Химикотехнологичен и металургичен университет – София
Катедра Математика

Светослав Иванов Ненов

Асимптотично сравняване на решения на системи обикновени диференциални уравнения: методи и приложения

Автореферат

за придобиване на образователна и научна степен “доктор”

Област на висше образование:	4: Природни науки, математика и информатика
Професионално направление:	4.5: Математика
Научна специалност:	01.01.05: Диференнциални уравнения

Научен ръководител
доц. д-р Ангел Б. Дишлиев

— София, 2011 —

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита от разширен катедрен съвет на катедра Математика при Химикотехнологичен и металургичен университет, град София, проведен на 06. 06. 2011 г.

Дисертанта е главен асистент в катедра Математика при Химикотехнологичен и металургичен университет – София.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 15.07, 2011 от 12 часа в зала 100, сграда Б на ХТМУ Ц София.

Научно жури:

1. доц. д-р Димитър Колев ХТМУ (ХТМУ-София, председател).

2. доц. д-р Ангел Дишлиев (ХТМУ-София, научен ръководител).

3. проф. дмн Снежана Христова (ПУ "П. Хилендарски", рецензент).

4. доц. д-р Гани Стамов (ТУ-Сливен, рецензент).

5. доц. д-р Валентина Пройчева (ТУ-Пловдив).

Основни данни за дисертационния труд:

- автор: гл. ас. Световлав Иванов Ненов;
- научен ръководител: доц. д-р Ангел Б. Дишлиев;
- заглавие: Асимптотично сравняване на решения на системи обикновени диференциални уравнения: методи и приложения;
- научна специалност: Диференциални уравнения;
- шифър: 01 01 05;
- брой параграфи: 15, разпределени в 2 глави;
- брой страници: 127;
- брой литературни източници: 42;
- брой публикации на дисертанта, свързани с дисертационния труд: 3.

Означения

$\emptyset$	празното множество
$\mathbb{N}$	множеството на естествените числа: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	множеството на реалните числа
$\mathbb{R}_+$	множеството на неотрицателните реални числа
$\mathbb{R}_-$	множеството на неположителните реални числа
$[a, b]$	затворен интервал, $a < b$
$]a, b[$	отворен интервал, $a < b$
$[a, b[$	полуотворен интервал отдясно, $a < b$
$]a, b]$	полуотворен интервал отляво, $a < b$
$A \times B$	декартово произведение на непразните множества A и B
id, $(\mathbf{1}_{\mathcal{X}})$	идентитет (в пространството $\mathcal{X}$)
Rez	реалната част на комплексното число z
Imz	имагинерната част на комплексното число z
$\mathbb{R}^n$	n-мерно Евклидово пространство
A^*	транспонирана матрица на матрицата A
$(x^1, \dots, x^n)$	n-мерен вектор в $\mathbb{R}^n$
$\langle x, y\rangle$	Евклидово скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = x^1y^1 + \cdots + x^ny^n$, където $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$
$\Vert x\Vert$	Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$: $\Vert x\Vert = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$	директна сума на пространствата $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$
$x \oplus y$	директна сума на векторите x и y
$\mathrm{dist}\,(A, B)$	разстояние между непразните множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$: $\mathrm{dist}\,(A, B) = \inf\{\Vert x - y\Vert : x \in A, y \in B\}$
$\overline{A}$	затворена обвивка на множеството $A \subseteq \mathbb{R}^n$
∂A	граница на множеството $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mathrm{int}\, A$	вътрешност на множеството $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\dim A$	размерност на пространството (множеството) A
$\mathcal{W}^\perp$	ортогоналното допълнение на пространството A
$\mathbb{B}(x_0, r)$	отворено кълбо с център $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус $r > 0$ в $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Vert x - x_0\Vert < r\}$
$\mathbb{B}(r)$	отворено кълбо с център 0 и радиус $r > 0$ в $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Vert x\Vert < r\}$
$\mathbb{B}(A, r)$	r-околност на непразното множество A в $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{B}(A, r) = \{x \in R^n : \mathrm{dist}\,(A, x) < r\}$
$f : A \longrightarrow B$	функция f с дефиниционно множество A и множество от функционални стойности B
$\mathbf{C}(A, B)$	множество от всички непрекъснати функции с дефиниционно множество A и множество на функционални стойности B

$\mathbf{C}^\kappa(A,B)$	множество от всички функции с дефиниционно множество A и множество на функционални стойности B, които притежават непрекъснати производни до ред $\kappa \in \mathbb{N}$
$\mathbf{div}\, f$	дивергенция на функцията f
$\ker f$	ядрото на линейно изображение f
$\mathrm{im}\, f$	образа на линейно изображение f
$\|h\|$	норма на линейният оператор $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$: $\|h\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|h(x)\|$
$\mathcal{O}(t_0, x_0)$	орбита на система диференциални уравнения, определена от точката $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
$\mathcal{O}(x_0)$	орбита на автономна система диференциални уравнения, определена от точката $x_0 \in \mathbb{R}^n$
$\kappa_0(h,t)$	долна диференциална характеристика на функцията h, вж. стр. 46
$\kappa^0(h,t)$	горна диференциална характеристика на функцията h, вж. стр. 46
$\mathcal{F}(R_+ \times D, \mathbb{R}^n)$	означението е въведено на стр. 32
$(\cdot \prec \cdot)_x, \cdot \prec \cdot$	предхождане на две системи, вж. стр. 33, 37
$(\cdot \succ \cdot)_x, \cdot \succ \cdot$	следване на две системи, вж. стр. 33, 37
$(\cdot \sim \cdot)_x, \cdot \sim \cdot$	еквивалентност на две системи, вж. стр. 33, 37
$(\cdot \not\preceq \cdot)_x, \cdot \not\preceq \cdot$	не следва, вж. стр. 33, 37
$(\cdot \not\succeq \cdot)_x, \cdot \not\succeq \cdot$	не предхожда, вж. стр. 33, 37
$\forall$	квантор за всеобщност
$\exists$	квантор за съществуване
$\Longrightarrow$	следва
$\to$	клони

Настоящата дисертация е посветена на изследване на асимптотичното поведение на решенията на системи диференциални уравнения.

Изучаването на това поведение е свързано с различни приложения, както в теорията на моделирането (т.е. различните приложения на диференциалните уравнения в механиката, физиката, химията, популационната динамика и др.) така и с чисто математически въпроси и направления в теорията на обикновените диференциални уравнения (например при изучаване на устойчивост или атракционни свойства на решения). Различни резултати, свързани с асимптотичното поведение на решения, могат да бъдат намерени в [**Har64**], [**MM76**], [**BM74**], [**AWH59**], [**Ama90**], [**BS67**], [**Pli77**], [**NS49**], [**CL55**] и др.

Нека разгледаме следните две начални задачи:

$$\dot{x} = f_1(t,x), \quad x_1(t_0;t_0,x_0) = x_0 \tag{1}$$

и

$$\dot{x} = f_2(t,x), \quad x_2(t_0;t_0,x_0) = x_0, \tag{2}$$

където: $f_i : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow D$, $i = 1,2$; D е област в $\mathbb{R}^n$, $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$. Решенията на задачите (1) и (2) ще означаваме съответно с $x_1(t;t_0,x_0)$ и $x_2(t;t_0,x_0)$. Ако $t_0 = 0$, то полагаме $x_i(t;x_0) = x_i(t;0,x_0)$, $i = 1,2$. Освен това ще предполагаме, че за задачите (1) и (2) са валидни следните условия (H 0.1):

(H 0.1.1) За всяка начална точка $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$ съществуват съответно единствени решения на задачите (1) и (2), които са дефинирани в t-интервала $\mathbb{R}_+$.

(H 0.1.2) D е положително инвариантно множество на двете системи от (1) и (2), т.е. ако $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$, то $x_i(t;t_0,x_0) \in D$, $t \geq t_0$, $i = 1,2$.

(H 0.1.3) Съществува точка $(t_0,x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times D$ такава, че

$$x_1(t;t_0,x_0^*) = x_2(t;t_0,x_0^*) \in D, \text{ за всяко } t \geq t_0.$$

По-надолу, ако това не ограничава общността на разглежданията, ще считаме, че $t_0 = 0$.

Задачата за изследване на асимптотичното поведение на решенията на системата от (1) може да се разглежда от различни гледни точки. Така например, в съвременната литература се разглеждат следните няколко задачи:

(1) Да се намерят условия върху десните страни $f_1(t,x)$ и $f_2(t,x)$ на системите (1) и (2), при които $\|x_1(t,x_0) - x_2(t,x_0)\|$ е достатъчно малко число или $\lim\limits_{t\to\infty} \|x_1(t,x_0) - x_2(t,x_0)\| = 0$. Решението на тази задача позволява да се определи асимптотичното поведение на решенията на системата от (1) посредством сравняване с известна (или моделна) система от (2).

(2) Да се определят асимптотиките на решенията на системата от (1) непосредствено от дясната страна $f_1(t,x)$ на системата.

(3) Да се изучат асимптотичните свойства на решенията на системата от (1) посредством приближени решения. В този случай в качеството на моделна система от (2) се избира някое достатъчно добро приближение на системата от (1) и др.

В настоящата дисертация е разработен един метод за определяне на някои асимптотични свойства на решенията на системата от (1) посредством сравняване с моделна система от (2). За разлика от цитираните по-горе задачи нашата цел е изследване на частното $\frac{\|x_1(t,x_0)\|}{\|x_2(t,x_0)\|}$ на решенията на двете системи от (1) и (2). По-нататък ще приведем точната математическа формулировка на разглежданата задача.

По-надолу, с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n) \subset \mathbf{C}(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n) \times \mathbf{C}(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n)$ ще означаваме множеството от всички двойки от непрекъснати функции $f_1(t,x)$ и $f_2(t,x)$, за които са валидни условията (H 0.1).

Нека $(f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n)$. Полагаме

$$F(t; t_0, x_0) = \frac{\|x_1(t; t_0, x_0) - x_1(t; t_0, x_0^*)\|}{\|x_2(t; t_0, x_0) - x_2(t; t_0, x_0^*)\|}, \quad t \geq t_0,$$

където $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$. Така дефинираната функция $F(t; t_0, x_0)$ ще наричаме *функция на сравняване* на системите (1) и (2) относно общото им решение $x_1(t; t_0, x_0^*)$. Нека $\mathcal{D} = D \setminus \{x_0^*\}$ и $\mathcal{D}_\varepsilon = (D \cap \mathbb{B}(x_0^*, \varepsilon)) \setminus \{x_0^*\}$.

Дефиниция 1. Нека са изпълнени условията (H 0.1).
Ще казваме, че:

(1) Системата от (1) *предхожда* системата от (2) в точката x_0^*, ако съществува число $\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}_\varepsilon$ е валидно равенството

$$\lim_{t \to \infty} F(t; t_0, x_0) = 0.$$

В този случай ще пишем $([f_1] \prec [f_2])_{x_0^*}$.

(2) Системата (1) *следва* системата от (2) в точката x_0^*, ако съществува число $\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}_\varepsilon$ е валидно равенството

$$\lim_{t \to \infty} F(t; t_0, x_0) = \infty.$$

В този случай ще пишем $([f_1] \succ [f_2])_{x_0^*}$.

(3) Системата (1) *е еквивалентна* на системата от (2) в точката x_0^*, ако съществува число $\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}_\varepsilon$ са валидни неравенствата

$$0 < \liminf_{t \to \infty} F(t; t_0, x_0) \leq \limsup_{t \to \infty} F(t; t_0, x_0) < \infty.$$

В този случай ще пишем $([f_1] \sim [f_2])_{x_0^*}$.

(4) Системата (1) *не предхожда* системата от (2) в точката x_0^*, ако съществува число $\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}_\varepsilon$ е валидно неравенството

$$0 < \liminf_{t \to \infty} F(t; t_0, x_0).$$

В този случай ще пишем $([f_1] \succeq [f_2])_{x_0^*}$.

