9.

Следващата дефиниция е въведена за почти периодични функции в Банахови пространства от вида $PC[R, X]$.

Дефиниция 2.8.2. Функцията $\varphi \in PC[R, X]$ се нарича *почти периодична*, ако:

(а) множеството от редици $\{t_k^j\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, $\{t_k\} \in B$ е равномерно почти периодично.

(б) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такова, че ако точките t' и t'' са от един и същи интервал на непрекъснатост на функцията $\varphi(t)$ и удовлетворяват неравенството $|t' - t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\|_X < \varepsilon$.

(в) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество $\bar{T}$ такова, че ако $\tau \in \bar{T}$, то $\|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)\|_X < \varepsilon$ за всяко $t \in R$, което удовлетворява условието $|t - t_k| > \varepsilon$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

По-нататък са въведени следните условия:

H2.8.3. Функцията $f(t)$ е почти периодична.

H2.3.4. Редицата $\{b_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

Като са използвани Лема 2.8.2 и 2.8.3 са доказани следните теореми.

Теорема 2.8.4. Нека са изпълнени следните условия

1. Изпълнени са условията H2.8.1-H2.8.4.

2. Спектърът $\sigma(\Lambda)$ на оператора Λ не притежава общи точки с имагинерната ос и лежи в лявата координатна полуравнина.

Тогава:

1. Съществува единствено почти периодично решение $x(t) \in PCB[R, X]$ на (35).
2. Почти периодичното решение $x(t)$ е асимптотически устойчиво.

Теорема 2.8.5. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията H2.8.1 - H2.8.4.
2. Спектърът $\sigma(\Lambda)$ на оператора Λ не притежава общи точки с имагинерната ос и лежи в лявата координатна полуравнина.
3. Функцията $F(t, x)$ е почти периодична по отношение на променливата $t \in R$, равномерно за $x \in \Omega$, редицата от функции $\{H_k(x)\}$ е почти периодична равномерно за $x \in \Omega$, където Ω е произволен компактен на X и

$$\|x\|_X < h, \quad h > 0.$$

4. Функциите $F(t, x)$ и $H_k(x)$ са локално Липшицови при $x \in \Omega$, равномерно за $t \in R$ и $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, т.е. съществува константа $L > 0$ такава, че

$$\|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L\|x - y\|_X, \quad \|H_k(x) - H_k(y)\|_X \leq L\|x - y\|_X.$$

5. Функциите $F(t, x)$ и $H_k(x)$ са ограничени при $x \in \Omega$ или

$$\max\{\|F(t, x)\|_X, \|H_k(x)\|_X\} \leq C, \quad C > 0.$$

Тогава, ако

$$\overline{KC} < h \text{ и } \overline{KL} < 1,$$

където $\overline{K} > 0$, то

1. Съществува единствено почти периодично решение $x(t) \in PCB[R, X]$ на (34).
2. Почти периодичното решение $x(t)$ е асимптотически устойчиво.

Разгледан е и случаят, когато в уравненията в (34)-(35) операторът A е инфинитезимален генератор на аналитична полугрупа $S(t)$ в Банаховото пространство X и за всяко $\alpha > 0$ е дефинирана дробната степен

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} S(t) dt,$$

на оператора A , където $\Gamma(\alpha)$ е означена гама функцията.

С помощта на Лема 2.8.6 и 2.8.7 и условията,

H2.8.5. Функцията $F(t, x)$ е почти периодична по отношение на променливата t равномерно за $x \in \Omega$, където Ω е произволен компактен на X_α и съществуват константи $L_1 > 0$, $0 < \kappa < 1$ и $0 < \alpha < 1$ така, че

$$\|F(t_1, x_1) - F(t_2, x_2)\|_X \leq L_1 \left(|t_1 - t_2|^\kappa + \|x_1 - x_2\|_\alpha \right),$$

където $(t_i, x_i) \in R \times \Omega$, $i = 1, 2$.

H2.8.6. Редицата от функции $\{H_k(x)\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно за $x \in \Omega$ и съществуват константи $L_2 > 0$ и $0 < \alpha < 1$ такива, че

$$\|H_k(x_1) - H_k(x_2)\|_X \leq L_2 \|x_1 - x_2\|_\alpha,$$

където $x_1, x_2 \in \Omega$,

е доказана следната теорема,

Теорема 2.8.8. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията H2.8.4-H2.8.6.
2. A е инфинитезимален генератор на аналитичната полугрупа $S(t)$.
3. Функциите $F(t, x)$ и $H_k(x)$ са ограничени или

$$\max \left\{ \|F(t, x)\|_{X_\alpha}, \|H_k(x)\|_\alpha \right\} \leq M,$$

където $t \in R$, $x \in \Omega$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $M > 0$.

Тогава, ако $L = \max(L_1, L_2)$ и L е достатъчно малко, то :

1. Съществува единствено почти периодично решение $x \in PCB[R, X]$ на (34).
2. Почти периодичното решение $x(t)$ е асимптотически устойчиво.

Трета глава е посветена на използването на директния метод на Ляпунов за изследване на съществуването на почти периодичните решения на системи импулсни диференциални уравнения и се състои от 5 параграфа.

В параграф 3.1 се разглежда въпроса за съществуване на почти периодични частично непрекъснати функции на Ляпунов, както и съществуването и единствеността на почти периодичните решения за системи импулсни диференциални уравнения. Възможностите за приложение на получените резултати са показани в разгледаните примери за съществуване на почти периодични решения на линейни и слабо нелинейни системи импулсни диференциални уравнения, както и при (h_0, h) -устойчиви системи импулсни диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие

Разглеждана е следната система импулсни диференциални уравнения

$$(37) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $f: R \times R^n \rightarrow R^n$, $I_k: R^n \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Въведени са следните условия:

НЗ.1.1. Функцията $f \in C[R \times R^n, R^n]$ и $f(t, 0) \equiv 0$, $t \in R$.

НЗ.1.2. Функцията f е Липшицово непрекъсната по отношение на втория си аргумент, равномерно по $t \in R$, т.е. съществува $L_1 > 0$ такава, че

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in R^n.$$

НЗ.1.3. Функциите $I_k \in C[R^n, R^n]$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $I_k(0) \equiv 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

НЗ.1.4. Функциите I_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ са Липшицово непрекъснати, равномерно при $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, т.е. съществува $L_2 > 0$ така, че

$$\|I_k(x_1) - I_k(x_2)\| \leq L_2 \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in R^n$$

НЗ.1.5. $E + I_k: \Omega \rightarrow \Omega$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, където E е идентитета в $R^{n \times n}$.

НЗ.1.6. Функцията $f(t, x)$ е почти периодична по t равномерно по отношение на $x \in R^n$.

НЗ.1.7. Редицата от функции $\{I_k(x)\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по $x \in R^n$.

НЗ.1.8. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k^j \end{smallmatrix} \right\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

Използвана е и следната дефиниция

Дефиниция 3.1.3. Нулевото решение $x(t) \equiv 0$ на система (37) се нарича *глобално перфектно равномерно-асимптотически устойчиво*, ако е равномерно устойчиво, числото β от Дефиниция 3.1.2 и числото T от подточка (б) на Дефиниция 3.1.1 не зависи от избора на точката $t_0 \in R$.

Доказана е и следната теорема.

Теорема 3.1.5. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията НЗ.1.1-НЗ.1.8.

2. Нулевото решение $x(t) \equiv 0$ на система (37) е глобално перфектно равномерно-асимптотически устойчиво.

Тогава съществува функция на Ляпунов V , дефинирана над $R \times R^n$, $V \in V_0$, която е почти периодична по променливата t , равномерно по отношение на $x \in R^n$ така, че

$$a(\|x\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|), \quad (t, x) \in R \times R^n,$$

където функциите $a, b \in K$ и $a(r) \rightarrow \infty$, $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ и

$$V(t^+, x) \leq V(t, x), \quad x \in R^n, \quad t = t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и

$$D^+V(t, x) \leq -cV(t, x),$$

при $(t, x) \in G$ и $c = \text{const} > 0$.

С последната теорема и Лема 3.1.6, 3.1.7 е доказана основната теорема в този параграф

Теорема 3.1.8. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н3.1.1-Н3.1.8.

2. Съществуват функции $V \in V_2$ и $a, b \in K$ такива, че

$$a(\|x - y\|) \leq V(t, x, y) \leq b(\|x - y\|), \quad (t, x, y) \in R \times B_\alpha \times B_\alpha,$$

$$V(t^+, x + I_k(x), y + I_k(y)) \leq V(t, x, y), \quad x, y \in B_\alpha, \quad t = t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$D^+V(t, x, y) \leq -cV(t, x, y), \quad t \neq t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad x, y \in B_\alpha,$$

където $\alpha > 0$, $c > 0$.

3. Съществува решение $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ на система (37) такова, че

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \alpha_1, \quad \text{където } t \geq t_0, \quad \alpha_1 < \alpha.$$

Тогава в B_α съществува единствено почти периодично решение $\omega(t)$ на система (37) такова, че:

(а) $\|\omega(t)\| \leq \alpha_1$;

(б) $\omega(t)$ е равномерно асимптотически устойчиво;

(в) $H(\omega, t_k) \subseteq H(f, I_k, t_k)$.

По-нататък са получени резултати за съществуване на почти периодични решения на слабо смутени импулсни диференциални уравнения, Теорема 3.1.10, 3.1.12, както и за (h_0, h) -устойчиви системи импулсни диференциални уравнения, Теорема 3.1.15, 3.1.16.