(5) Системата (1) *не следва* системата от (2) в точката x_0^*, ако съществува число $\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}_\varepsilon$ е валидно неравенството

$$\limsup_{t \to \infty} F(t; t_0, x_0) < \infty.$$

В този случай ще пишем $([f_1] \preceq [f_2])_{x_0^*}$.

Ако за системите от (1) и (2) е изпълнено поне едното от условията на дефиниция 1 в точката x_0^*, то ще казваме, че системите от (1) и (2) са *сравними* в точката x_0^*. В противен случай, ще казваме, че те са *несравними* в точката x_0^*.

Базирайки се на въведената по-горе дефиниция 1 ще изброим основните задачи, който се разглеждат в настоящия дисертационен труд.

(1) Формулиране и доказване на критерии за сравнимост на системите от (1) и (2) в околност на общото им решение $x_1(t;x_0^*) = x_2(t;x_0^*)$. В повечето случаи ще считаме, че е извършена подходяща смяна на координатната система така, че $x_0^* = x_1(t;x_0^*) = x_2(t;x_0^*) = 0$.
(2) Получаване на различни асимптотични характеристики на решенията на системата от (1) посредством сравнения с подходящо избрана моделна система (2).
(3) Получаване на необходими или необходими и достатъчни условия за устойчивост на нулевото решение на системата от (1). Методът за получаване на такива условия се базира на сравняване (относно въведените релации) на решенията на системата от (1) с решенията на моделната система от (2) (при това считаме, че за системата от (2) е известно качественото поведение на решенията).
(4) Сравнения на решенията на системата от (1) и решенията на пертурбираната ѝ система от (2), където функцията $f_2(t,x)$ се получава посредством "малка" пертурбация на функцията $f_1(t,x)$.
(5) Сравнения на решенията на системите (1) и (2) в околност на общо периодично решение.
(6) Различни приложения в механиката, популационната динамика и др.

По-надолу ще се спрем на получените резултати в предлагания дисертационен труд.

Основната цел на глава 1 е формулирането и доказването на резултати, свързани с сравнимост на решенията на системите (1) и (2). В параграф 1.1 е приведено подробно математическо описание на поставената задача. Ще отбележим, че за така въведените релации $\preceq$ и $\sim$ са валидни следните твърдения:

Теорема 1. Нека $(f_1,f_2),(f_2,f_3) \in \mathcal{F}(R_+ \times D, \mathbb{R}^n)$.
Тогава:

(1) $(f_1 \preceq f_1)_{x_0^*}$.
(2) Ако $(f_1 \preceq f_2)_{x_0^*}$ и $(f_2 \preceq f_1)_{x_0^*}$, то $(f_1 \sim f_2)_{x_0^*}$.
(3) Ако $(f_1 \preceq f_2)_{x_0^*}$ и $(f_2 \preceq f_3)_{x_0^*}$, то $(f_1,f_3) \in \mathcal{F}(R_+ \times D, \mathbb{R}^n)$ и $(f_1 \preceq f_3)_{x_0^*}$,

т.е. релацията $\preceq$ индуцира частична наредба в множеството от всички системи, за които са валидни условията (H 0.1).

Теорема 2. Нека $(f_1,f_2),(f_2,f_3) \in \mathcal{F}(R_+ \times D, \mathbb{R}^n)$.
Тогава:

(1) $(f_1 \sim f_1)_{x_0^*}$.
(2) Ако $(f_1 \sim f_2)_{x_0^*}$, то $(f_2 \sim f_1)_{x_0^*}$.
(3) Ако $(f_1 \sim f_2)_{x_0^*}$ и $(f_2 \sim f_3)_{x_0^*}$, то $(f_1,f_3) \in \mathcal{F}(R_+ \times D, \mathbb{R}^n)$ и $(f_1 \sim f_3)_{x_0^*}$,

т.е. $\sim$ е релация на еквивалентност в множеството от всички системи, за които са валидни условията (H 0.1).

В параграф 1.2 е разгледана поставената задача в частния случай на сравнимост на нулевите решения на системите (1) и (2). За целта въвеждаме следните условия (H 0.2):

(H 0.2.1) Изпълнени са условията (H 0.1), при което $0 = x_0^* \in D$.
(H 0.2.2) $f_i(t, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2$.

Във връзка с някои различни подходи при изследване на устойчивост на нулевите решения на системи диференциални уравнения, в параграф 1.1 са приведени дефиниции на понятия, свързани с устойчивост, атрактивност, неустойчивост и др. (дефиниция 1.2, стр. 35; дефиниция 1.3, стр. 35; дефиниция 1.4, стр. 36).

Ще се спрем на някои особености на задачата за сравняване на решения на две системи в околност на общо нулево решение. Нека са изпълнени условията (H 0.2). В този случай (т.е. когато $x_0^* = 0$) функцията на сравняване $F = F(t; t_0, x_0)$ приема вида

$$F(t; t_0, x_0) = \frac{\|x_1(t; t_0, x_0)\|}{\|x_2(t; t_0, x_0)\|}, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D.$$

За улеснение в случая $x_0^* = 0$ ще използуваме следните по-прости означения $[f_1] \prec [f_2]$, $[f_1] \succ [f_2]$, и т. н. вместо съответните означения $([f_1] \prec [f_2])_0$, $([f_1] \succ [f_2])_0$ и т.н. Да разгледаме някои примери.

Пример 1. Нека $f_1(t, x) = a_1 x$, $f_2(t, x) = a_2 x$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $a_1 a_2 \neq 0$. Тогава решенията на задачите (1) и (2), са съответно:

$$x_1(t; t_0, x_0) = x_0 e^{a_1(t-t_0)}, \quad x_2(t; t_0, x_0) = x_0 e^{a_2(t-t_0)}.$$

Очевидно, от равенствата

$$\lim_{t\to\infty} F(t; t_0, x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{|x_1(t; t_0, x_0)|}{|x_2(t; t_0, x_0)|} = \lim_{t\to\infty} e^{(a_1-a_2)(t-t_0)} = \begin{cases} 0, & \text{ако } a_1 < a_2; \\ 1, & \text{ако } a_1 = a_2; \\ +\infty, & \text{ако } a_1 > a_2 \end{cases}$$

следва, че: $[f_1] \prec [f_2]$, ако $a_1 < a_2$; $[f_1] \sim [f_2]$, ако $a_1 = a_2$; $[f_1] \succ [f_2]$, ако $a_1 > a_2$.

Нека разгледаме случая, при който нулевите решения на системите (1) и (2) са устойчиви. В този случай е възможно системите (1) и (2) да не са сравними в $x_0^* = 0$. В следващия пример са конструирани две скаларни диференциални уравнения с нулеви решения, които са несравними по смисъла на дефиниция 1, т.е. за решенията на съответните уравнения не е изпълнено нито едно от условията на дефиниция 1.

Пример 2. Нека $n = 1$, $f_1(t, x) = (\cos t - t \sin t - 2)x$, $f_2(t, x) = (t \cos t + \sin t - 2)x$. Решенията на началните задачи (1) и (2) са съответно:

$$x_1(t; t_0, x_0) = \frac{x_0 e^{-(2-\cos t)t}}{e^{-(2-\cos t_0)t_0}} \quad \text{и} \quad x_2(t; t_0, x_0) = \frac{x_0 e^{-(2-\sin t)t}}{e^{-(2-\sin t_0)t_0}}.$$

Ето защо,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{|x_1(t; t_0, x_0)|}{|x_2(t; t_0, x_0)|} = \frac{e^{-(2-\sin t_0)t_0}}{e^{-(2-\cos t_0)t_0}} \liminf_{t\to\infty} e^{(\cos t - \sin t)t} = \frac{e^{-(2-\sin t_0)t_0}}{e^{-(2-\cos t_0)t_0}} \lim_{k\to\infty} e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = 0$$

и

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|x_1(t; t_0, x_0)|}{|x_2(t; t_0, x_0)|} = \frac{e^{-(2-\sin t_0)t_0}}{e^{-(2-\cos t_0)t_0}} \lim_{k\to\infty} e^{2k\pi} = \infty.$$

Следователно нулевите решения на системите (1) и (2) са несравними.

Нека отново разгледаме общата задача за сравняване на ненулевите решения на двете системи (1) и (2) относно общото им решение $x_1(t;t_0,x_0^*) = x_2(t;t_0,x_0^*)$ (вж. условия (H 0.1)). Като извършим субституцията $y(t) = x(t) - x_1(t;t_0,x_0^*)$ в системите (1) и (2), лесно се уверяваме, че функциите

$$y_1(t;t_0,y_0) = x_1(t;t_0,x_0) - x_1(t;t_0,x_0^*) \quad \text{и } y_2(t;t_0,y_0) = x_2(t;t_0,x_0) - x_2(t;t_0,x_0^*)$$

са решения на началните задачи:

$$\dot{y} = \Phi_1(t;y), \quad y_1(t_0;t_0,y_0) = x_0 - x_0^* \tag{3}$$

и

$$\dot{y} = \Phi_2(t,y), \quad y_2(t_0;t_0,y_0) = x_0 - x_0^*, \tag{4}$$

където

$$\Phi_1(t,y) = f_1(t, y + x_1(t;t_0,x_0^*)) - f_1(t, x_1(t;t_0,x_0^*))$$

и

$$\Phi_2(t,y) = f_2(t, y + x_2(t;t_0,x_0^*)) - f_2(t, x_2(t;t_0,x_0^*)).$$

Очевидно е също така, че системите (3) и (4) притежават нулеви решения. Освен това

$$\frac{\|x_1(t;t_0,x_0) - x_1(t;t_0,x_0^*)\|}{\|x_2(t;t_0,x_0) - x_2(t;t_0,x_0^*)\|} = \frac{\|y_1(t;t_0,y_0)\|}{\|y_2(t;t_0,y_0)\|}.$$

Ето защо (ако е известно общото ненулево решение $x_1(t;t_0,x_0^*) = x_2(t;t_0,x_0^*)$) задачата за сравняване на решенията на двете системи (1) и (2) може да бъде сведена до задача за сравняване на нулевите решения на системите (3) и (4).

В параграф 1.2 са приведени някои подготвителни резултати, които са необходими за доказателството на основните резултати в глава 1. Формулирана е една теорема на T. Wazewski, (по-точно класическият топологичен принцип, в теорията на обикновените диференциални уравнения[1]).

В параграф 1.3 са доказани някои диференциални неравенства. Разглеждаме системата

$$\dot{x} = Ax + f(t,x), \tag{5}$$

за която се предполага, че са изпълнени следните условия (H 0.3):

(H 0.3.1) A е реална $n \times n$-матрица. Всички собствени стойности $\lambda_1, \dots \lambda_n$ на A са реални числа и $\lambda_1 \le \lambda_k \le \lambda_n$, $k = 1, \dots, n$.

(H 0.3.2) D е област в $\mathbb{R}^n$; $0 \in D$; $f : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ е Липшицова функция по вторият си аргумент в D, т.е.

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L_f \|x_1 - x_2\|, \tag{6}$$

където $t \in \mathbb{R}$; $x_1, x_2 \in D$ и $f(t,0) = 0$.

Доказано е, че[2] ако са изпълнени условията (H 0.3), то за всяко $b > 0$ съществува линейно неособено изображение $C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\eta = Cx$, такова, че:

---

[1]Доказателствата на теоремата на T. Wazewski, теорема 1.3 и лема 1.1 могат да бъдат намерени в [**Har64**, IV, §4], [**LL69**, 2, §11].

[2]вж. лема 1.2, стр. 42

(1) С помощта на изображението C системата (5) добива вида

$$\dot{\eta}^k = \lambda_k \eta^k + \sum_{j=1}^{k-1} b_{kj}\eta^k + \psi^k(t,\eta),\ k = 1,\dots,n, \tag{7}$$

където $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$, $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$.

(2) $\psi^k : \mathbb{R}_+ \times C^{-1}(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ са непрекъснати функции, $k = 1,\dots,n$.

(3) Коефициентите b_{kj} удовлетворяват неравенствата $|b_j| \le b$, $k = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,k$.

(4) Валидно е неравенството $\|\psi(t,x)\| \le L_\psi \|x\|$, където $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times C^{-1}(D)$ и $L_\psi = L_f \|C\| \|C^{-1}\|$.

(5) Ако границата $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$ съществува и е равномерна относно $t \in \mathbb{R}_+$, то границата $\lim\limits_{\eta \to 0} \frac{\|\psi(t,\eta)\|}{\|\eta\|} = 0$ също съществува и е равномерна относно $t \in \mathbb{R}_+$.

Ето защо, по-надолу ще изследваме системата (7). В следващите две твърдения са формулирани основните резултати от параграф 1.3.

Лема 1. Нека са изпълнени условията (H 0.3).

Тогава съществува обратима матрица C такава, че за всяко $\varepsilon > 0$ и всяко $t \ge 0$ са валидни неравенствата:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big((\eta(t,\eta_1))^2 \exp(-2(\lambda_n + \varepsilon n^2 + nL_\psi)t) \Big) < 0; \\ &\frac{d}{dt}\Big((\eta(t,\eta_1))^2 \exp(-2(\lambda_1 - \varepsilon n^2 - nL_\psi)t) \Big) > 0, \end{aligned} \tag{8}$$

където: $\eta(t,\eta_1) = Cx_1(t,x_1)$; $\eta_1 = Cx_1$; $x_1(t,x_1)$ е решението на системата (5) с начално условие $x_1(0,x_1) = x_1$; $x_1 \in D \setminus 0$; $t \in \mathbb{R}_+$ и $L_\psi = L_f \|C\| \|C^{-1}\|$.

Следствие 1. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.3)

(2) Всички собствени стойности на матрицата A са отрицателни, т.е. $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n < 0$.

(3) Съществува границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0,$$

равномерно относно $t \in \mathbb{R}_+$.

Тогава съществуват обратима матрица C и константа $T > 0$ такива, че за всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко $t \ge T$ са валидни неравенствата:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|\eta(t,\eta_1)\|^2 \exp(-2(\lambda_n + \varepsilon n(n+1))t) \Big) < 0; \\ &\frac{d}{dt}\Big(\|\eta(t,\eta_1)\|^2 \exp(-2(\lambda_1 - \varepsilon n(n+1))t) \Big) > 0, \end{aligned} \tag{9}$$

където: $\eta(t,\eta_1) = Cx_1(t,x_1)$; $\eta_1 = Cx_1$; $x_1(t,x_1)$ е решението на системата (5) с начално условие $x_1(0,x_1) = x_1$; $x_1 \in D \setminus 0$ и $\|x_1\|$ е достатъчно малко число; $t \in \mathbb{R}_+$ и $L_\psi = L_f \|C\| \|C^{-1}\|$.

В параграф 1.3 са получени и някои други оценки за производната на нормата на решението $x(t;t_0,x_0)$ на началната задача

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0;t_0,x_0) = x_0, \tag{10}$$

където: $f : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$ и D е област в $\mathbb{R}^n$.

Преди да формулираме резултатите от параграф 1.3 ще въведем понятията долна и горна диференциална характеристики на функция.

Дефиниция 2. Нека $h \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Числата

$$\kappa_0(h,t) = \min_{\|x\|=1} \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}(t,0)x, x \right\rangle \quad \text{и} \quad \kappa^0(h,t) = \max_{\|x\|=1} \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}(t,0)x, x \right\rangle$$

ще наричаме съответно *долна и горна диференциални характеристики* на функцията $h = h(t,x)$.

Лема 2. Нека са изпълнени следните условия:

(1) $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n)$, $0 \in D$ и $f(t,0) = 0$ за всяко $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Съществуват числа $0 \le a \le b$ и ограничени функции $\phi, \psi \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ такива, че

$$f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)x + g(t,x)$$

и

$$\phi(t)\|x\|^{1+a} \le \|g(t,x)\| \le \psi(t)\|x\|^{1+b} \text{ за всяко } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times D.$$

(3) $0 < \|x(t;t_0,x_0)\| < 1$ за всяко $t \ge t_0$, $x_0 \in D \cap \mathbb{B}(1)$.

(4) Нека с $\|x(t;t_0,x_0)\|'$ означим лявата или дясната производна на функцията $\|x(t;t_0,x_0)\|$.

Тогава за всяка начална точка $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$ са валидни неравенствата:

$$\kappa_0(f,t)\|x(t;t_0,x_0)\| - \psi(t)\|x(t;t_0,x_0)\|^{1+b} \le \|x_0(t;t_0,x_0)\|' \le$$

$$\le \kappa^0(f,t)\|x(t;t_0,x_0)\| + \psi(t)\|x(t;t_0,x_0)\|^{1+b}; \tag{11}$$

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \le \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \kappa^0(f,r)dr \right) + \int_{t_0}^{t} \psi(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \kappa^0(f,r)dr \right) ds$$

и

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \ge \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \kappa_0(f,r)dr \right) - \int_{t_0}^{t} \psi(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \kappa_0(f,r)dr \right) ds.$$

Лема 3. Нека са изпълнени следните условия:

(1) $f \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n)$ и $f(t,0) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Нулевото решение на системата (10) е асимптотично устойчиво.

(3) Съществуват числа $0 \le a \le b$ и ограничени функции $\phi, \psi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $g \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n)$ такива, че

$$f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)x + g(t,x)$$

и

$$\phi(t)\|x\|^{1+a} \leq \left\langle g(t,x), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \leq \psi(t)\|x\|^{1+b} \text{ за всяко } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times D.$$

(4) Нека с $\|x(t;t_0,x_0)\|'$ означим лявата или дясната производна на функцията $\|x(t;t_0,x_0)\|$.

Тогава за всяко начално условие $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times (D \setminus 0)$ са валидни неравенствата:

$$\kappa_0(f,t)\|x(t;t_0,x_0)\| + \phi(t)\|x(t;t_0,x_0)\|^{1+a} \leq \|x(t;t_0,x_0)\|' \leq$$

$$\leq \kappa^0(f,t)\|x(t;t_0,x_0)\| + \psi(t)\|x_0(t;t_0,x_0)\|^{1+b}; \quad (12)$$

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \leq \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \kappa^0(f,r)dr\right) + \int_{t_0}^{t} \psi(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \kappa^0(f,r)dr\right) ds$$

и

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \geq \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \kappa_0(f,r)dr\right) + \int_{t_0}^{t} \psi(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \kappa_0(f,r)dr\right) ds.$$

В параграф 1.4 е формулиран и доказан следният резултат за сравнимост на нулевите решения на две системи диференциални уравнения, в зависимост от собствените стойности на съответните линейни части.

Теорема 3. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.1).
(2) Съществуват границите

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|f_1(t,x)\|}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \frac{\|f_2(t,x)\|}{\|x\|} = 0,$$

равномерно относно $t \in \mathbb{R}_+$.
(3) Всички собствени стойности λ_k и μ_k, $k = 1,\dots,n$, на матрицата A_1 и A_2, съответно, са реални отрицателни числа и $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ $(\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n)$.

Тогава:

(1) Ако $\lambda_n < \mu_1$, то $[f_1] \prec [f_2]$.
(2) Ако $\mu_n < \lambda_1$, то $[f_2] \prec [f_1]$.

Разглеждаме параметричното семейство системи

$$\dot{x} = f_c(t,x), \quad (13)$$

където $c \in J$, $J \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$. Нека освен това за всяко $c \in J$ за системата (13) са валидни условията (H 1.1) и координатното начало е устойчива стационарна точка на нея.

За системата (13) възниква следният въпрос: Може ли да се определи област $J_\prec$ $(J_\succ)$ в J^2 такава, че ако $(c_1,c_2) \in J_\prec$ $((c_1,c_2) \in J_\succ)$, то $[f_{c_1}] \prec [f_{c_2}]$ $([f_{c_1}] \succ [f_{c_2}])$? Естествено е такива области да наричаме *области на монотонно предхождане* в пространството от параметри на системата (13). Изучаването на тези области ни дава по-пълна представа за поведението на устойчивите равновесни състояния на системата (13) при промяна на параметъра c. Веднага ще отбележим, че в общия случай е невъзможно да получим достатъчно адекватни резултати за вида на областите на предхождане за системата (13).

Пример 3. Нека:

$$f_{a,d,k}(t,x) = A_{a,d,k}x + g(t,x), \quad A_{a,d,k} = \begin{pmatrix} -a & -d+1 & 0 \\ -a+1 & -d & 0 \\ a & -ka & -a-1 \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|g(t,x)\|}{\|x\|} = 0,$$

където a, d, k са реални числа такива, че $a > -1$ и $d > 1 - a$, $k \in \mathbb{R}$.

Пресмятаме собствените стойности на матрицата A:

$$\lambda_1(a,d,k) = -1, \ \lambda_2(a,d,k) = -a-1 \ \text{ и } \lambda_3(a,d,k) = -a-d+1.$$

От неравенствата $\lambda_i(a,d,k) < 0$, $i = 1,2,3$, следва, че $(0,0,0)$ е асимптотично устойчива стационарна точка на системата

$$\dot{x} = f_{a,d,k}(t,x) = Ax + g(t,x). \tag{14}$$

От теорема 3 следва, че ако $a_1 > -1$, $d_1 > 1 - a_1$, $a_2 > -1$, $d_2 > 1 - a_2$ и освен това, ако $a_2 < a_1$ и $d_2 < d_1$, то $[f_{s_1,d_1,k_1}] \prec [f_{a_2,d_2,k_2}]$ за всеки две числа $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Ще отбележим, че доколкото собствените стойности $\lambda_i(a,d,k)$, $i = 1,2,3$, на матрицата A не зависят от k, то "бързината" на привличане на решенията на системата (14) към нулевото решение също не зависи от k.

Нека

$$J = \{c : c = (a,d,k), a > -1, d > 1 - a, k \in \mathbb{R}\}.$$

Непосредствено се убеждаваме, че

$$J_{\prec} \{(c_1,c_2) \in J : c_i = (a_i,d_i,k_i), i = 1,2; a_1 < a_2, d_1 < d_2\mathbb{R}\}$$

и

$$J_{\succ} \{(c_1,c_2) \in J : c_i = (a_i,d_i,k_i), i = 1,2; a_1 > a_2, d_1 > d_2\mathbb{R}\}.$$

В параграф 1.4 с помощта на теорема 3 са изучени някои модели от биологията и медицината.

Ще се спрем по-подробно на следния пример.

Пример 4. Разглеждаме диференциалното уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 - a\dot{x} + bx = 0, \tag{15}$$

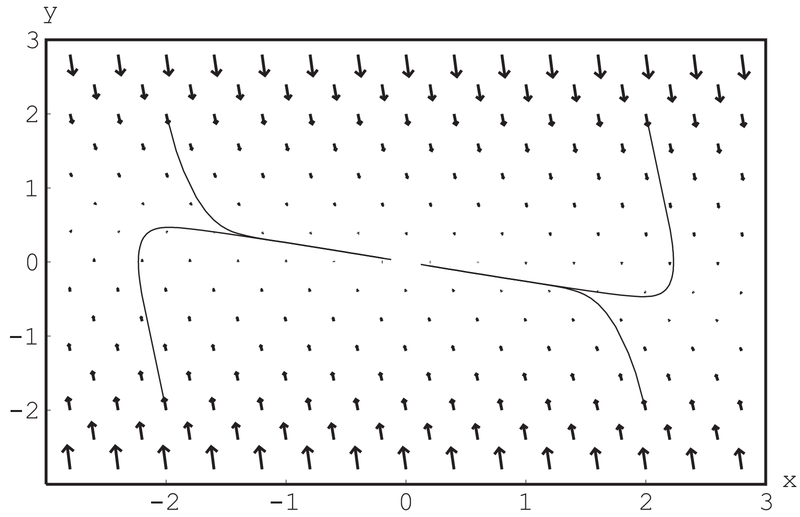
където и b са реални параметри. Уравнението (15) е частен случай на уравнението на Lieńard[3]. Това уравнение е модел на сърдечно-съдова дейност и циркулация на кръвта в човешкия организъм.