Параграф 3.2. е посветен на сравнителния метод и частично непрекъснатите аналози на функциите на Ляпунов при изследване на съществуването на почти периодични решения за системи импулсни интегро-диференциални уравнения от вида

$$(38) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_{t_0}^t K(t, s, x(s))ds\right), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $f : R \times \Omega \times R^n \rightarrow R^n$, $K : R \times R \times \Omega \rightarrow R^n$, $I_k : \Omega \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Въведени са следните условия:

НЗ.2.1. Функцията $f \in C[R \times \Omega \times R^n, R^n]$ и $f(t, 0, 0) \equiv 0$, $t \in R$.

НЗ.2.2. Функциите $I_k \in C[\Omega, R^n]$ и $I_k(0) \equiv 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

НЗ.2.3. $E + I_k : \Omega \rightarrow \Omega$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, където E е идентитета в $R^{n \times n}$.

НЗ.2.4. Функцията $K \in C[R \times R \times \Omega, R^n]$ и $K(t_0, 0, 0) \equiv 0$.

Използвана е следната

Дефиниция 3.2.1. Функцията $K \in C[R \times R \times \Omega, R^n]$ ще наричаме *интегро-почти периодична*, ако при $x \in PC[R, R^n]$ за всяка редица $\{s'_m\}$ от реални числа съществува подредица $\{s_i\}$ така, че редицата

$$\left\{ \int_{t_0}^{t+s_i} K(t+s_i, \xi, x(\xi))d\xi \right\}, \quad t_0 \in R$$

е равномерно сходяща при $i \rightarrow \infty$.

Въведени са и следните условия:

НЗ.2.5. Функцията $f(t, x, y)$ е почти периодична по t , равномерно по отношение на $x \in \Omega$, $y \in R^n$.

НЗ.2.6. Редицата от функции $\{I_k(x)\}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по $x \in \Omega$.

НЗ.2.7. Функцията $K(t, s, x)$ е интегро-почти периодична по t , равномерно по отношение на $s \in R$ и $x \in PC[R, \Omega]$.

НЗ.2.8. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k \end{smallmatrix} \right\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$ $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

В този параграф са използвани класовете V_1 , V_2 и W_0 , дефинирани в глава Първа.

В следващата теорема са получени условията за съществуване на почти периодични решения на системата (38).

Теорема 3.2.3. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Изпълнени са условията НЗ.2.1-НЗ.2.8.*

2. *Съществуват функции $V \in V_2$ и $a, b \in K$ такива, че*

$$(a) \quad V(t^+, x + I(x), y + I(y)) \leq V(t, x, y), \quad t = t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$a(\|x - y\|) \leq V(t, x, y) \leq b(\|x - y\|),$$

за $t \in R$, $x, y \in \Omega$;

(б) *за всяко $t > t_0$, $x \in PC[R, \Omega]$, $y \in PC[R, \Omega]$, за което*

$V(s, x(s), y(s)) \leq V(t, x(t), y(t))$, $s \in [t_0, t]$, $c > 0$ е изпълнено неравенството

$$D^+V(t, x(t), y(t)) \leq -cV(t, x(t), y(t)),$$

където $t \neq t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

3. *Съществува решение $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ на система (38) такова, че*

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \alpha_1, \quad \text{където } t \geq t_0, \quad \alpha_1 < \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Тогава в B_α съществува единствено почти периодично решение $\omega(t)$ на система (38) такова, че:

$$(a) \quad \|\omega(t)\| \leq \alpha_1;$$

(б) $\omega(t)$ е равномерно асимптотически устойчиво;

(в) $H(\omega, t_k) \subseteq H(f, K, I_k, t_k)$.

В Параграф 3.3 са използвани функции Ляпунов за изследване на съществуването на почти периодични решения за системи импулсни диференциални уравнения с променливо закъснение.

Нека $\varphi_0 \in PC[R, \Omega]$ и $\|\varphi_0\|_\infty = \sup_{t \in R} \|\varphi_0(t)\|$.

Разгледана е следната система импулсни диференциални уравнения с променливо закъснение и фиксирани моменти на импулсно въздействие

$$(39) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \eta(t))), & t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \\ x(t) = \varphi_0(t), & t \in (-\infty, t_0], \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & t_k \geq t_0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R, \quad t_0 \in R, \quad \{t_k\} \in B, \quad f: R \times \Omega \times \Omega \rightarrow R^n, \quad \eta: R \rightarrow R^+, \quad I_k: \Omega \rightarrow R^n,$

$k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Въведени са следните условия:

Н3.3.1. Функцията $f \in C[R \times \Omega \times \Omega, R^n]$ и $f(t, 0, 0) \equiv 0, \quad t \in R$.

Н3.3.2. Функцията $\eta \in C[R, R^+]$ и $t - \eta(t) \geq 0, \quad t \in R$.

Н3.3.3. Функциите $I_k \in C[\Omega, R^n]$ и $I_k(0) \equiv 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Н3.3.4. $E + I_k: \Omega \rightarrow \Omega, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$, където E е идентитет в $R^{n \times n}$.

Н3.3.5. Функцията $f(t, x, y)$ е почти периодична по t , равномерно по отношение на $x \in \Omega, \quad y \in \Omega$.

Н3.3.6. Функцията $\eta(t)$ е почти периодична в смисъл на Бор.

Н3.3.7. Редицата от функции $\{I_k(x)\}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по $x \in \Omega$.

Н3.3.8. Функцията $\varphi_0(t)$ е почти периодична в смисъл на Бор.

Н3.3.9. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k^j \end{smallmatrix} \right\} \quad t_k^j = t_{k+j} - t_k \quad k, j = \pm 1, \pm 2, \dots,$ е равномерно

почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

Дефиниция 3.3.1. [201] Нулевото решение $x(t) \equiv 0$ на система (39) се нарича:

(а) *равномерно устойчиво*, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \varphi_0 \in PC[R, \Omega]: |\varphi_0|_\infty < \delta)(\forall t_0 \in R)(\forall t \geq t_0) \\ \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon;$$

(б) *равномерно привличащо*, ако

$$(\exists \lambda > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists T > 0)(\forall t_0 \in R)(\forall \varphi_0 \in PC[R, R^n]: |\varphi_0|_\infty < \lambda) \\ (\forall t \geq t_0 + T): \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon;$$

(в) *равномерно асимптотически устойчиво*, ако е равномерно устойчиво и равномерно привличащо.

Използвани са отново класовете V_1 , V_2 и W_0 , дефинирани в Първа глава.

Въведен е и следния клас от функции

$$\Omega_1 = \{x, y \in PC[R, \Omega]: V(s, x(s), y(s)) \leq V(t, x(t), y(t)), \quad s \in (-\infty, t], \\ t \geq t_0, \quad V \in V_1\}.$$

С помощта на Леми 3.3.2, 3.3.3 са изследвани условията за съществуване на почти периодични решения на система (39) и е доказана следващата теорема.

Теорема 3.3.4. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Изпълнени са условията Н3.3.1-Н3.3.9.*

2. *Съществуват функции $V \in V_2$ и $a, b \in K$ такива, че са изпълнени неравенствата*

$$a(\|x - y\|) \leq V(t, x, y) \leq b(\|x - y\|), \quad (t, x, y) \in R \times \Omega \times \Omega,$$

$$V(t^+, x + I_k(x), y + I_k(y)) \leq V(t, x, y), \quad x, y \in \Omega, \quad t = t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и неравенството

$$D^+V(t, x(t), y(t)) \leq -cV(t, x(t), y(t)),$$

където $t \geq t_0$, $(x, y) \in \Omega_1$, е изпълнено при $t \neq t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $c > 0$.

3. *Съществува решение $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ на система (39) такова, че*

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \alpha_1, \quad \text{където } t \geq t_0, \quad \alpha_1 < \alpha.$$

Тогава в B_α , $\alpha > 0$ съществува единствено почти периодично решение $\omega(t)$ на система (39) такова, че:

$$(a) \quad \|\omega(t)\| \leq \alpha_1;$$

(б) $\omega(t)$ е равномерно асимптотически устойчиво;

(в) $H(\omega, t_k) \subseteq H(f, \eta, I_k, t_k)$.

За илюстрация на резултатите от Теорема 3.3.4 е разгледано следното импулсно уравнение

$$(40) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = r(t)u(t)\left(1 - u(t - \eta(t)K^{-1})\right), & t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = K\gamma_k(u(t_k)K^{-1} - 1), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $r, \eta \in C[R, R^+]$ и $0 \leq \eta(t) \leq \eta_0$, $\{t_k\} \in B$, $\gamma_k \in C[R, R]$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $K = \text{const} > 0$.

Импулсните уравнения от вида (40) се използват при моделиране на развитието и динамика на количеството на индивидите u в популация разглеждана в математическата екология, където $K > 0$ е капацитетът на околната среда, γ_k са функциите които характеризират степента на импулсен ефект върху средата в моментите t_k .

Нека $N(t) = u(t)K^{-1} - 1$ и от (40) получаваме

$$(41) \quad \begin{cases} \dot{N}(t) = -r(t)u(t)(1 + N(t))N(t - \eta(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta N(t_k) = \gamma_k(N(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

При стандартни начални условия $1 + N(0) > 0$, $1 + N(s) \geq 0$ при $s \in (-\infty, 0]$ е лесно да се провери, че решението на (41) удовлетворява неравенството $1 + N(t) > 0$, при $t \geq 0$ и е в сила следната теорема.

Теорема 3.3.6. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н3.3.6 и Н3.3.9.
2. Функцията $r(t)$ е почти периодична в смисъл на Бор и

$$\int_{t-\eta(t)}^t r(s)ds = \infty.$$

3. Редицата от функции $\{\gamma_k(t)\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по $t \in R$, и $\gamma_k(0) = 0$, $-1 < \gamma_k(t) \leq 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

4. Съществува ограничено решение на (41).