Полагаме $y = \dot{x}$ и получаваме системата

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -y^3 + ay - bx. \tag{16}$$

На фигура 0.1 е изобразен фазовият портрет на системата (16) при $a = -4$ и $b = 1$.

[3]вж. **[Zee73]**, **[MM76]**, **[VM97]**, и **[Tho82]**.



Фигура 1. Фазов портрет на системата (16) при $a = -4$ и $b = 1$

Линеаризираме системата (16) в околност на координатното начало. За целта полагаме

$$f_{a,b}(x) = \begin{pmatrix} y \\ -y^3 + ay - bx \end{pmatrix}, \quad A_{a,b} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Тогава съответната линеаризирана система има вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx + ay.$$

Собствените стойности на матрицата $A_{a,b}$ са

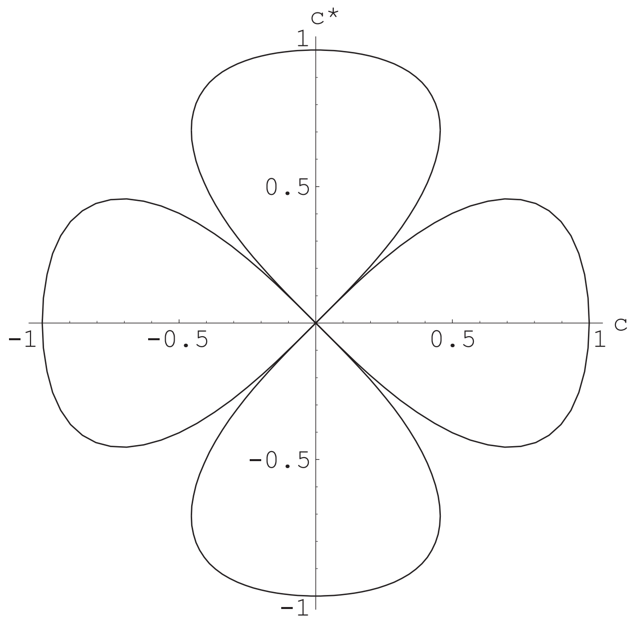
$$\lambda_1(a,b) = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2(a,b) = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Разглеждаме случая $b > 0, \; < -2\sqrt{b}$. Тогава $\lambda_{1,2}(a,b) < 0$ и очевидно $(0,0)$ е асимптотично устойчива стационарна точка на системата (16). Нека a_* и b_* са константи, които удовлетворяват неравенствата $a_* < -2\sqrt{b_*}$ и $b_* > 0$. Тогава, ако $\; < {}_*$ и $b = \frac{a^2 - a_*^2 + 4b_*}{4}$, то $\lambda_i(a,b) < \lambda_j(a_*, b_*)$, $i, j = 1, 2$. Ето защо от теорема 3 следва, че в този случай $[f_{a,b}] \prec [f_{a_*,b_*}]$. Например $[f_{-2,-\frac{1}{4}}] \prec [f_{-1,-1}]$.

Нека разгледаме параметрите a и b като функции на един параметър c. Например, нека $a(c) = -c^2$ и $b(c) = \frac{c^4 - c^6}{4}$, където $c \in [-1, 1]$. Полагаме $\lambda_i(c) = \lambda_i(a(c), b(c)) < 0$, $i = 1, 2$. Нека освен това c_* е фиксиран параметър. Неравенството $\lambda_2(c_*) < \lambda_1(c)$ добива вида

$$-c_*^2 + c_*^4 < -c^2 - c^4. \tag{17}$$

Ето защо от неравенствата $\lambda_1(c) < \lambda_2(c)$ и $\lambda_1(c_*) < \lambda_2(c_*)$ и теорема 3 следва, че за всяка стойност на параметъра c, за която е валидно неравенството (17), имаме $[f_{a(c_*),b(c_*)}] \prec [f_{a(c),b(c)}]$. Тези разсъждения могат да бъдат онагледени геометрично посредством диаграмата изобразена на фигура 0.2. На тази фигура е изобразена графика на неявната функция $c = c(c_*)$, която се задава посредством уравнението



Фигура 2. Област на монотонно предхождане

$-c_*^2 + c_*^4 = -c^2 - c^4$. Множеството $J_\prec$ от всички двойки (c, c_*), за които е валидно неравенството (17), т.е. за които $[f_{a(c),b(c)}] \prec [f_{a(c_*),b(c_*)}]$, лежи “вътре в вертикалната осмица”, изобразена на фигура 0.2. А множеството $J_\succ$ от всички двойки (c, c_*), за които е валидна импликацията $[f_{a(c),b(c)}] \succ [f_{a(c_*),b(c_*)}]$, лежи “вътре в хоризонталната осмица”, изобразена на фигура 0.2. В този случай са определени областите на монотонно предхождане. Очевидно $J_\prec \cup J_\succ \neq \mathbb{R}^2$. За параметрите от множеството $\mathbb{R}^2 \setminus (J_\prec \cup J_\succ)$ системите са несравними.

Ако $> 2\sqrt{b}$, то полагайки $\xi(t) = x(-t)$ и $\eta(t) = y(-t)$, можем да сведем разглежданията до аналогични на направените по-горе. За пълнота нека отбележим, че ако $\in [-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}]$, то $Im\,\lambda_i(a,b) \neq 0$. В този случай от класическата теорема на E. Hopf следва, че съществува еднопараметрично семейство от затворени орбити на системата (16) в околност на координатното начало.

В параграф 1.5 са получени твърдения за сравнимост на нулевите решения на системите (1) и (2), които се базират на понятието логаритмичен индекс на функция.

Дефиниция 3. Нека $h \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Числото $\mu \in \mathbb{R}_+$ се нарича *логаритмичен индекс* на функцията $h = h(t)$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват константи $C_i = C_i(\varepsilon) > 0$, $i = 1, 2$, такива, че:

(1) За всяко число $A \in \mathbb{R}_+$ съществува $t \geq A$ такова, че
$$\|h(t)\| \geq C_1 \exp(-(\mu + \varepsilon)t).$$

(2) За всяко $t \in \mathbb{R}_+$ е валидно неравенството
$$\|h(t)\| \leq C_2 \exp(-(\mu - \varepsilon)t).$$

Ако за всяко $\mu \in \mathbb{R}_+$ и за всяко $t \in \mathbb{R}_+$ е изпълнено неравенството
$$\|h(t)\| \leq C_2 \exp(-\mu t),$$

то логаритмичният индекс на функцията $h = h(t)$ е ∞.

Ако за всяко $\mu > 0$ и за всяко $A \in \mathbb{R}_+$ съществува $t \geq A$ такова, че

$$\|h(t)\| \geq C_1 \exp(-\mu t),$$

то логаритмичният индекс на функцията $h = h(t)$ е 0.

Забележка 1. Нека $\|h(t)\| \neq 0$ за всяко $t \in \mathbb{R}_+$. Тогава μ е логаритмичен индекс на функцията $h = h(t)$, ако[4]

$$\mu = -\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|h(t)\|.$$

Забележка 2. Непосредствено от дефиниция 1.9 следва, че ако $\mu > 0$ е логаритмичният индекс на функцията $h(t)$, то за всяко $\varepsilon > 0$ са валидни следните две равенствата:

$$\limsup_{t\to\infty} \|h(t)\| \exp((\mu+\varepsilon)t) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} \|h(t)\| \exp((\mu-\varepsilon)t) = 0. \tag{18}$$

Обратното твърдение също е вярно: Ако за константата $\mu > 0$ и за всяко $\varepsilon > 0$ са валидни равенствата (18), то μ е логаритмичен индекс на функцията $h(t)$.

Въвеждаме следните условия (H 0.4):

(H 0.4.1) Изпълнени са условията (H 0.2).

(H 0.4.2) Нулевите решения на системите (1) и (2) са асимптотично устойчиви.

(H 0.4.3) Съществуват числа a_i, b_i, $0 \leq a_i \leq b_i$ и ограничени функции $\phi_i, \psi_i \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $g_i \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n)$ такива, че за всяка точка $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D$ са изпълнени неравенствата:

$$f_i(t,x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,0)x + g_i(t,x)$$

и

$$\phi_i(t)\|x\|^{1+a_i} \leq \left\langle g_i(t,x), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \leq \psi_i(t)\|x\|^{1+b_i}, \quad i = 1, 2.$$

Валидна е следната теорема.

Теорема 4. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Изпълнено е условието (H 0.2).

(2) $\mu_1 = \mu_1(t_0, x_0)$ и $\mu_2 = \mu_2(t_0, x_0)$ са логаритмични индекси съответно на решенията $x_1(t; t_0, x_0)$ и $x_2(t; t_0, x_0)$ на системите (1) и (2), $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times (D \setminus \{0\})$.

(3) Нулевите решения на системите (1) и (2) са сравними.

(4) $\mu_1(t_0, x_0) > \mu_2(t_0, x_0)$ за всяка точка $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times (D \setminus \{0\})$.

Тогава $[f_1] \prec [f_2]$.

Ще отбележим, че условието $\mu_1 \neq \mu_2$ (вж. условието (4)) на теорема 4 е съществено.

[4] вж. [**Har64**, Chapter IV,§4].

Пример 5. Ако $\mu_1 = \mu_2 = const$, то нулевите решения на системите (1) и (2) са несравними относно релациите $\prec$, $\succ$ и $\sim$ в общия случай. Например, нека: $n = 1$, $x_0 > 0$,

$$f_1(t,x) = x\left(-2 + \cos t - t\sin t\right) \quad \text{и} \quad f_2(t,x) = x\left(-2 + t\cos t + \sin t\right).$$

Тогава:

$$x_1(t;0,x_0) = x_0 \exp(t(-2+\cos t)) \qquad \text{и} \qquad x_2(t;0,x_0) = x_0 \exp(t(-2+\sin t)).$$

Очевидно решенията $x_1(t;0,x_0)$ и $x_2(t;0,x_0)$ са асимптотично устойчиви.

Пресмятаме логаритмичните индекси на решенията $x_1(t;0,x_0)$ и $x_2(t;0,x_0)$:

$$\mu_1(0,x_0) = -\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(x_0 \exp(t(-2+\cos t))\right) = -\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\ln x_0 + t(-2+\cos t)\right) =$$

$$= \limsup_{t\to\infty}(2-\cos t) = 3,$$

$$\mu_2(0,x_0) = -\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(x_0 \exp(t(-2+\sin t))\right) = -\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\ln x_0 + t(-2+\sin t)\right) =$$

$$= \limsup_{t\to\infty}(2-\sin t) = 3.$$

Следователно, $\mu_1(0,x_0) = \mu_2(0,x_0) = 3$ за всяко $x_0 > 0$. От друга страна, очевидно

$$\frac{|x_1(t;0,1)|}{|x_2(t;0,1)|} = \exp(t(\cos t - \sin t)),$$

т.е.

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{|x_1(t;0,1)|}{|x_2(t;0,1)|} = 0 \qquad \text{и} \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{|x_1(t;0,1)|}{|x_2(t;0,1)|} = \infty.$$

Ето защо нулевите решения на разгледаните уравнения са несравними.

В следващата лема са получени две неравенства, които дават връзка между горната (долната) диференциална характеристика на функцията $f_1(t,x)$ и логаритмичните индекси на решенията на системата (1).

Лема 4. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.4).
(2) $\kappa_0(f_1,t) \le \kappa^0(f_1,t) \le \kappa < 0$, $t \in \mathbb{R}_+$.
(3) Съществува число $m < 0$ такова, че

$$m \le \frac{1}{t}\int_0^t \kappa_0(f_1,r)\,dr \quad \text{за всяко} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{19}$$

(4) $\mu_1 = \mu_1(t_1,x_1)$ е логаритмичният индекс на решението $x_1(t;t_1,x_1)$ на системата (1), $(t_1,x_1) \in \mathbb{R}_+ \times (D \setminus \{0\})$.