5. Неравенствата

$$N(t - \eta(t))(1 + N(t)) \geq N(t), \quad M(t - \eta(t))(1 + M(t)) \geq M(t), \quad t \neq t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

са изпълнени при $t \geq 0$ и $(M, N) \in \Omega_2$, където

$$\Omega_2 = \{(M, N) : N, M \in PC[R, R^+], \quad N^2(s) + M^2(s) \leq N^2(t) + M^2(t), \\ s \in (-\infty, t], \quad t \geq 0\}.$$

Тогава за уравнението (41) съществува единствено почти периодично решение.

Параграф 3.4. е посветен на почти периодичността и функциите на Ляпунов за системи импулсни функционално диференциални уравнения.

Нека $\varphi_0 \in PC[R, \Omega]$ и $\|\varphi_0\|_\infty = \sup_{t \in R} \|\varphi_0(t)\|$.

Разгледана е следната система импулсни функционално диференциални уравнения с безкрайно закъснение и фиксирани моменти на импулсно въздействие.

$$(42) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $t_0 \in R$, $\{t_k\} \in B$, $f : R \times PC[R, \Omega] \rightarrow R^n$, $I_k : \Omega \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$,

$x_t \in PC[R, R^n]$ е дефинирана с релацията $x_t = x(t+s)$, $-\infty < s \leq 0$.

Въведени са следните условия:

НЗ.4.1. Функцията $f \in C[R \times PC[R, \Omega], R^n]$ и $f(t, 0) \equiv 0$, $t \in R$.

НЗ.4.2. Функцията $f(t, \varphi)$ е Липшицова по втория си аргумент $\varphi \in PC[R, \Omega]$ равномерно при $t \in R$.

НЗ.4.3. Функциите $I_k \in C[\Omega, R^n]$ и $I_k(0) \equiv 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

НЗ.4.4. $E + I_k : \Omega \rightarrow \Omega$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, където E е идентитет в $R^{n \times n}$.

По нататък в този параграф е използвана следната лема.

Лема 3.4.1. [198] Нека са изпълнени условията НЗ.4.1-НЗ.4.4.

Тогава $J^+(t_0, \varphi_0) = [t_0, \infty)$

Въведени са следните условия за почти периодичност:

НЗ.4.5. Функцията $f(t, \varphi)$ е почти периодична по t равномерно по отношение на $\varphi \in PC[R, \Omega]$.

НЗ.4.6. Редицата от функции $\{I_k(x)\}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по отношение на $x \in \Omega$.

НЗ.4.7. Функцията $\varphi_0 \in PC[R, \Omega]$ е почти периодична.

НЗ.4.8. Множеството от редици $\{t_k^j\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

Използвани са класовете V_1 , V_2 и W_0 дефинирани в Първа глава и нека $V \in V_1$, $t > t_0$, $t \neq t_k$, $x \in PC[R, \Omega]$, $y \in PC[R, \Omega]$, като

$$D^+V(t, x(t), y(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\delta} [V(t + \delta, x(t) + \delta f(t, x_t), y(t) + \delta f(t, y_t)) - V(t, x(t), y(t))].$$

В следващата теорема са разгледани условията за съществуване на почти периодични решения на системата (42).

Теорема 3.4.2. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията НЗ.4.1-НЗ.4.8.

2. Съществуват функции $V \in V_2$ и $a, b \in K$ такива, че са изпълнени неравенствата

$$a(\|x - y\|) \leq V(t, x, y) \leq b(\|x - y\|), \quad (t, x, y) \in R \times \Omega \times \Omega,$$

$$V(t^+, x + I_k(x), y + I_k(y)) \leq V(t, x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t = t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и е изпълнено неравенството

$$D^+V(t, x(t), y(t)) \leq -cV(t, x(t), y(t)),$$

където $t > t_0$, $(x, y) \in \Omega_1$, $t \neq t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $c > 0$.

3. Съществува решение $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ на система (42) такова, че

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \alpha_1, \quad \text{където } t \geq t_0, \quad \alpha_1 < \alpha.$$

Тогава в B_α , $\alpha > 0$ съществува единствено почти периодично решение $\omega(t)$ на система (42) такова, че:

(а) $\|\omega(t)\| \leq \alpha_1$;

(б) $\omega(t)$ е равномерно асимптотически устойчиво;

(в) $H(\omega, t_k) \subseteq H(f, \varphi_0, I_k, t_k)$.

Параграф 3.5. е свързан с приложението на функциите на Ляпунов за изследване на съществуването на почти периодични решения за неопределени системи импулсни

диференциални уравнения. Изследванията са извършени с използването на равномерни положително дефинирани матрици, неравенства на Хамилтон-Якоби-Рикати и частично непрекъснати функции на Ляпунов.

Разгледана е следната система неопределени импулсни диференциални уравнения.

$$(43) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + g(t, x), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)) + J_k(x(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $f, g : R \times \Omega \rightarrow R^n$, $I_k, J_k : \Omega \rightarrow R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Функциите $g(t, x)$, $J_k(x)$ задават структурната неопределеност или неопределените смущения в система (43) и се характеризират по следния начин:

$$\begin{aligned} g \in U_g &= \{g : g(t, x) = e_g(t, x) \cdot \delta_g(t, x), \quad \|\delta_g(t, x)\| \leq \|m_g(t, x)\|\}; \\ J_k \in U_J &= \{J_k : J_k(x) = e_k(x) \cdot \delta_k(x), \quad \|\delta_k(x)\| \leq \|m_k(x)\|\}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

където $e_g : R \times \Omega \rightarrow R^{n \times m}$ и $e_k : \Omega \rightarrow R^{n \times m}$ са известни матрични функции достатъчно гладки в дефиниционната си област, докато δ_g и δ_k са неизвестни векторни функции, нормите на които са ограничени съответно от векторните функции $m_g(t, x)$, $m_k(x)$.

Въведени са следните условия:

Н3.5.1. Функциите $f(t, x)$ и $e_g(t, x)$ са почти периодични по t , равномерно по отношение на $x \in \Omega$.

Н3.5.2. Редиците от функции $\{I_k(x)\}$, $\{e_k(x)\}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ са почти периодични равномерно по $x \in \Omega$.

Н3.5.3. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k \end{smallmatrix} \right\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$ $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

Н3.5.4. Функциите $f(t, 0) = 0$, $\delta_g(t, 0) = 0$, $I_k(0) = 0$ и $\delta_k(0) = 0$ за всички $t \in R$ и $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Дефиниция 3.5.1. [47] Неопределената динамична импулсна система (43) се нарича *робустно равномерно устойчива*, (*робустно равномерно привличаща*, *робустно равномерно асимптотически устойчива*), ако за всяко $g \in U_g$ и $J_k \in U_J$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ следва, че нулевото решение $x(t) = 0$ на (43) е съответно

равномерно устойчиво, равномерно привличащо, равномерно асимптотически устойчиво.

Използвани са класовете V_1 , V_2 и W_0 дефинирани в Първа глава и нека $V \in V_1$, $t > t_0$, $t \neq t_k$, $x \in PC[R, \Omega]$, $y \in PC[R, \Omega]$.

За доказателството на основните резултати е използвана и следната номинална система на системата (43)

$$(44) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Използвана е и следната дефиниция.

Дефиниция 3.5.2. Матричната функция $X : R \rightarrow R^{n \times n}$ се нарича:

- (а) *положително дефинирана матрична функция*, ако за всяко $t \in R$, $X(t)$ е положително дефинирана матрица;
- (б) *положително дефинираната матрична функция ограничена отгоре*, ако е положително дефинирана матрична функция и съществува положително реално число $M > 0$ такава, че

$$\lambda_{\max}(X(t)) \leq M, \quad t \in R,$$

където $\lambda_{\max}(X(t))$ е максималната собствена стойност на матрицата $X(t)$.

- (в) *равномерно положително дефинирана матрична функция*, ако е положително дефинирана и съществува реално число $m > 0$ такава, че

$$\lambda_{\min}(X(t)) \geq m, \quad t \in R,$$

където $\lambda_{\min}(X(t))$ е минималната собствена стойност на матрицата $X(t)$.

С помощта на Лема 3.5.3, 3.5.4 е доказана следната теорема.

Теорема 3.5.5. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н3.5.1-Н3.5.4.
2. Съществуват функции $V \in V_2$ и $a, b \in K$ такива, че

$$a(\|x - y\|) \leq V(t, x, y) \leq b(\|x - y\|), \quad (t, x, y) \in R \times \Omega \times \Omega.$$

3. Съществуват положително дефинирани матрични функции

$$G_{1k} : R \times R^{n \times n} \rightarrow R^{1 \times m}, \quad G_{2k} : R \times R^{n \times n} \rightarrow R^{m \times m} \text{ и за } t \in R, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$x, y \in PC^1[R, \Omega]$, $z \in R^m$ следва

$$\begin{aligned} & V(t, x(t) + I_k(x(t)) + e_k(x(t))z, y(t) + I_k(y(t)) + e_k(y(t))z) \\ & \leq V(t, x(t) + I_k(x(t)), y(t) + I_k(y(t)) + G_{1k}(t, x(t), y(t))z) \end{aligned}$$

$$+ z^T G_{2k}(t, x(t), y(t)) \Big| z.$$

4. Съществуват положителни константи χ_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ такива, че

$$\begin{aligned} & V(t_k^+, x(t_k) + I_k(x(t_k)), y(t_k) + I_k(y(t_k))) \\ & \quad + \chi_k^{-1} G_{1k} G_{1k}^T + (\chi_k + \lambda_{\max}(G_{2k})) m_k^T m_k \\ & \leq V(t_k, x(t_k), y(t_k)), \end{aligned}$$

където $G_{1k} = G_{1k}(t_k, x(t_k), y(t_k))$, $G_{2k} = G_{2k}(t_k, x(t_k), y(t_k))$, $m_k(x(t_k)) = m_k$.