Тогава

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_1}\int_{t_1}^t \kappa_0(f_1,r)dr \le -\mu_1(t_1,x_1) \le \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_1}\int_{t_1}^t \kappa^0(f_1,r)dr \tag{20}$$

за всяко $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}_+ \times (D \setminus \{0\})$.

Пример 6. Разглеждаме системите

$$\dot{x} = f_i(t,x) = A_i(t,\varepsilon)x + \varepsilon g_i(t,x), \tag{21}$$

където

$$A_i(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} a_{i1}(t) & \varepsilon b_{i1}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{i2}(t) & \varepsilon b_{i2}(t) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{i3}(t) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{in-1}(t) & \varepsilon b_{in-1}(t) \\ \varepsilon b_{in}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{in} \end{pmatrix};$$

$_{ij}, b_{ij} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $i = 1,2$, $j = 1,\dots,n$; ε е реален положителен параметър; $g_i \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $g_i(t,0) = 0$. Нека са валидни условията (H 1.1).

Системите (21) се използуват за динамично моделиране на цикли в теория на графите и невронните мрежи. Такъв вид системи (системи на Turing) се използуват и при моделиране на преносни процеси в биологични клетки, вж. [**Sma80**].

Полагаме:

$$\begin{aligned} &a_{i\,max}(t) = \max\{a_{ij}(t) : j = 1,\dots,n\}, && t \in \mathbb{R}; \\ &a_{i0} = \sup\{a_{i\,max}(t) : t \in \mathbb{R}\}; \\ &b_{i\,max}(t) = \max\{b_{ij}(t) : j = 1,\dots,n\}, && t \in \mathbb{R}; \\ &b_{i0} = \sup\{|b_{i\,max}(t)| : t \in \mathbb{R}\}; \\ &g_{i\,max}(t) = \max\left\{\left\langle \tfrac{\partial g_i(t,0)}{\partial x}x, x\right\rangle : \|x\| = 1\right\}, && t \in \mathbb{R}; \\ &g_{i0} = \sup\{|g_{i\,max}(t)| : t \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

където $i = 1,2$.

Нека освен това са валидни следните условия:

$$_{i0} < 0, \quad b_{i0} < \infty, \quad g_{i0} < \infty, \quad i = 1,2; \tag{22}$$

$$\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[\subset \left]0, \max\left\{\frac{-a_{i0}}{\gamma_n b_{i0} + g_{i0}} : i = 1,2\right\}\right[, \tag{23}$$

където

$$\gamma_n = \max\left\{\sum_{k=1}^{n-1} x^k x^{k+1} + x^1 x^n : \|x\| = 1, x = (x^1,\dots,x^n)\right\}. \tag{24}$$

Ще покажем, че ако са изпълнени условията (22) и (23), то от неравенството

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t a_{1\,max}(r)\,dr < \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t a_{2\,max}(r)\,dr \tag{25}$$

следва $[f_1] \prec [f_2]$.

Преди всичко, от условието $g(t,0) = 0$ и дефиницията на функциите f_1, f_2 следва, че 0 е стационарна точка на системите (21). Нещо повече, от класическите теореми на Ляпунов за устойчивост по първо приближение[5] на нулево решение следва, че при достатъчно малко число $\varepsilon > 0$ нулевото решение на системите (21) е асимптотично устойчиво.

Преди да проверим условията на следствие 2 ще получим някои оценки за $\kappa_0(f_i, t)$ и $\kappa^0(f_i, t)$, $i = 1, 2$.

Непосредствено пресмятаме

$$\left\langle \frac{\partial f_i(t,0)}{\partial x}x, x \right\rangle = \langle A(t)x, x\rangle + \varepsilon \left\langle \frac{\partial g_i(t,0)}{\partial x}x, x \right\rangle \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)(x^k)^2 + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_{ik}(t)x^k x^{k+1} + b_{in}(t)x^1 x^n \right) + \varepsilon g_{i0} \leq$$

$$\leq a_{i\,max}(t)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + \varepsilon b_{i\,max}(t)\left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k x^{k+1} + x^1 x^n \right) + \varepsilon g_{i0}.$$

Ето защо

$$\kappa_0(f_i,t) \leq \kappa^0(f_i,t) \leq a_{i\,max}(t)\max\left\{ \sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 : \|x\| = 1 \right\} +$$

$$\varepsilon b_{i\,max}(t)\max\left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k x^{k+1} + x^1 x^n \right) : \|x\| = 1 \right\} + \varepsilon g_{i0} =$$

$$= a_{i\,max}(t) + \varepsilon b_{i\,max}(t)\gamma_n + \varepsilon g_{i0}.$$

От така полученото неравенство и условието (23) намираме

$$\kappa_0(f_i,t) \leq \kappa^0(f_i,t) \leq a_{i\,max}(t) + \varepsilon b_{i\,max}\gamma_n + \varepsilon g_{i0} \leq a_{i0} + \varepsilon_0 b_{i\,0}\gamma_n + \varepsilon_0 g_{i0} < 0,$$

с което е установено условието (2) на следствие 2.

Условието (3) на следствие 2 следва непосредствено от ограничеността на функциите $_{i\ max}(t)$

Следователно неравенство (25) гарантира импликацията $([f_1] \prec [f_2])_0$.

В параграф 1.6 са получени някои резултати за сравнимост на решения базиращи се на диференциални неравенства.

[5] вж. [**RHL77**, Chapter I, §6.14]

Въвеждаме следните условия (H 0.5):

(H 0.5.1) Изпълнени са условията (H 0.2).

(H 0.5.2) Нулевите решения на системите (1) и (2) са равномерно асимптотично устойчиви.

(H 0.5.3) Съществуват числа a_i, b_i, $0 \le a_i \le b_i$ и ограничени функции $\phi_i, \psi_i \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $g_i \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n)$ такива, че за всяка точка $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D$ имаме

$$f_i(t,x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,0)x + g_i(t,x)$$

и

$$\phi_i(t)\|x\|^{1+a_i} \le \left\langle g_i(t,x), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \le \psi_i(t)\|x\|^{1+b_i}, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 5. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.5).

(2) Съществува функция $H_1 \in C(\mathbb{R}_+ \times]0, \infty[, \mathbb{R})$ такава, че:

(а) Ако $t \in \mathbb{R}_+$; $y_1, y_2 \in D \setminus \{0\}$, то

$$(\kappa^0(f_1,t) - \kappa_0(f_2,t))\frac{\|y_1\|}{\|y_2\|} + \psi_1(t)\frac{\|y_1\|^{1+b_1}}{\|y_2\|} - \phi_2(t)\frac{\|y_1\|}{\|y_2\|^{1-a_2}} \le H_1\left(t, \frac{\|y_1\|}{\|y_2\|}\right).$$

(б) Съществува положително решение $u_1(t)$, $t \in [t_0, \infty[$, на диференциалното неравенство

$$\dot{u}_1 > H_1(t, u_1), \quad u_1(t_0) \ge 1, \tag{26}$$

където $t_0 \ge 0$.

Тогава:

(1) Валидно е неравенството

$$\frac{\|x_1(t; t_0, x_0)\|}{\|x_2(t; t_0, x_0)\|} \le u_1(t),$$

където $t \ge t_0$.

(2) Ако $\lim\limits_{t \to \infty} u_1(t) = 0$, то $[f_1] \prec [f_2]$.

(3) Ако $u_1(t)$ е ограничена функция, то $[f_1] \preceq [f_2]$.

Следствие 2. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.5).

(2) $\psi_1(t) \ge 0$ и $\phi_2(t) \le 0$ за всяко $t \ge 0$.

(3) Съществува положително решение $u_1(t)$, $t \in [0, \infty[$, на диференциалното неравенство

$$\dot{u}_1 > H_1(t, u_1) = (\kappa^0(f_1,t) - \kappa_0(f_2,t))u_1 + \psi_1(t)u_1^{1+b_1} - \phi_2(t)u_1^{1-a_2}, \quad u_1(t_0) \ge 1,$$

където $t_0 \ge 0$.

Тогава:

(1) Ако $\limsup\limits_{t \to \infty} u_1(t) < \infty$, то $[f_1] \preceq [f_2]$.

(2) Ако $\limsup\limits_{t \to \infty} u_1(t) = 0$, то $[f_1] \prec [f_2]$.

Теорема 6. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.5).
(2) Съществува функция $H_2 \in C([0,\infty[\times]0,\infty[,\mathbb{R})$ такава, че:
   (а) Ако $t \in [0,\infty[$, $y_1, y_2 \in D \setminus \{0\}$, то

$$(\kappa_0(f_1,t) - \kappa^0(f_2,t))\frac{\|y_1\|}{\|y_2\|} + \phi_1(t)\frac{\|y_1\|^{1+a_1}}{\|y_2\|} - \psi_2(t)\frac{\|y_1\|}{\|y_2\|^{1-b_2}} \geq H_2\left(t, \frac{\|y_1\|}{\|y_2\|}\right).$$

   (б) Съществува положително решение $u_2 = u_2(t)$, $t \in [0,\infty[$, на диференциалното неравенство

$$\dot{u}_2 < H_2(t,u_2), \quad u_2(t_0) \leq 1, \tag{27}$$

където $t_0 \geq 0$.

Тогава:

(1) За всяко $t \geq t_0$ е валидно неравенството

$$u_2(t) \leq \frac{\|x_1(t;t_0,x_0)\|}{\|x_2(t;t_0,x_0)\|}.$$

(2) Ако $\lim\limits_{t\to\infty} u_2(t) = \infty$, то $[f_1] \succ [f_2]$.
(3) Ако $\liminf\limits_{t\to\infty} u_2(t) > 0$, то $[f_1] \succeq [f_2]$.

Следствие 3. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Изпълнени са условията (H 0.5).
(2) $\phi_1(t) \leq 0$ и $\psi_2(t) \geq 0$ за всяко $t \geq 0$.
(3) Съществува положително решение $u = u_2(t)$, $t \in [0,\infty[$, на диференциалното неравенство

$$\dot{u}_2 < H_2(t,u_2) = (\kappa_0(f_1,t) - \kappa^0(f_2,t))u_2 + \phi_1(t)u_2^{1+a_1} - \psi_2(t)u_2^{1-b_2}, \quad u_2(t_0) \leq 1,$$

където $t_0 \geq 0$.

Тогава

(1) Ако $\limsup\limits_{t\to\infty} u_2(t) > 0$, то $[f_1] \succeq [f_2]$.
(2) Ако $\limsup\limits_{t\to\infty} u_2(t) = \infty$, то $[f_1] \succ [f_2]$.

Теорема 7. Нека са изпълнени условията на теорема 5 и теорема 6 и нека

$$0 < \liminf_{t\to\infty} u_2(t)\ ,\ \limsup_{t\to\infty} u_1(t) < \infty.$$

Тогава $[f_1] \sim [f_2]$.

В параграф 1.7 са въведени бинарните релации *слабо предхождане, еквивалентност и следване* на решения. За тяхната дефиниция са необходими следните означения

$$l(t_1,t_2,x_1,x_2) = \liminf_{t\to\infty} \frac{\|x_1(t;t_1,x_1)\|}{\|x_2(t;t_2,x_2)\|}$$

и

$$L(t_1,t_2,x_1,x_2) = \limsup_{t\to\infty} \frac{\|x_1(t;t_1,x_1)\|}{\|x_2(t;t_2,x_2)\|},$$

където $(t_i,x_i) \in \mathbb{R}_+ \times D$, $i = 1,2$.

Дефиниция 4. Нека са изпълнени условията (H 0.1.1) и (H 0.1.2). Ще казваме, че:

(1) Системата (1) *слабо предхожда* системата (2) в областта D, ако за всяка точка $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}_+ \times D$ съществува точка $(t_2, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times D$ такава, че $L(t_1, t_2, x_1, x_2) = 0$. В този случай ще записваме $[f_1] \prec_w [f_2]$.