5. Съществува константа $c > 0$ и скалярни функции $\lambda_k \in C[R^n, R^+]$ такива, че при $t \in R$, $t \neq t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $x, y \in \Omega$ е изпълнено

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) f + \frac{\lambda_k^2}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) e_g e_g^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^T + \frac{1}{2\lambda_k^2} m_g^T m_g \\ & \leq -cV(t, x, y). \end{aligned}$$

6. Съществува решение $x(t; t_0, x_0)$ на (43) такова, че

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \alpha_1, \quad \alpha_1 < \alpha.$$

Тогава в B_α , $\alpha > 0$ съществува единствено почти периодично решение $\omega(t)$ на система (43) такова, че:

$$(a) \quad \|\omega(t)\| \leq \alpha_1;$$

(б) $\omega(t)$ е равномерно робустно асимптотически устойчиво;

$$(в) \quad H(\omega, t_k) \subseteq H(f, g, I_k, J_k, t_k).$$

Подобна теорема (Теорема 3.5.7) е доказана и за неопределена линейна импулсна система.

Четвърта глава съдържа 3 параграфа и е посветена на приложенията на теорията на почти периодичните частично непрекъснати функции при изследване на математически модели от различни области на научното познание.

В параграф 4.1 са изследвани :

- Импулсни диференциални уравнения със закъснения от вида на Ласота-Важевска, които се използват за моделиране и управление в биологични процеси. Получени са резултати за съществуване на почти периодични частично непрекъснати решения, както и за възможностите за управление на такива решения.

- Съществуването и асимптотическата устойчивост на почти периодичните решения при математическото моделиране на хематопоеза.

- Съществуването на почти периодични решения при системи импулсни логаритмични биологични модели със закъснения.

I. Импулсни модели от вида на Ласота-Важевска

В тази част от параграф 4.1 е изучена следната система обобщени импулсни диференциални уравнения със закъснение от вида на Ласота-Важевска

$$(45) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha(t)x(t) + \sum_{i=1}^n \beta_i(t)e^{-\gamma_i(t)x(t-h)}, & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = \alpha_k x(t_k) + \nu_k, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in \mathbb{R}$, $\{t_k\} \in \mathbb{B}$, $\alpha, \beta_i, \gamma_i \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $h = \text{const} > 0$, $\alpha_k, \nu_k \in \mathbb{R}$,

$k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Когато α, β, γ са положителни константи, диференциалното уравнение със закъснение и без импулси от вида

$$\dot{u} = -\alpha u(t) + \beta e^{-\gamma u(t-h)}$$

се използва от Важевска-Кжижевска и Ласота [208] в изследванията за развитие и оцеляване на червените кръвни клетки в организмите, а по-късно изследванията в тази област са свързани с работите на Куленович и Ладас [115], както и работите на Ксю и Ли [212].

Въведено е означението $PC(t_0)$, където $PC(t_0)$ е множество от всички функции от вида $\phi: [t_0 - h, t_0] \rightarrow \Omega$ с точки на прекъсване от първи род в моментите $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s \in (t_0 - h, t_0)$, в които са непрекъснати отляво.

Използвани са следните условия:

H4.1.1. Функцията $\alpha(t)$ е почти периодична в смисъл на Бор и съществува положителна константа α такава, че $\alpha \leq \alpha(t)$.

H4.1.2. Редицата $\{\alpha_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична и $-1 < \alpha_k \leq 0$.

H4.1.3. Множеството от редици $\{t_k^j\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

H4.1.4. Функциите $\beta_i(t)$ са почти периодични в смисъл на Бор и

$$0 < \sup_{t \in R} |\beta_i(t)| < B_i, \quad B_i > 0, \quad \beta_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

H4.1.5. Функциите $\gamma_i(t)$ са почти периодични в смисъл на Бор и

$$0 < \sup_{t \in R} |\gamma_i(t)| < G_i, \quad G_i > 0, \quad \gamma_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

H4.1.6. Редицата $\{\nu_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична.

С помощта на Лема 4.1.1 и Лема 4.1.2 е доказана следната основна теорема в този параграф.

Теорема 4.1.3. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията H4.1.1-H4.1.6.
2. Изпълнено е неравенството

$$\sum_{i=1}^n B_i < \alpha.$$

Тогава:

1. Съществува единствено почти периодично решение $x(t)$ на системата (45).
2. Решението $x(t)$ е експоненциално устойчиво.

В Пример 4.1.4 условията на теоремата са приложени за изследване на линейна система импулсни диференциални уравнения подобна на система (45).

II. Импулсни модели на хематопоеза.

В тази част от параграфа са изследвани условията за съществуване, единственост и асимптотическа устойчивост на почти периодични решения при математическото моделиране на хематопоеза - производство на червени кръвни клетки в гладките тъкани на организмите.

Нелинейното диференциално уравнение

$$\dot{h}(t) = -\alpha h(t) + \frac{\beta}{1 + h^n(t - \omega)}, \quad t \geq t_0,$$

където $\alpha, \beta, \omega > 0$, $n \in N$ е предложено от Маккей и Глас [134], като математически модел на процеса на производство на всички видове кръвни клетки произведени в полу-регулирана система.

В реалния свят промените в заобикалящата среда, особено в биологичните системи играят съществена роля и е по реалистично да се предполага, че измененията са по-скоро близки до периодичните или почти периодични. Това, заедно с факта, че такива системи често са подложени на много бързи изменения свързани с промени в

климата, промени във възможностите за доставка на необходимите ресурси и т.н., води до моделиране с импулсни диференциални уравнения.

Разгледани са системи от вида

$$(46) \quad \begin{cases} \dot{h}(t) = -\alpha(t)h(t) + \frac{\beta(t)}{1+h^n(t-\omega)}, & t \neq t_k, \\ \Delta h(t_k) = \gamma_k h(t_k) + \delta_k, & k=1,2,\dots, \end{cases}$$

където t_k представляват моментите, в които плътността $h(t)$ претърпява изменение с δ_k единици. Плътността на зрелите клетки при кръвната циркулация намалява в предполагаемо време t_k с добавянето на някои медикаменти и е пропорционална на плътността в момента t_k .

Въведени са следните условия:

H4.1.7. Функцията $\alpha \in C[R^+, R^+]$ е почти периодична в смисъл на Бор и съществува положителна константа μ такава, че $\alpha(t) \geq \mu > 0$.

H4.1.8. Редицата $\{\gamma_k\}$, $k=1,2,\dots$ е почти периодична и $-1 < \gamma_k \leq 0$.

H4.1.9. Функцията $\beta \in C[R^+, R^+]$ е почти периодична в смисъл на Бор и

$$0 < \sup_{t \in R^+} |\beta(t)| < \nu, \quad \nu > 0, \quad \nu(0) = 0.$$

H4.1.10. Редицата $\{\delta_k\}$, $k=1,2,\dots$ е почти периодична и $\sup_{k=1,2,\dots} |\delta_k| \leq \kappa$, $\kappa > 0$.

С лемии, аналогични на подобни лемии в първата част на параграфа е доказана следната теорема.

Теорема 4.1.9. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията H4.1.3 и H4.1.7-H4.1.10.
2. Изпълнено е неравенството

$$\nu < \mu.$$

Тогава:

1. Съществува единствено почти периодично решение $h(t)$ на системата (46).
2. Решението $h(t)$ е експоненциално устойчиво.

III. Импулсни логаритмични популационни модели.

Тук са разгледани условията за съществуване, единственост и асимптотическа устойчивост на почти периодични решения на импулсни закъсняващи логаритмични популационни модели.

Ще отбележим, че следния обикновен логаритмичен популационен модел

$$\dot{x}(t) = x(t)[\lambda - \alpha \ln x(t) - \beta \ln x(t - \omega)],$$

където $\alpha, \beta, \omega > 0$ е добре изучен в работите на Гопалсами и Кирлингер [87, 110] и обобщен в неавтономния случай

$$\dot{x}(t) = x(t)[\lambda(t) - \alpha(t) \ln x(t) - \beta(t) \ln x(t - \omega(t))]$$

в работата на Лиу [131].

В тази част от параграфа ще обобщим последния модел във вида

$$(47) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)[\lambda(t) - \alpha(t) \ln x(t) - \beta(t) \ln x(t - \omega(t))], & t \neq t_k, \\ x(t_k^+) = x(t_k^-)^{1+\gamma_k} e^{\delta_k}, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където моментите $t_k, \{t_k\} \in B$, представят моментите, в които степента на поносимост на биологичния модел нараства с e^{δ_k} единици.

Въведени са следните условия:

Н4.1.11. Функцията $\alpha \in C[R, R^+]$ и е почти периодична в смисъл на Бор и съществува положителна константа μ така, че $\alpha(t) \geq \mu > 0$.

Н4.1.12. Редицата $\{\gamma_k\}$ е почти периодична и $-1 < \gamma_k \leq 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Н4.1.13. Функцията $\beta \in C[R, R^+]$ е почти периодична в смисъл на Бор и

$$0 < \sup_{t \in R} |\beta(t)| < \nu, \quad \nu > 0, \quad \beta(0) = 0.$$

Н4.1.14. Функцията $\lambda \in C[R, R^+]$ е почти периодична в смисъл на Бор и

$$0 < \sup_{t \in R} |\lambda(t)| < \eta, \quad \eta > 0, \quad \lambda(0) = 0.$$

Н4.1.15. Редицата $\{\delta_k\}$ е почти периодична и $-1 \leq \delta_k \leq 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Аналогично с помощта на подобни лема в Първа глава е предложена следната теорема.