(2) Системата (1) е *слабо еквивалентна* на системата от (2) в областта D, ако за всяка точка $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}_+ \times D$ съществува точка $(t_2, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times D$ такава, че

$$0 < l(t_1, t_2, x_1, x_2) \le L(t_1, t_2, x_1, x_2) < \infty. \tag{28}$$

В този случай ще записваме $[f_1] \sim_w [f_2]$.

(3) Системата (1) *не следва слабо* системата от (2) в областта D, ако за всяка точка $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}_+ \times D$ съществува точка $(t_2, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times D$ такава, че $L(t_1, t_2, x_1, x_2) < \infty$. В този случай ще записваме $[f_1] \preceq_w [f_2]$.

Преди да формулираме някои необходими и достатъчни условия за слаба сравнимост на разглежданите системи в областта D ще приведем твърдения, които следват непосредствено от дефиниция 4.

Теорема 8. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Изпълнени са условията (H 0.1.1) и (H 0.1.2), където $D = \mathbb{R}^n$.

(2) Всички решения на системата от (2) са (равномерно) ограничени.

(3) $[f_1] \preceq_w [f_2]$.

Тогава всички решения на системата от (1) са (равномерно) ограничени.

Теорема 9. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Изпълнени са условията (H 0.1.1) и (H 0.1.2), където D е ограничена област, която съдържа координатното начало.

(2) Нулевото решение на системата от (2) е устойчиво в бъдеще.

(3) $[f_1] \preceq_w [f_2]$.

Тогава нулевото решение на системата от (1) е устойчиво в бъдеще.

Ще припомним дефиницията за монотонен поток, породен от система диференциални уравнения.

Дефиниция 5. Ще казваме, че системата от (1) *поражда монотонен поток*, ако за всеки две начални точки $x_1', x_1'' \in D$, $\|x_1'\| \le \|x_1''\|$, е валидно неравенството

$$\|x_1(t; x_1')\| \le \|x_1(t; x_1'')\| \text{ за всяко } t \in \mathbb{R}_+.$$

Дефиниция 6. Нека са изпълнени условията (H 0.1). Ще казваме, че импликацията $[f_1] \preceq_w [f_2]$ е *равномерно ограничена* в D, ако за всеки две точки $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times D$, $\|x_2\| \le \|x_1\|$ съществува константа $L > 0$ такава, че $L(t_1, t_2, x_1, x_2) \le L < \infty$. В този случай ще записваме $[f_1] \preceq_{ww} [f_2]$. Аналогично ако за всеки две точки $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times D$, $\|x_2\| \le \|x_1\|$ имаме $L(t_1, t_2, x_1, x_2) = 0$, то ще пишем $[f_1] \prec_{ww} [f_2]$.

В следващата теорема е получена една връзка между понятията (асимптотична) устойчивост на нулевото решение на системата от (1) и въведените релации $(\prec)$ $\preceq$.

Теорема 10. Нека са изпълнени условията (H 0.1).
Тогава:

(1) Ако нулевото решение на системата от (1) е устойчиво, то $[f_1] \preceq [0]$ в достатъчно малка околност $\mathbb{B}_\delta$.

(2) Ако $[f_1] \preceq_{ww} [0]$ в достатъчно малка околност $\mathbb{B}_\delta$ и системата от (1) поражда монотонен поток, то нулевото решение на системата от (1) е устойчиво.
(3) Ако нулевото решение на системата от от (1) е асимптотично устойчиво, то $[f_1] \prec [0]$ в достатъчно малка околност $\mathbb{B}_\delta$.
(4) Ако $[f_1] \prec_{ww} [0]$ в достатъчно малка околност $\mathbb{B}_\delta$ и системата от от (1) има устойчиво нулево решение, то това решение е асимптотично устойчиво.

В параграф 1.8 е въведено понятието *адитивна сравнимост* на решенията на две системи диференциални уравнения.

Дефиниция 7. Нека са изпълнени условията (H 0.1.1) и (H 0.1.2). Ще казваме, че системата от от (2) е *асимптотично еквивалентна* на системата от (1) в областта D, ако за всяко решение $x_2(t;t_0,x_0)$, $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$, съществува решение $x_1(t;t_0,x_0)$ такова, че

$$\lim_{t\to\infty} \|x_1(t;t_0,x_0) - x_2(t;t_0,x_0)\| = 0.$$

В следващата теорема е формулирано едно достатъчно условие за асимптотична еквивалентност на разглежданите системи. Идеята на доказателството се базира на топологичния принцип в теорията на обикновените диференциални уравнения.

Теорема 11. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.1.1) и (H 0.1.2); $t_0 \in \mathbb{R}_+$; $x_2 \in D$.
(2) $g \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$; $u(t;t_0,u_0)$ е положително решение на диференциалното неравенство

$$\dot{u} < g(t,u), \quad t \ge t_0 \tag{29}$$

с начално условие $u(t_0) = u_0$, където $(t_0,u_0) \in \mathbb{R}_+^2$.
(3) Съществуват константа $h_0 > 0$ и непрекъсната функция $\varepsilon(h,t,y)$ такива, че неравенството

$$\|\xi - x_2(t;t_0,x_2) + h(f_1(t,\xi) - f_2(t,x_2(t;t_0,x_2)))\| \ge$$

$$\ge \|\xi - x_2(t;t_0,x_2)\| + hg\left(t, \|\xi - x_2(t;t_0,x_2)\|\right) + \varepsilon(h,t,\xi) \tag{30}$$

е валидно за $(h,t,\xi) \in]-h_0,h_0[\times]t_0,\infty[\times D$; $x_2 \in D$ и границата

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h,t,\xi)}{h} = 0$$

е равномерна относно $(t,\xi) \in [t_0,\infty[\times D$.

Тогава съществува точка $x_1 \in D$ такава, че

$$\|x_1(t;t_0,x_1) - x_2(t;t_0,x_2)\| < u(t;t_0,u_0) \text{ за всяко } t > t_0. \tag{31}$$

Следствие 4. Нека са изпълнени условията на теорема 11, системата от (1) притежава нулево устойчиво решение и нека освен това за всяка точка $(t_0,u_0) \in \mathbb{R}_+^2$ неравенството (30) има решение $u(t;t_0,u_0)$ такова, че $0 < u(t;t_0,u_0) \le u_0$.

Тогава нулевото решение на системата от (2) е устойчиво.

Следствие 5. Нека са изпълнени всички условия на теорема 11, системата от (1) притежава нулево асимптотично устойчиво решение и нека освен това за всяка точка $(t_0,u_0) \in \mathbb{R}_+^2$ неравенството (29) има решение $u(t;t_0,u_0)$ такова, че $\lim_{t\to\infty} u(t;t_0,u_0) = 0$.

Тогава нулевото решение на системата от (2) е асимптотично устойчиво.

В следствия 4 и 5 предполагаме съществуването на нулево (асимптотично) устойчиво решение на системата от (1). В следващата теорема е приведен един резултат за (асимптотична) устойчивост на нулевото решение на системата от (1), който се базира на неравенство, аналогично на неравенството (30).

Теорема 12. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.1.1) и (H 0.1.2).
(2) $g \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, $g(t,0) = 0$.
(3) $u(t; t_0, u_0)$, $t \geq t_0$, е положително решение на уравнението

$$\dot{u} = g(t, u) \tag{32}$$

с начално условие $u(t_0) = u_0$, където $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2_+$.
(4) Съществуват константа $h_0 > 0$ и непрекъсната функция $\varepsilon(h, t, y)$ такива, че неравенството

$$\|\xi + hf_1(t, \xi)\| \leq \|\xi\| + hg(t, \|\xi\|) + \varepsilon(h, t, \xi) \tag{33}$$

е валидно за $(h, t, \xi) \in]-h_0, h_0[\times]t_0, \infty[\times D$ и границата

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h, t, \xi)}{h} = 0$$

е равномерна относно $(t, \xi) \in [t_0, \infty[\times D$.

Тогава, ако нулевото решение на уравнението (32) е (асимптотично) устойчиво, то и нулевото решение на системата от (1) е асимптотично устойчиво.

Получените твърдения ни позволяват да приведем нови доказателства на някои класически теореми за устойчивост на нулевото решение на система обикновени диференциални уравнения. По-надолу ще посочим някои такива резултати.

Нека $f_2(t, x) = Ax$, където A е константна $n \times n$ матрица, т.е. разглеждаме линейната система с постоянни коефициенти

$$\dot{x} = Ax. \tag{34}$$

Нека I е идентитета в $\mathbb{R}^n$. От равенството

$$\|x + hAx\| \leq \|I + hA\|\|x\| + \varepsilon_1(h, x),$$

където $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varepsilon_1(h,x)}{h} = 0$, следва, че

$$\|x + hAx\| - \|x\| \leq (\|I + hA\| - 1)\, \|x\| + \varepsilon_1(h, x). \tag{35}$$

Ето защо, дефинирайки *логаритмичната норма* на матрицата A чрез равенството

$$l(A) = \lim_{h \to +0} \frac{\|I - hA\| - 1}{h},$$

виждаме, че

$$\|x + hAx\| \leq \|x\| + hl(A)\|x\| + \varepsilon(h, x),$$

където $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h,x)}{h} = 0$.

Нека $l(A) < 0$. Полагаме

$$g(t, u) = l(A)u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, $g(t,0)=0$ и едно решение на неравенството $\dot{u}<g(t,u)$, което минава през точката $(t_0,u_0)\in\mathbb{R}^2_+$, е

$$u(t;t_0,u_0)=u_0\exp\left(2l(A)(t-t_0)\right).$$

Следователно от теорема 12 получаваме следния добре известен резултат[6]: Ако $l(A)<0$, то нулевото решение $x(t;0,0)=0$ на линейната система (34) е асимптотично устойчиво. Аналогично е доказателството и на следното твърдение: Ако $l(A)\le 0$, то нулевото решение $x(t;0,0)=0$ на линейната система (34) е устойчиво.

Нека $f_2(t,x)=A(t)x$, където $A(t)$ е непрекъсната $n\times n$ матрица. В този случай $g(t,u)=l(A(t))u$.

Не е трудно да се провери, че $l(A(t))$ и $g(t,x)$ са непрекъснати функции. Освен това едно решение на неравенството $\dot{u}<g(t,u)$ е

$$u(t;t_0,u_0)=u_0\exp\left(2\int\limits_{t_0}^{t}l(A(s))\,ds\right)$$

и следователно нулевото решение на системата $\dot{x}=A(t)x$ е устойчиво, ако

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}l(A(s))\,ds<\infty.$$

Нулевото решение на разглежданата система е асимптотично устойчиво, ако

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}l(A(s))\,ds=-\infty.$$

В параграф 1.9 са формулирани и доказани два резултата, които са аналогични на резултатите за адитивна сравнимост от предходният параграф. В този параграф разглеждаме системите

$$M\ddot{x}+\dot{x}=f(t,x) \tag{36}$$

и

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{37}$$

където: $M\ge 0$; $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$.

Нека $x_{11},x_{12},x_2\in\mathbb{R}^n$ са фиксирани точки и $t_0\in\mathbb{R}_+$ е фиксиран момент.

С $x_1(t;t_0,x_{11},x_{12})$ и $x_2(t;t_0,x_2)$ ще означаваме съответните решения на системите (36) и (37), определени от началните условия:

$$x_1(t_0;t_0,x_{11},x_{12})=x_{11},\quad \dot{x}_1(t_0;t_0,x_{11},x_{12})=x_{12} \tag{38}$$

и

$$x_2(t_0;t_0,x_2)=x_2. \tag{39}$$

Въвеждаме следните условия (Н 0.6):

[6]вж. [**Ama90**], [**Rob95**], [**Yos66**]

(H 0.6.1) D е област в $\mathbb{R}^n$; $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+ \times D, \mathbb{R}^n)$.