Теорема 4.1.12. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н4.1.3 и Н4.1.12-Н4.1.16.
2. Изпълнено е неравенството

$$\nu < \mu.$$

Тогава:

1. Съществува единствено почти периодично решение $x(t)$ на система (47).
2. Решението $x(t)$ е асимптотично устойчиво.

Параграф 4.2 е посветен на приложението на теорията на частично непрекъснатите почти периодични функции в изучаването на моделите от популационната динамика, като в това число са изследвани:

- Импулсни Лотка-Волтера системи;
- Неавтономни n -мерни импулсни Лотка-Волтера системи с дисперсия;
- Импулсни Лотка-Волтера системи с безкрайни закъснения.

1. Импулсни Лотка-Волтера системи

В последните две десетилетия Лотка-Волтера системите са обект на интензивно изучаване от много автори [24, 25, 45, 64, 85 -89, 104, 111, 113, 114, 121, 122, 126-130, 139, 140, 154, 201, 204, 205, 213, 214].

Някои процеси при биологичните видове не са непрекъснати, а се наблюдават скокообразно. Например, раждаемост и смъртност, сезонно размножаване, периодично намаляване на числеността вследствие на човешката дейност и т.н.. При дългосрочното изследване на динамиката на тези биологични видове сезонното увеличаване на популацията или намаляването ѝ може да се разглежда като импулсно въздействие върху разглежданата система.

За адекватно моделиране на тези процеси се използва импулсна система от уравнения на Лотка-Волтера

$$(48) \quad \begin{cases} \dot{u}_i(t) = u_i(t) \left[r_i(t) - a_i(t)u_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}(t)u_j(t) \right], & t \neq t_k, \\ \Delta u_i(t_k) = d_{ik}u_i(t_k), & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $i = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $r_i, a_i \in C[R, R]$, $a_{ij} \in C[R, R]$, $i \neq j$, $j = 1, 2, \dots, n$, константите $d_{ik} \in R$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Използвани са следните условия:

Н4.2.1. Функциите $r_i(t)$, $a_i(t)$, $1 \leq i \leq n$ и $a_{ij}(t)$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ са неотрицателни, почти периодични и $r_{iL} > 0$, $r_{iM} < \infty$, $a_{iL} > 0$, $a_{iM} < \infty$, $a_{ijL} \geq 0$, $a_{ijM} < \infty$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Н4.2.2. Редиците $\{d_{ik}\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $1 \leq i \leq n$ са почти периодични и $-1 < d_{ik} \leq 0$.

Н4.2.3. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k^j \end{smallmatrix} \right\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

С помощта на Лема 4.2.3 , Лема 4.2.4 и Лема 4.2.5 е доказана следната теорема.

Теорема 4.2.6. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н4.2.1-Н4.2.3.

2. Съществуват неотрицателни функции δ_ν , $1 \leq \nu \leq n$ такива, че

$$a_\nu(t) - \sum_{i=1, i \neq \nu}^n a_{i\nu}(t) \geq \delta_\nu(t), \quad t \neq t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

при $t \in R$.

Тогава:

1. За система (48) съществува единствено строго положително почти периодично решение

2. Ако съществува константа $c \geq 0$ такава, че

$$\int_{t_0}^t \delta(s) ds = c(t - t_0),$$

където $\delta(t) = \min(\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_n(t))$, то почти периодичното решение е глобално експоненциално устойчиво.

II. Неавтономни n-мерни импулсни Лотка-Волтера системи с дисперсия.

В тази част са разгледани съществуването и единствеността на почти периодични процеси, които протичат в някои екологични системи моделирани с неавтономни n-мерни импулсни Лотка-Волтера системи с дисперсия от вида

$$(49) \quad \begin{cases} \dot{u}_i(t) = u_i(t) \left[r_i(t) - a_i(t)u_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}(t)u_j(t) \right] \\ \quad + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)(u_j(t) - u_i(t)), \quad t \neq t_k, \\ \Delta u_i(t_k) = d_k u_i(t_k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $i = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, $\{t_k\} \in B$, $r_i, a_i \in C[R, R]$, $1 \leq i \leq n$, $a_{ij} \in C[R, R]$, $i \neq j$, $b_{ij} \in C[R, R]$, $1 \leq i, j \leq n$, константите $d_k \in R$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Въведени са следните условия:

Н4.2.4. Функциите $b_{ij}(t)$, са неотрицателни, почти периодични и $b_{ijL} \geq 0$, $b_{ijM} < \infty$, $1 \leq i, j \leq n$.

Н4.2.5. Редицата $\{d_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична и $-1 < d_k \leq 0$.

Доказани са и използвани следните лема: Лема 4.2.8, Лема 4.2.9 и с тяхна помощ е предложена следната теорема.

Теорема 4.2.10. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н4.2.1 и Н4.2.3-Н4.2.5.
2. Съществуват неотрицателни функции δ_v , $1 \leq v \leq n$ такива, че

$$a_v(t) - \sum_{i=1, i \neq v}^n a_{iv}(t) - \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n b_{iv}(t) \geq \delta_v(t), \quad t \neq t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

при $t \in R$, $A > 0$.

Тогава:

1. За система (49) съществува единствено строго положително почти периодично решение
2. Ако съществува константа $c \geq 0$ такава, че

$$\int_{t_0}^t \delta(s) ds = c(t - t_0),$$

където $\delta(t) = \min(\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_n(t))$, то почти периодичното решение глобално експоненциално устойчиво.

III. Импулсни Лотка-Волтера системи с безкрайни закъснения .

В тази част се изучава съществуването на почти периодични решения на следната Лотка-Волтера система интегро-диференциални уравнения с безкрайно закъснение

$$(50) \quad \begin{cases} \dot{u}_i(t) = u_i(t) \left[r_i(t) - f_i(t, u_i(t)) - \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^t k_i(t, s) h_{ij}(t, u_j(s)) ds \right], & t \neq t_k, \\ \Delta u_i(t_k) = d_{ik} u_i(t_k) + c_i, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $i = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, като $r_i \in C[R, R^+]$, $k_i \in C[R \times R, R^+]$,

$f_i, h_{ij} \in C[R \times R^+, R^+]$, $1 \leq i, j \leq n$, константите $d_{ik} \in R$, $c_i \in R$, $1 \leq i \leq n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Въведени са условията:

Н4.2.6. Функциите $r_i(t)$, $1 \leq i \leq n$ са неотрицателни, почти периодични и $r_{iL} > 0$, $r_{iM} < \infty$.

Н4.2.7. Функцията $k_i(t, \sigma)$ е равномерно непрекъсната, почти периодична по t , интегрируема по $\sigma \in (-\infty, t_0]$ и съществуват положителни константи μ_i такива, че

$$\int_{-\infty}^t k_i(t, s) ds \leq \mu_i < \infty,$$

при $t \in R$, $t \neq t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $1 \leq i \leq n$.

Н4.2.8. Функциите $f_i(t, u_i) > 0$ за $u_i > 0$, $f_i(t, 0) = 0$, почти периодични са по променливата t , равномерно по отношение на променливите u_i и съществуват почти периодични положителни непрекъснати функции $L_i(t)$ такива, че

$$|f_i(t, u_i) - f_i(t, v_i)| \geq L_i(t) |u_i - v_i|,$$

при $(t, u_i), (t, v_i) \in R \times R^+$, $t \neq t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $|u_i - v_i| |f_i(t, u_i) - f_i(t, v_i)| > 0$, при $u_i \neq v_i$, $1 \leq i \leq n$.

Н4.2.9. Функциите $h_{ij}(t, u_i) > 0$ при $u_i > 0$, $h_{ij}(t, 0) = 0$, почти периодични са по променливата t , равномерно по отношение на променливите u_i и съществуват почти периодични положителни непрекъснати намаляващи функции $L_{ij}(t)$ такива, че

$$|h_{ij}(t, u_i) - h_{ij}(t, v_i)| \leq L_{ij}(t) |u_i - v_i|,$$

за $(t, u_i), (t, v_i) \in R \times R^+$, $t \neq t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $u_i \neq v_i$, $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$.

Н4.2.10. $c^M < \infty$, $c_L > 0$, където $c^M = \max_{1 \leq i \leq n} \{c_i\}$ и $c_L = \min_{1 \leq i \leq n} \{c_i\}$.

За доказателството на основните резултати са доказани и използвани Лема 4.2.11, Лема 4.2.12, както и Лема 4.2.13, Лема 4.2.14.

Доказана е следната основната теорема в тази част.

Теорема 4.2.15. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н4.2.2, Н4.2.3, Н4.2.6 -Н4.2.10.

2. Съществуват неотрицателни функции почти периодични функции δ_l , $1 \leq l \leq n$ такава, че

$$rL_l(t) - \sum_{j=1}^n \mu_j L_{lj}(t) \geq \delta_l(t), \quad t \neq t_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

при $t \in R$.

Тогава:

1. За система (50) съществува единствено строго положително почти периодично решение.

2. Ако съществува константа $c \geq 0$ такава, че

$$\int_{t_0}^t \delta(s) ds = c(t - t_0),$$

където $\delta(t) = \min(\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_N(t))$, то почти периодичното решение е глобално експоненциално устойчиво.

В параграф 4.3 са разгледани въпросите за съществуването и свойствата на почти периодичните решения на импулсни невронни мрежи.

Във връзка с приложенията им в различни сфери (разпознаване на образи, асоциативна памет, оптимизация и др.) през последните години невронните мрежи са обект на интензивно изучаване. Получените в тази област резултати ги превръщат във важно техническо средство при решаването на редица приложни задачи [56-61, 69, 73, 89, 99, 100, 109, 142, 155, 186, 190, 193].

1. Импулсни невронни мрежи

В тази част е разгледана следната импулсна Хорфилдова невронна мрежа.

$$(51) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \gamma_i(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = A_k x(t_k) + I_k(x(t_k)) + p_k, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $a_{ij}, \alpha_{ij}, f_j, \gamma_i \in C[R, R]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $A_k \in R^{n \times n}$, $I_k \in C[\Omega, R^n]$, $p_k \in R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Въведени са следните условия:

H4.3.1. Матричната функция $A(t)$, $A \in C[R, R^{n \times n}]$ е почти периодична в смисъл на Бор.

H4.3.2. $\det(E + A_k) \neq 0$ и редицата $\{A_k\}$ е почти периодична, където E е единична матрица в $R^{n \times n}$.

H4.3.3. Множеството от редици $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ t_k \end{smallmatrix} \right\}$ $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, е равномерно почти периодично и $\inf_k t_k^1 = \theta > 0$.

H4.3.4. Функциите $f_j(t)$ са почти периодични в смисъл на Бор,

$$0 < \sup_{t \in R} |f_j(t)| < \infty, \quad f_j(0) = 0$$

и съществува $L_1 > 0$ такава, че при $t, s \in R$,

$$\max_{j=1,2,\dots,n} |f_j(t) - f_j(s)| < L_1 |t - s|.$$

Н4.3.5. Функциите $\alpha_{ij}(t)$ са почти периодични в смисъл на Бор и

$$0 < \sup_{t \in R} |\alpha_{ij}(t)| = \bar{\alpha}_{ij} < \infty.$$

Н4.3.6. Функциите $\gamma_i(t)$ са почти периодични в смисъл на Бор, редицата $\{p_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична и съществува константа $C_0 > 0$ такава, че

$$\max \left(\max_{i=1,2,\dots,n} |\gamma_i(t)|, \max_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} \|p_k\| \right) \leq C_0.$$

Н4.3.7. Редицата от функции $\{I_k(x)\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ е почти периодична равномерно по отношение на $x \in \Omega$ и съществува константа $L_2 > 0$ такава, че

$$\|I_k(x) - I_k(y)\| \leq L_2 \|x - y\|.$$

при $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $x, y \in \Omega$.

В доказателството на основния резултат са използвани Лема 4.3.1, Лема 4.3.2 Лема 4.3.3 и Лема 4.3.4, и е доказана

Теорема 4.3.5. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н4.3.1 - Н4.3.7.

2. За матрицата на Коши $W(t, s)$ на линейна система свързана със система

(51) съществуват положителни константи K и λ такива, че

$$\|W(t, s)\| \leq K e^{-\lambda(t-s)}, \quad t \geq s, \quad t, s \in R.$$

3. Числото

$$r = K \left\{ \max_{i=1,2,\dots,n} \lambda^{-1} L_1 \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{ij} + \frac{L_2}{1 - e^{-\lambda}} \right\} < 1.$$

Тогава

1. Съществува единствено почти периодично решение $x(t)$ на система (51).

2. Ако са изпълнени неравенствата

$$1 + KL_2 < e, \quad \lambda - K \max_{i=1,2,\dots,n} L_1 \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{ij} - N \ln(1 + KL_2) > 0,$$

решението $x(t)$ е експоненциално устойчиво.

II. Импулсни невронни мрежи със закъснения.

В тази част ще разгледаме условията за съществуване на почти периодични решения при импулсни невронни мрежи със закъснения

$$(52) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)f_j(x_j(t-h)) + \gamma_i(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = A_k x(t_k) + I_k(x(t_k)) + p_k, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $a_{ij}, \alpha_{ij}, f_j, \gamma_i \in C[R, R]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, $h > 0$,

$A_k \in R^{n \times n}$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $I_k \in C[\Omega, R^n]$, $p_k \in R^n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

По аналогичен начин, както Теорема 4.3.5 може да се докаже следната теорема.

Теорема 4.3.8. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н4.3.1 - Н4.3.7.

2. За матрицата на Коши $W(t, s)$ на линейната система, свързана със система (52) съществуват положителни константи K и λ такива, че

$$\|W(t, s)\| \leq Ke^{-\lambda(t-s)}, \quad t \geq s, \quad t, s \in R.$$

3. Числото

$$r = K \left\{ \max_{i=1,2,\dots,n} \lambda^{-1} L_1 \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{ij} + \frac{L_2}{1 - e^{-\lambda}} \right\} < 1.$$

Тогава

1. Съществува единствено почти периодично решение $x(t)$ на система (52).

2. Ако са изпълнени неравенствата

$$1 + KL_2 < e, \quad \lambda - \max_{i=1,2,\dots,n} L_1 \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{ij} e^{\lambda h} - N \ln(1 + KL_2) > 0,$$

решението $x(t)$ е експоненциално устойчиво.

III. Импулсни невронни мрежи от общ вид.

В тази част са изследвани условията за съществуване на почти периодични решения на следната импулсна невронна мрежа с крайно и безкрайно закъснение

$$(53) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)f_j(x_j(t-h)) \\ \quad + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(t)f_j\left(\mu_j \int_0^\infty k_{ij}(u)x_j(t-u)du\right) + \gamma_i(t), \quad t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = A_k x(t_k) + I_k(x(t_k)) + p_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

където $t \in R$, $\{t_k\} \in B$, $a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, f_j, \gamma_i \in C[R, R]$, $\mu_j > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$,
 $k_{ij} \in C[R^+, R^+]$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $A_k \in R^{n \times n}$, $I_k \in C[\Omega, R^n]$, $p_k \in R^n$,
 $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Въведени са следните условия:

Н4.3.8. Функциите $\beta_{ij}(t)$ са почти периодични в смисъл на Бор,

$$0 < \sup_{t \in R} |\beta_{ij}(t)| = \bar{\beta}_{ij} < \infty.$$

Н4.3.9. Функциите $k_{ij}(t)$ удовлетворяват релациите

$$\int_0^\infty k_{ij}(s)ds = 1, \quad \int_0^\infty s k_{ij}(s)ds < \infty, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Н4.3.10. Началната функция $\phi_0(t)$ е почти периодична.

С помощта на Лема 4.1.12, аналогично на Теорема 4.3.5 се доказва следващата теорема.

Теорема 4.3.12. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията Н4.3.1 - Н4.3.10.

2. За матрицата на Коши $W(t, s)$ на линейна система, свързана със система

(53) съществуват положителни константи K и λ такава, че

$$\|W(t, s)\| \leq K e^{-\lambda(t-s)}, \quad t \geq s, \quad t, s \in R.$$

3. Числото

$$r = K \left\{ \max_{i=1,2,\dots,n} \lambda^{-1} L_1 \sum_{j=1}^n (\bar{\alpha}_{ij} + \bar{\beta}_{ij} \mu_j) + \frac{L_2}{1 - e^{-\lambda}} \right\} < 1.$$

Тогава

1. Съществува единствено почти периодично решение $x(t)$ на системата (53).

2. Ако са изпълнени неравенствата

$$1 + KL_2 < e, \quad \lambda - \max_{i=1,2,\dots,n} L_1 \sum_{j=1}^n (\bar{\alpha}_{ij} + \bar{\beta}_j \mu_j) - N \ln(1 + KL_2) > 0,$$

решението $x(t)$ е асимптотически устойчиво.

Във всяка част на този параграф са разгледани примери, които показват съществеността на въведените условия за съществуване на почти периодични решения при конкретни невронни мрежи

В заключение: в настоящия дисертационен труд са обобщени и систематизирани основните резултати, свързани с приложението на различни методи за изследване на съществуване, единственост и устойчивост на почти периодичните частично непрекъснати решения за различни системи импулсни диференциални уравнения.

Получените теоретични резултати са приложени при изследването на динамиката на биологични модели, модели от популационната динамика на Лотка-Волтера и невронни мрежи. Получени са следните по-важни резултати:

- Развита е техниката на оценяване на решенията на системи импулсни диференциални уравнения за намиране на достатъчни условия за съществуване на почти периодични решения.
- За първи път е използван е апаратът на частично непрекъснатите функции на Ляпунов и техниката на Разумихин при изследванията в областта на почти периодичните частично непрекъснати функции и са решени редица задачи, свързани с прилагането на директния метод на Ляпунов за различни видове импулсни диференциални уравнения. Теоретичните резултати са приложени за изучаване на модели, базирани на разглежданите уравнения.
- Доказани са теореми за сравнение за частично непрекъснати функции и чрез използване на сравнителния метод и частично непрекъснатите функции на Ляпунов са получени редица достатъчни условия за устойчивост на почти периодичните решения.
- Получените резултати са приложени за изследване на съществуването и устойчивостта на почти периодичните решения на математически модели, базирани на импулсни диференциални уравнения. Разгледани са приложения в три основни области – биологични модели, популационна динамика и невронни мрежи.
- Показано е как с помощта на подходящи импулсни въздействия може да се контролира устойчивостта на почти периодичните на разглежданите системи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов, А. А., Витт, А. А. и Хайкин, С. Е., *Теория колебаний*, Наука, Москва, 1981
2. Ахметов, М. У. и Перестюк Н. А., Почти периодические решения нелинейных импульсных систем, *Укр. Мат. Журн.*, 41/3 (1989), 291-296
3. Ахметов, М. У., Рекуррентные и почти периодические решения неавтономных импульсных систем, *Изв. АН КазССР*, 3 (1988), 8-10
4. Боголюбов, Н. Н. и Митрополский, Ю. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва, 1974
5. Гургула, С. И. и Перестюк, Н. А., О втором методе Ляпунова в системах с импульсным воздействием, *Докл. АН УССР*, сер. А 10 (1982), 11-14
7. Красноселски, М. А., Бърд, В. С. и Колесов, Ю. С., *Нелинейные почти периодические осцилляции*, Москва, Наука, 1970
9. Левитан, Б. М., *Почти периодические функции*, СИТТЛ, Москва, 1953
10. Левитан, Б. М. и Жиков, В. В., *Почти периодични функции и дифференциални уравнения*, МГУ, Москва, 1978
12. Малкин, И. Г., *Теория устойчивости движения*, Москва, Наука, 1966
13. Мильман, В. Д. и Мышкис, А. Д., Об устойчивости движения при наличии толчков, *Сиб. Мат. Ж.*, 1 (1960), 233-237
16. Самойленко, А. М. и Перестюк, Н. А., Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Укр. Мат. Журн.*, 34/1 (1982), 66-73
19. Самойленко, А. М. и Трофимчук, С. И., О пространствах кусочно-непрерывных почти периодических функции и почти периодических множеств на прямой $\mathbb{R}$, *Укр. Мат. Журн.*, 44/3 (1992), 389-400.
20. Самойленко, А. М. и Перестюк, Н. А., Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Дифференциальные уравнения*, 11 (1977), 1981-1992
21. Самойленко, А. М. и Перестюк, Н. А., *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Висша Школа, Киев, 1987
24. Ahmad, S. and Rao, M. Rama M., Asymptotic periodic solutions of N-competing species problem with time delay, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 186 (1994), 559- 571
25. Ahmad, S. and Stamova, I. M., Asymptotic stability of an N-dimensional impulsive competitive system, *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 8 (2007) 654-663

28. Ahmad, S. and Stamov, G. T., On the almost periodic processes in impulsive competitive systems with delay and impulsive perturbations, *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 10/5 (2009), 2857-2863.
29. Akca, H., Alassar, R., Covachev, V., Covacheva, Z. and E. Al-Zahrani, Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 290 (2004), 436-451
32. Amerio, L., Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi periodici, o limitate, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 34 (1955), 97-119
33. Bachar, M. and Arino, O., Stability of a general linear delay-differential equation with impulses, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 10 (2003), 973-990
34. Bainov, D. D., Kostadinov, S. and Myshkis, A. D., Bounded periodic solutions of differential equations with impulsive effect in a Banach space, *Differential and Integral. Equations*, 1/2 (1988), 223-230
36. Bainov, D. D. and Covachev, V., *Impulsive Differential Equations with a Small Parameter*, World Scientific, Singapore, 1994
37. Bainov, D. D., Dishliev, A. B. and Stamova, I. M., Lipschitz quasistability of impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 70 (1996), 267- 277
38. Bainov, D. D., Kulev, G. K. and Stamova, I. M., Instability of solutions of impulsive systems of differential equations, *International Journal of Theoretical Physics*, 8 (1996), 1799-1804
41. Bainov, D. D. and Simeonov, P. S., *Systems with Impulsive Effect: Stability Theory and Applications*, Ellis Horwood, Chichester, 1989
45. Bellman, R. and Cooke, K., *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York, 1963
46. Besicovitch, A. S., *Almost Periodic Functions*, Dover, New York, 1954.
47. Bin Liu, Xinzhi Liu and Xiaoxin Liao, Robust stability of uncertain dynamical systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 290/2 (2004), 519-533
48. Bohr, H., Zur theorie der fastperiodischen funktionen. II: Zusammenhang fastperiodischen funktionen mit funktionen von unendlich vielen viaraben; gleichmassige approximation durch trigonometrische summen, *Acta Math.*, 46 (1925), 101-214
49. Bohr, H. and Neugebauer, O., Uber lineare Differentialgleichungen mit konstanten koeffizienten und fastperiodischer rechter seite, *Nachr. Ges. Wiss. Geottingen, Math. Phys Klasse*, (1926), 8-22
50. Bochner, S., Beitrage zur Theorie der fastperiodische Funktionen, I: Funktionen einer Variaben, *Math. Ann.*, 96 (1927), 119-147

51. Bochner, S., Homogeneous systems of differential equations with almost periodic coefficients, *J. London Math. Soc.*, 8 (1933), 283-288
52. Bochner, S., and J. von Neumann, Almost periodic functions of groups II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37 (1935), 21-50
53. Boucek, R., Licandro, O. and Christopher, P., Differential-difference equations in economics: On the numerical solutions of vintage capital growth model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 (1997), 347-362
54. Burton, T. A. and Zhang, B., Uniform ultimate boundedness and periodicity in functional differential equations, *Tahoku Math. Journal*, 42 (1990), 93-100
56. Cao, J., On stability of delayed cellular neural networks, *Physics Letters A*, 261 (1999), 303-308
57. Cao, J., Global exponential stability of Hopfield neural networks with delays, *Internat. J. Syst. Sci.*, 32/2 (2001), 233-236
58. Cao, J. and Wang, J., Global exponential stability and periodicity of recurrent neural networks with times delays, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 52 (2005), 920-931
59. Cao, J., Chen, A. and Huang, X., Almost periodic attractor of delay neural networks with variable coefficients, *Physics Letters A*, 340/1-4 (2005), 104-120
60. Chen, A. and Cao, J., Existence and attractivity of almost periodic solutions for cellular neural networks with distributed delays and variable coefficients, *Appl. Math. Comp.*, 134:1 (2003), 125-140
61. Chen, T., Global exponential stability of delayed Hopfield neural networks, *Neural Networks*, 14 (2001), 977-980
63. Chen, G. and Shen, J., Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A.*, 14 (2007), 177-188
64. Chen, M. P., J. S. Yu and J. H. Shen, The persistence of nonoscillatory solutions of delay differential equations under impulsive perturbations, *Computers with Mathematics and Applications*, 27 (1994), 1-6
65. Chua, L., *CNN: A Paradigm for Complexity*, World Scientific, Singapore, 1988
66. Chua, L. and Roska, T., Stability of a class of nonreciprocal cellular neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 37 (1990), 1520-1527
67. Chua, L. and Yang, L., Cellular neural networks: Theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, 35 (1988), 1257-1272
68. Chua, L. and Yang, L., Cellular neural networks: Applications, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, 35 (1988), 1273-1290

69. Civalieri, P. P. and Gilli, M., A set of stability criteria for delayed cellular neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* 48 (2001), 494-498
73. Cui, W., Global stability of a class of neural networks model under dynamical thresholds with delay, *Journal of Biomathematics*, 15 (2000), 420-424
74. Dafermos, C. M., Almost periodic processes and almost periodic solutions of evolution equations, *Dynamical Systems*, Academic Press, (1977), 43- 57
76. Dannan, F. and Elaydi, S., Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 113 (1986), 562-577
77. Driver, R., *Ordinary and delay differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977
78. Emmenegger, G. F. and Stamova, I. M., Shock to capital intensity make the Solow equation an impulsive differential equation, *International Journal of Differential Equations and Applications*, Vol. 6, No. 1 (2002), 93-110
81. Fink, A. M. and Seifert, G., Liapunov functions and almost periodic solutions for almost periodic systems, *J. Differential Equations*, 5 (1969), 307-313
82. Fink, A. M., *Almost Periodic Differential Equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, 377, Springer-Verlag, Berlin, 1974
83. Fink, A. M., Almost periodic solutions to forced Lienard equations, *Non Linear Vibration Problems*, 15 (1974), 95-105
85. Gichev, T. R. and Rosov, N. H., A nonlinear controllable impulse system. Dependence of the solution on the initial state and parameters, *Diff. Equations*, Vol. 16, No. 2 (1980), 208-213 (in Russian)
86. Gopalsamy, K. Oscillatory properties of system of first order linear delay differential inequalities, *Pacific Journal of Mathematics*, 128 (1987), 299-305
87. Gopalsamy, K. and Zhang, B., On delay differential equations with impulses, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 139 (1989), 110-122
88. Gopalsamy, K., *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1992
89. Gopalsamy, K. and Issic K. C. Leung, Convergence under dynamical thresholds with delays, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 8 (1997), 341-348
90. Guerrini, L., The Solow-Swan model with a bounded population growth rate, *Journal of Mathematical Economics*, 42 (2006), 14-21
91. Halanay, A and Wexler, D., *Teoria Calitativa a Sistemelor cu Impulsuri*, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bukureshti, Romania, 1968
94. Hekimova, M. A. and Bainov, D. D., Almost periodic solutions of singularly perturbed systems of differential equations with impulse effect, *Rendiconti di Matematica*, VII/8 (1998), 19-30