(H 0.6.2) Функцията f е Липшицова по втория си аргумент с константа на Липшиц $L \geq 0$.

(H 0.6.3) За всеки три начални точки $x_{11}, x_2 \in D$, $x_{12} \in \mathbb{R}^n$ и за всеки начален момент $t_0 \in \mathbb{R}_+$ задачите на Коши (36), (38) и (37), (39) имат единствени решения $x_1(t; t_0, x_{11}, x_{12})$ и $x_2(t; t_0, x_2)$ съответно, които са продължими в t-интервала $\mathbb{R}_+$ и

$$\{x_1(t; t_0, x_{11}, x_{12}) : t \in \mathbb{R}_+\} \subset D, \ \{x_2(t; t_0, x_2) : t \in \mathbb{R}_+\} \subset D.$$

Валидна е следната теорема.

Теорема 13. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.6).
(2) $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_{11} \in D$, $x_{12} \in \mathbb{R}^n$ са фиксирани начални условия на задачата (36), (38).
(3) Съществува число $\sigma > 0$ такова, че

$$\lim_{t \to \infty} e^{(L+\sigma)t} \|\dot{x}_1(t; t_0, x_{11}, x_{12})\| = 0.$$

Тогава съществува начално условие $x_2 \in D$ на задачата (37), (39) такова, че

$$\lim_{t \to \infty} \|x_1(t; t_0, x_{11}, x_{12}) - x_2(t; t_0, x_2)\| = 0. \tag{40}$$

Аналогично на теорема 13 се доказва и следната теорема.

Теорема 14. Нека са изпълнени следните условия:

(1) Валидни са условията (H 0.6).
(2) $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_{11}, x_{12} \in D$ са фиксирани начални условия на задачата (36), (38).
(3) Съществува число $\sigma > 0$ такова, че

$$\lim_{t \to \infty} e^{(L+\sigma)t} \|\ddot{x}_1(t; t_0, x_{11}, x_{12})\| = 0.$$

Тогава съществува начално условие $x_2 \in D$ на задачата (37), (39) такова, че

$$\lim_{t \to \infty} \|x_1(t; t_0, x_{11}, x_{12}) - x_2(t; t_0, x_2)\| = 0. \tag{41}$$

В глава 2 е поставена една задача за структурна устойчивост на решения на системи диференциални уравнения. Поставената задача обобщава класическия проблем за структурна устойчивост. За да изясним постановката, ще въведем някои подходящи дефиниции.

Нека $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Разглеждаме системата

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{42}$$

и съответната и пертурбирана система

$$\dot{x} = f(x) + g(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^m, \tag{43}$$

където $g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Дефиниция 8. Нека $\mathcal{M}$ е подмножество в пространството $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ и нека нулевата функция е гранична точка на $\mathcal{M}$. Ще казваме, че периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е $\mathcal{M}$–*структурно устойчиво*, ако съществува околност $\mathcal{U}$ на нулевата функция в $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ такава, че системата (43) има периодично решение $x = \bar{x}_\varepsilon(t)$ за всяко $g \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{M}) \setminus \{0\}$ и следната граница

$$\lim_{\|g\| \longrightarrow 0,\ g \in \mathcal{U} \cap \mathcal{M}} \|\bar{x}(t) - \bar{x}_\varepsilon(t)\| = 0 \tag{44}$$

е равномерна относно $t \in \mathbb{R}$.

Очевидно, ако $\mathcal{M} = \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то задачата за определяне на $\mathcal{M}$–структурно устойчиви периодични орбити на системата (42) съвпада с класическата задача за съществуване на периодични решения на пертурбираната система (43).

Ако

$$\mathcal{M} = \{g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : g_k(x, \varepsilon) = \dots = g_n(x, \varepsilon) = 0$$

$$\text{за някое } k \in \{1, \dots, n\}\},$$

то задачата за определяне на $\mathcal{M}$–структурно устойчиви орбити на системата (42) съвпада с проблема за съществуване на периодични решения на системата (43) при наличие на “малки” пертурбации на част от уравненията на системата (42).

Едни от основните въпроси, свързани с така въведеното понятие $\mathcal{M}$-структурна устойчивост на периодични решения е: да се намери “максималното” множество $\mathcal{M}$, за което периодичното решение на системата (42) е $\mathcal{M}$-структурно устойчиво. Тук термина “максимално” е използван в смисъл на включване, т.е. ако $\mathcal{M}_1$ е подмножество на $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ такова, че периодичното решение на системата (42) е $\mathcal{M}_1$-структурно устойчиво, то $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$.

За съжаление комплицираната структура на “максималното” множество $\mathcal{M}$ с указаното по-горе свойство не позволява формулирането на достатъчно конкретни резултати. Ето защо ще разгледаме един конкретен и едновременно с това достатъчно общ случай, при който множеството $\mathcal{M}$ има “линейна структура”.

Въвеждаме следните условия (H 0.8):

- (H 0.8.1) За всяко начално условие системите (42) и (43) имат единствени $\mathbf{C}^\infty$-гладки решения, които са дефинирани в $\mathbb{R}$ и зависят непрекъснато от началните условия.
- (H 0.8.2) $g(x, 0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- (H 0.8.3) Системата (42) има ω-периодично решение $x = \bar{x}(t)$, $\omega > 0$.

Изрично ще отбележим, че в условието (H 0.8.3) не се изисква единственост на ω-периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42).

Дефиниция 9. Нека са изпълнени условията (H 0.8). Ще казваме, че периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е (g, d)–*структурно устойчиво*, ако съществуват околност U на нулата в $\mathbb{R}^d$, $d \le m$ и $\mathbf{C}^\infty$–гладко изображение $\varepsilon : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, такива, че $\varepsilon(0) = 0$, системата

$$\dot{x} = f(x) + g(x, \varepsilon(v)) \tag{45}$$

има периодично решение $x = \bar{x}_v(t)$ за всяко $v \in U$, rank $\frac{\partial \varepsilon(0)}{\partial v} \neq 0$ и

$$\lim_{\|v\| \longrightarrow 0} \|\bar{x}(t) - \bar{x}_v(t)\| = 0,$$

равномерно относно $t \in \mathbb{R}$.

Забележка 3. Не е трудно да се съобрази, че за всяка автономна система (42) съществува функция $g = g(x, \varepsilon)$ такава, че ω-периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е (g, n)-структурно устойчиво. Наистина, ако положим $g(x, \varepsilon) = f(x - \varepsilon) - f(x)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, то системата (45) има ω-периодично решение $\bar{x}_\varepsilon(t) = \bar{x}(t) + \varepsilon$.

Ясно е, че съществуват функции $f = f(x)$ и $g = g(x, \varepsilon)$ такива, че системата (42) има периодично решение, но системата (43) няма периодично решение.

Забележка 4. Ако за всяка функция $g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е $(g, 1)$-структурно устойчиво, то се достига до класическата задача за съществуване на периодични решения на пертурбираната система (43).

Допълнително ще изясним въведените дефиниции с помощта на следните два примера.

Пример 7. В цилиндрична координатна система (ρ, ϕ, z) разглеждаме системата

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho), \ \dot{\phi} = 1, \ \dot{z} = 0 \tag{46}$$

и пертурбираната система

$$\dot{\rho} = \rho(1 + \varepsilon_1 - \rho) = \rho(1 - \rho) + \varepsilon_1 \rho, \ \dot{\phi} = 1 + \varepsilon_2, \ \dot{z} = \varepsilon_3, \tag{47}$$

където $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}$.

Очевидно, всяко решение на системата (46), определено от точка с координати $(1, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, е периодично. Ако $\varepsilon_1 > -1$, $\varepsilon_2 \neq -1$ и $\varepsilon_3 = 0$, то системата (47) също притежава периодични решения. Не е трудно да се съобрази, че ако $\varepsilon_3 \neq 0$, то всяко решение на системата (47) не е периодично, доколкото в този случай $z(t)$ е монотонна (растяща или намаляваща) функция.

Ето защо периодичните решения на системата (46) са $(g, 2)$-структурно устойчиви, където $g(\rho, \phi, z, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1 \rho, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Периодичните решения на системата (46) не са $(g, 3)$-структурно устойчиви.

Преди да формулираме някои достатъчни условия за (g, d)-структурна устойчивост на ω-периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42), ще формулираме два резултата, които се използват в доказателството на следващите твърдения (вж. параграф 2.1).

Нека $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ са Хилбертови пространства. По-надолу с $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ ще бележим директната сума на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Ако $\mathcal{W}$ е затворено подпространство на $\mathcal{X}$, то с $\mathcal{W}^\perp$ означаваме ортогоналното допълнение на $\mathcal{W}$. Освен това полагаме $\mathbb{B}_\mathcal{X}(x_0, r) = \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| < r\}$, където $x_0 \in \mathcal{X}$, $r > 0$ и $\| \cdot \|$ е норма в $\mathcal{X}$.

Нека $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$, $(x, y) \longrightarrow F(x, y)$ е $\mathbf{C}^\kappa$–гладко изображение, $\kappa \in \mathbb{N}$. С $\mathcal{D}_x F(x, y)$ ($\mathcal{D}_y F(x, y)$) ще означаваме производната на изображението F относно първия (втория) аргумент. Ако $L : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ е линеен оператор, то с $\ker L$ ($\operatorname{im} L$) ще означаваме ядрото (образа) на L.

Първо, ще формулираме следната лема.

Лема 5. Нека са изпълнени следните условия:

(1) $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ са Хилбертови пространства; $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ е $\mathbf{C}^1$–гладко изображение и $F(0,0) = 0$.

(2) Съществува затворено подпространство $\mathcal{W} \subseteq (\ker \mathcal{D}_y F(0,0))^{\perp}$ такова, че

$$\dim \ker \mathcal{D}_x F(0,0) = \dim \mathcal{W} = d < \infty \tag{48}$$

и

$$\mathcal{Z} = \operatorname{im} \mathcal{D}_x F(0,0) \oplus \operatorname{im} \mathcal{D}_y F(0,0)|_{\mathcal{W}}. \tag{49}$$

(3) Съществува число $M > 0$ такова, че

$$\|\mathcal{D}_\alpha F(x,v) - \mathcal{D}_\alpha F(x,0)\| \le \frac{M}{2}\|v\|, \quad (x,v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{W}^{\perp},\ \alpha \in \{x,y\}. \tag{50}$$

Тогава:

(1) Съществуват константа $r_1 > 0$ и единствени $\boldsymbol{C^1}$–гладки изображения $f : \mathbb{B}_{\mathcal{W}^{\perp}}(0,r_1) \longrightarrow \mathcal{X}$, $g : \mathbb{B}_{\mathcal{W}^{\perp}}(0,r_1) \longrightarrow \mathcal{Y}$ такива, че $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ и

$$F(f(v), g(v)) = 0 \;\text{ за всяко } v \in \mathbb{B}_{\mathcal{W}^{\perp}}(0,r_1). \tag{51}$$

(2) Ако операторът $\mathcal{D}_y F(0,0)|_{\mathcal{W}^{\perp}}$ е изоморфизъм между Хилбертовите пространства $\mathcal{W}^{\perp}$ и $\operatorname{im} \mathcal{D}_y F(0,0)|_{\mathcal{W}^{\perp}}$, то съществува константа $r_1' \in (0,r_1)$ такава, че изображенията $f|_{\mathbb{B}_{\mathcal{W}^{\perp}}(0,r_1')}$ и $g|_{\mathbb{B}_{\mathcal{W}^{\perp}}(0,r_1')}$ са влагания.