97. Hopfield, J.,J., Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-stage neurons, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 81 (1984), 3088-3092.
98. Hristova, S. G. and Bainov, D. D., Integral surfaces for hyperbolic ordinary differential equations with impulses effect, *COMPEL* 4 (1995), 1-18
99. Hu, D., Zhao, H. and Zhu, H., Global dynamics of Hopfield neural networks involving variable delays, *Computers and Mathematics with Applications*, 42 (2001), 39-45
100. Huang, H. and Cao, J., On global asymptotic stability of recurrent neural networks with time- varying delays, *Applied Mathematics and Computations*, 142 (2003), 143-154
103. Jiang, G. and Lu, Q., Impulsive state feedback control of a predator-prey model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200 (2007), 193-207
104. Jin, Z., Maoan, H. and Guihua, L., The persistence in a Lotka-Volterra competition systems with impulsive perturbations, *Chaos, Solutions and Fractals*, 24 (2005), 1105-1117
105. Jost, C., Ariono, O. and Arditi, R., About deterministic extinction in ratio-dependent predator-prey models, *Bull. Math. Biol.*, 61 (1999), 19-32
107. Khadra, A., Liu, X. and Shen, X., Application of impulsive synchronization to communication security, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 50 (2003), 341-351
108. Khadra, A., Liu, X. and Shen, X., Robust impulsive synchronization and application to communication security, *Dynamics of Continuous and Discrete Impulsive Systems*, 10 (2003), 403-416
109. Kim, S., Campbell, S. and Liu, X., Stability of a class of linear switching systems with time delay, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 53 (2006), 384-393
110. Kirlinger, G., Permanence in Lotka-Volterra equations: linked prey- predator systems, *Math. Biosci.*, 82 (1986), 165-191.
111. Kolmanovskii, V. B. and Nosov, V. R., *Stability of Functional Differential Equations*, Academic Press Inc., London, 1986
113. Krishna, S., Vasundhara, J. and Satyavani, K., Boundedness and dichotomies for impulsive equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 158 (1991), 352-375
114. Kuang, Y., *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, Boston, 1993
115. Kulenovic, M. R. S., Ladas, G., Linearized oscillations in popular dynamics, *Bull. Math. Biol.*, 49 (1987), 615-627
116. Kulev, G. K. and Bainov, D. D., Strong stability of impulsive systems, *International Journal of Theoretical Physics*, 27 (1988), 745-755

118. Lakshmikantham, V., Bainov, D. D. and Simeonov, P. S., *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, 1989
120. Lakshmikantham, V., Leela, S. and Martynyuk, A. A., *Practical Stability Analysis of Nonlinear Systems*, World Scientific Publishers, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1990
121. Lakshmikantham, V., Leela, S. and A. A. Martynyuk, A. A., *Stability Analysis of Nonlinear Systems*, Marcel Dekker, New York, 1989
122. Lakshmikantham, V. and Liu, X., *Stability Analysis in Terms of Two Measures*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1993
123. Lakshmikantham, V. and Rao, M. Rama M., *Theory of Integro-Differential Equations*, Gordon and Beach Science Publishers, 1995
124. Li, M., Duan, Y., Zhang, W. and Wang, M., The existence of positive periodic solutions of a class of Lotka-Volterra type impulsive systems with infinitely distributed delay, *Computers and Mathematics with Applications*, 49 (2005), 1037-1044
126. Liu, J., Bounded and periodic solutions of finite delay evolution equations, *Nonlinear Analysis*, 34 (1998), 101-111
127. Liu, X., Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models, *Dynamics and Stability of Systems*, 9 (1994), 163-174
128. Liu, X., Stability of impulsive control systems with time delay, *Math. Computer Modeling*, 39 (2004), 511-519
129. Liu, X. and Ballinger, G., Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses, *Nonlinear Analysis*, 51 (2002), 633-647
130. Liu, Y. and Ge, W., Global attractivity in delay "food-limited" models with exponential impulses, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 287 (2003), 200-216
131. Liu, Z., J., Positive periodic solutions for delay multispecies Logarithmic population model, *J. Engrg. Math.*, 19 (4) (2002), 11-16 (in Chinese).
132. Lotka, A., *Elements of Physical Biology* (1925), reprinted by Dover as *Elements of Mathematical Biology*, 1956
133. Luo, Z. and Shen, J., Stability and boundedness for impulsive functional differential equations with infinite delays, *Nonlinear Analysis*, 46 (2001), 475- 493
134. Mackey, M. C. and Glass, L., Oscillation and chaos in physiological control system, *Science* 197 (1977), 287-289.
135. Markoff, A., Stabilitat in Liapouniffschen Sinne und Fastperiodizitat, *Math. Z.*, 36 (1933), 708-738
137. Martynyuk, A., Shen, J. and Stavroulakis, I., Stability theorems in impulsive functional differential equations with infinite delay, Chapter from the book: *Advances in Stability Theory at the end of the 20-th Century* from Series *Stability and Control: Theory*,

- Methods and Applications, Vol. 13, Taylor & Francis, London (2003)
139. May, R. M. and Anderson, R. M., The transmission dynamics of Human Immunodeficiency Virus (HIV), *Philosophical Trans. Roy. Soc. London, Ser. B., Biological Sciences* (1998), 565-607
 140. Maynard-Smith, J., *Models in Ecology*, Cambridge University, Cambridge, 1974
 141. McRae, F., Practical stability of impulsive control systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 181 (1994) 656-672
 142. Mohamad, S., Global exponential stability of continuous-time and discrete-time delayed bidirectional neural networks, *Phys. D.*, 159 (2001), 233-251
 144. Neugebauer, O., *The Exact Sciences and in Antiquity*, Braun University Press, Providence, (1957)
 147. Nindjin, A. F., Aziz-Alaoui, M. A. and Cadivel, M., Analysis of predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with time delay, *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 7 (2006), 1104-1118
 151. Perestyuk, M. and Chernikova, O., On stability of integral sets of impulsive differential systems, *Ukrainian Mathematical Journal*, 54 (2002), 306-315
 152. Rama Mohana Rao, M., Sathanantham, M. and Sivasundaram, S., Asymptotic behavior of solution of Volterra system with impulse effect, *Appl. Math. and Computation*, 34 (1990), 195-211
 154. Randelovic, B., Stefanovic, L. and Dankovic, B., Numerical solutions of impulsive differential equations, *Facta Universitatis, Ser. Math. Inform.*, 15 (2000), 101-111
 155. Roska, T., Wu, C. W., Balsa, M. and Chua, L. O., Stability and dynamics of delay-type general cellular neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 39 (1992), 487-490
 161. Saaty, T. L. and Joyce, M., *Thinking with Models: Mathematical Models in the Physical, Biological, and Social Sciences*, Pergamon, Oxford, UK, 1981
 162. Sakellaris, P., Irreversible capital and the stock market response to shocks in profitability, *International Economic Review*, 38 (1997), 351-379
 163. Seifert, G., A condition for almost periodicity with some applications to functional-differential equations, *J. Differential Equations*, 1 (1965), 393-408
 164. Seifert, G., Almost periodic solutions for almost periodic systems of ordinary differential equations, *J. Differential Equations*, 2 (1966), 305-319
 165. Seifert, G., Nonlinear evolution equation with almost periodic time dependence, *SIAM J. Math. Analysis*, 18/2 (1987), 387-392
 167. Shen, J. and Li, J., Impulsive control for stability of Volterra functional differential equations, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 24 (2005) 721-734
 170. Stamov, G. T., Almost periodic solutions for systems of impulsive integro-differential

- equations, *Appl. Analysis*, 64 (1997), 319-327
183. Stamov, G. T., Impulsive cellular neural networks and almost periodicity, *Proc. of the Japan Academy*, 80/10 (2004), 198-203
 186. Stamov, G. T and Stamova, I. M., Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay, *Appl. Math. Modeling* 31 (2007), 1263-1270
 189. Stamov, G. T., Almost periodic models in impulsive ecological systems with variable diffusion, *JAMC* , 27/1-2 (2008), 243-255
 193. Stamov, G. Tr., Almost periodic models of impulsive Hopfield neural network, *J. Math. Kyoto Univ.*, 49/1 (2009), 57-67
 194. Stamov, G. Tr., Almost periodic processes in ecological systems with impulsive perturbations, *KMJ*, 49/2 (2009), 299-312
 199. Stamova, I. M., Global asymptotic stability of impulse delayed cellular neural networks with dynamical threshold, *Nonlinear Studies*, 13/ 2 (2006), 113-122
 200. Stamova, I. M. and Emmenegger, G.-F., Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets, *International Journal of Applied Mathematics*, 15/3 (2004), 271-290
 201. Stamova, I. M., *Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2009
 202. Sternberg, S., *Celestial Mechanics*, W. A. Benjamin New York, 1 (1969)
 203. Taam, C. T., *Asymptotically Periodic and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations in Banach Spaces*, Tech. Rep., Georgetown University, Washington DC, 1966
 204. Takeuchi, Y., *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*, World Scientific, Singapore, 1996
 205. Tineo, A., Necessary and sufficient conditions for extinction of one species, *Advanced Nonlinear Studies*, 5, No.1 (2005), 57-71
 207. Volterra, V., Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically, *Nature*, 118 (1926), 558-560
 208. Wazewska-Czyzewska, M. and Lasota, A., Mathematical problems of the dynamics of red blood cells system, *Ann. Polish Math. Soc. Ser. III Appl. Math.*, 17 (1988), 23-40
 212. Xu, W. and Li, J., Global attractivity of the model for the survival of the red blood cells with several delay, *Ann. Differential Equations*, 14 (1998), 357-363
 213. Xue, Y., Wang, J. and Jin, Z., The persistent threshold of single population under pulse input of environmental toxin, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 6 (2007), 22-29
 214. Ye, D. and Fan, M., Periodicity in impulsive predator-prey system with Holling III functional response, *Kodai Math. Journal*, 27 (2004), 189-200

- 215. Yoshizawa, T., *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, 1966
- 216. Yoshizawa, T., Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system, *Funkcialaj Ekvacioj*, 12 (1966), 23-40
- 217. Yoshizawa, T., Some remarks on the existence and the stability of almost periodic solutions, *SIAM Studies in Applied Math.*, 5 (1969), 166-174
- 218. Zanolin, F., Permanence and positive periodic solutions for Kolmogorov competing species systems, *Results Math.*, 21, (1992), 224-250
- 221. Zhang, Y. and Sun, J., Stability of impulsive delay differential equations with impulses at variable times, *Dynamical Systems*, 20 (2005), 323-331
- 224. Zhikov, V. V., The problem of almost periodicity for differential and operator equations, *Matematika*, 8 (1969), 94-188