(3) Нека $\pi_x : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ ($\pi_y : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$) са проекции върху $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, съответно, т. е. $\pi_x(x,y) = x$ ($\pi_y(x,y) = y$). Нека освен това $L(x,y)$ е ограничен линеен оператор, дефиниран чрез

$$\begin{aligned} &L(x,y) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}, \\ &L(x,y) = \mathcal{D}_x F(x,y) \circ \pi_x + \mathcal{D}_y F(x,y) \circ \pi_y. \end{aligned} \tag{52}$$

Нека $L(0,0)$ е изоморфизъм; $\mathbf{1}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ е идентитетът на пространството $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ и нека числата $r_2, r_3 > 0$ са избрани така, че

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} - L^{-1}(0,0)L(x,0)\| < \frac{1}{4} \;\text{ за всяко } x \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}(0,r_2), \tag{53}$$

$$r_3 M \|L^{-1}(0,0)\| < \frac{1}{8}, \tag{54}$$

$$\|L^{-1}(0,0)\|\|L(0,y)\| < \frac{r_2}{4} \;\text{ за всяко } y \in \mathbb{B}_{\mathcal{Y}}(0,r_3). \tag{55}$$

Тогава $r_1 \ge r_3$ и $(f(v), g(v)) \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}(0,r_2)$ за всяко $v \in \mathbb{B}_{\mathcal{W}^{\perp}}(0,r_1)$.

Дефиниция 10. Нека $L : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}$ е ограничен линеен оператор и нека $\operatorname{coker} L = \mathcal{Z}/\operatorname{im} L$ е коядрото на L. Тогава операторът L се нарича *Фредхолмов с индекс нула*, ако $\dim \ker L < \infty$, $\dim \operatorname{coker} L < \infty$ и $\dim \ker L = \dim \operatorname{coker} L$.

Лема 6. Нека са изпълнени следните условия:

(1) $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ са Хилбертови пространства; $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ е $\boldsymbol{C^1}$–гладко изображение и $F(0,0) = 0$.

(2) Съществува затворено подпространство $\mathcal{W} \subseteq (\ker \mathcal{D}_y F(0,0))^{\perp}$ такова, че е валидно равенство (48) и нека

$$\operatorname{im} \mathcal{D}_x F(0,0) \cap \operatorname{im} \mathcal{D}_y F(0,0)|_{\mathcal{W}} = \{0\}. \tag{56}$$

Тогава неравенството (49) е изпълнено, тогава и само тогава когато $\mathcal{D}_x F(0,0)$ е Фредхолмов оператор с индекс нула, т. е.

$$\dim \ker D_x F(0,0) = \dim \operatorname{coker} D_x F(0,0). \tag{57}$$

В параграф 2.3 на глава 2 са приведени някои достатъчни условия за (g,d)-структурна устойчивост на ω-периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42).

Нека са изпълнени условията (H 0.8). Нека $A(t) = \mathcal{D}_x f(x)|_{x=\bar{x}(t)}$ и $A^*(t)$ е транспонираната матрица на $A(t)$. Разглеждаме системите

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{58}$$

и спрегнатата система

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi \in \mathbb{R}^n. \tag{59}$$

Нека $\{\widetilde{\psi}_1(t), \ldots, \widetilde{\psi}_d(t)\}$, $d \leq n$ е базис на пространството от всички периодични решения на системата (59). Полагаме

$$b_{ij} = \int_0^{\omega} \left\langle \widetilde{\psi}_i(t), \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_j}(\bar{x}(t), 0) \right\rangle dt, \tag{60}$$

където $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Нека с $B = (b_{ij})$ означим $d \times m$ матрица с елементи (60).

Теорема 15. Нека са изпълнени условията (H 0.8) и нека $\operatorname{rank} B = d < m$.

Тогава ω-периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е $(g, m-d)$-структурно устойчиво. Нещо повече съществува число $r_0 > 0$ такова, че ако $x = \bar{x}_v(t)$ е периодично решение на системата (45) и

$$\{\bar{x}_v(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \bigcup_{t \in [0,\omega)} \{\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}(t), r_0)\},$$

то периодът на $x = \bar{x}_v(t)$ е също ω.

Нека

$$b_{i\,m+1} = \int_0^{\omega} \left\langle \widetilde{\psi}_i(t), \dot{\bar{x}}(t) \right\rangle dt, \tag{61}$$

където $i \in \{1, \ldots, d\}$; с $B_0 = (b_{ij})$ сме означили $d \times (m+1)$ матрица с елементи (60) и (61).

Теорема 16. Нека са изпълнени условията (H 0.8) и нека $\operatorname{rank} B_0 = d < m$.

Тогава периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е $(g, m-d)$-структурно устойчиво.

Основна цел на параграф 2.4 на глава 2 е да се докажат някои класически твърдения от теорията на структурно устойчиви динамични системи с помощта на резултатите от предния параграф. Преди това са доказани следните помощни твърдения.

Лема 7. Нека са изпълнени условията (H 0.8.1) и (H 0.8.2).
Тогава следните две твърдения са еквивалентни:

(1) $\int\limits_0^\omega \left\langle \widetilde{\psi}_i(t), \dot{\bar{x}}(t) \right\rangle dt \neq 0$ за някое $i \in \{1, \ldots, d\}$.

(2) 1 е прост характеристичен мултипликатор на (58).

Основните резултати са формулирани под формата на следствия от горната лема.

Следствие 6. Нека са изпълнени условията (H 0.8) и нека

$$\int\limits_0^\omega \left\langle \widetilde{\psi}_i(t), \dot{\bar{x}}(t) \right\rangle dt \neq 0 \quad \text{за някое } i \in \{1, \ldots, d\}.$$

Тогава периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е структурно устойчиво.

Доказателството на следствие 6 следва непосредствено от теорема 16.

Следствие 7. Нека са изпълнени условията (H 0.8) и нека 1 е прост характеристичен мултипликатор на (58).
Тогава периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е структурно устойчиво.

Доказателството на това следствие следва непосредствено от теорема 16 и лема 7.

Следствие 8. Нека са изпълнени условията (H 0.8) и нека периодичното решение $x = \bar{x}(t)$ на системата (42) е хиперболично.
Тогава периодичното решение на системата (42) е структурно устойчиво.

Дисертационният труд е подготвен на LaTeX — TeX, Version 3.14159 [3ε]. Всички фигури са подготвени на програмите Mathematica, Enhanced Version 3.0.

Заключение

Дисертацията е посветена на проблеми от качествената теория на обикновени диференциални уравнения. Основни обекти на изследване са следните три задачи:

(1) (асимптотична) устойчивост на орбити и нулеви стационарни решения на системи обикновени диференциални уравнения;
(2) асимптотична сравнимост на решения на две системи диференциални уравнения;
(3) съществуване и устойчивост на периодични решения при наличие на пертурбации на десните страни на системи обикновени диференциални уравнения.

Получени са следните по-важни резултати:

1. Въведен е критерии за сравняване на устойчиви нулеви решения на две системи диференциални уравнения. За такива решения са въведени бинарните релации предхождане, еквивалентност, и др. Доказани са няколко диференциални неравенства, които имат и самостоятелен интерес. С тяхна помощ са получени достатъчни условия за съществуване на частична наредба на устойчивите нулеви решения на системи обикновени диференциални уравнения.

2. На базата на резултатите за сравнимост на нулеви решения на две системи са намерени условия за устойчивост (неустойчивост) на нулевото решение на дадена система. Част от резултатите представляват нови доказателства на известни факти от теорията на устойчивостта.

3. Получени са необходими и достатъчни условия за (асимптотична) устойчивост на нулевото решение на кооперативна система диференциални уравнения.

4. Изучено е асимптотичното поведение на решенията на системите $M\ddot{x} + \dot{x} = f(t, x)$ и $\dot{x} = f(t, x)$. Намерени са достатъчни условия, при които тяхната разлика асимптотично клони към 0.

5. Въведено е понятието $\mathcal{M}$-структурна устойчивост на орбити на система диференциални уравнения. За сравнително широк клас системи са получени достатъчни условия за $\mathcal{M}$-структурна устойчивост. На базата на тези резултати са приведени нови доказателства на някои класически теореми за структурна устойчивост на стационарни точки и периодични орбити.

6. Въведен е критерий за сравняване на две периодични орбити на автономни системи диференциални уравнения. Критерият се базира на оценка на частното от нормите на съответните изображения на Poincaré. Изучен е въпроса за сравнимост на периодични орбити на двумерни автономни системи диференциални уравнения.

7. Получените в дисертацията резултати са приложени за по-пълното изследване на някои класически математически модели като: модел на човешка сърдечно-съдова дейност, модел на цикли в невронни системи, модели на P.F. Verhulst и Lotka-Volterra от популационната динамика. Изучено е асимптотичното поведение на решенията на тези модели.

Публикации и участия в колоквиуми

Части от дисертацията са публикувани в следните три статии:

[ADN97] J. Angelova, A. Dishliev, and S. Nenov. On a method of comparison of stable solutions of systems ODE. *Invited Lectures delivered at the VII-th Int. Colloquium on Differential Equations, August 18-23, 1996, Plovdiv, Bulgaria*, 2:13–27, 1997.

[ADN98] J. Angelova, A. Dishliev, and S. Nenov. Comparison of zero-solutions of system ode via asymptotical stability. *Non-Linear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 42(3):339–350, 1998.

[Nen96] S. Nenov. Periodic solutions and perturbations of dynamical systems. *International J. of Theoretical Physics*, 35(12):2717–2732, 1996.

По-голямата част от дисертацията е докладвана на VI, VII, $VIII$ и IX Международен Колоквиум по Диференциални Уравнения в гр. Пловдив; научният семинар "Gauss" по Диференциални Уравнения към Технически Университет — Хановер през 1997 и 1998 г. и др.

Декларация

(1) Част от резултатите в глава 1 са публикувани в [ADN97] и [ADN98].
(2) Част от резултатите в глава 2 са публикувани в [Nen96].

Библиография

[ADN97] J. Angelova, A. Dishliev, and S. Nenov. On a method of comparison of stable solutions of systems doe. *Invited lectures delivered at the VII-th Int. colloquium on differential equations, August 18-23, 1996, Plovdiv, Bulgaria*, 2:13–27, 1997.

[ADN98] J. Angelova, A. Dishliev, and S. Nenov. Comparison of zero-solutions of systems ode via asymptotical stability. *Non-linear analysis: Theory, methods and applications*, 1998.

[ALGM73] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, and A.G. Maier. *Theory of bifurcation of dynamical systems on the plane.* Wiley, New York, 1973.

[AM78] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundation of mechanics.* Advanced book program. The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc, Reading, Massachusetts, second edition, 1978.

[Ama90] H. Amann. *Ordinary differential equations. An introduction to non-linear analysis*, volume 13 of *Studies in mathematics.* De Gruyter, 1990.

[AWH59] A.A. Andronov, A.A. Witt, and S.E. Haikin. *Oscillation theory.* Fizmatgiz, 1959.

[BM74] N.N. Bogolubov and U.A. Mitropolski. *Asymptotical methods in theory of non-linear oscillations.* Nauka, Moskau, 1974.

[BS67] N.P. Bhatia and G.P. Szego. *Dynamical systems: Stability theory and applications*, volume 35 of *Lecture notes in mathematics.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1967.

[CL55] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-hill book company, Inc., New York, Toronto, London, 1955.

[Eng77] R. Engelking. *General topology*, volume 60 of *Monografie matematyczne.* Państwowe Wydawnictwo Naukouwe, Warszawa, second edition, 1977.

[Har64] Ph. Hartman. *Ordinary differential equations.* John Wiley & Sons, 1964.

[Hir82] M.W. Hirsch. Systems of differential equations which are competitive or cooperative. i: Limit sets. *SIAM J. Math. Anal.*, 13(2):167–179, 1982.

[Hir85] M.W. Hirsch. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. ii: Convergence almost everywhere. *SIAM J. Math. Anal.*, 16(3):423–439, 1985.

[Hir88] M.W. Hirsch. Systems of differential equations which are competitive or cooperative. iii: Competing species. *Non-linearity*, 1:51–71, 1988.

[HJ86] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1986.

[HP80] V.C.L. Hutson and J.S. Pym. *Applications of functional analysis and operator theory*, volume 146 of *A series of monographs and textbooks: Mathematics in science and engineering.* Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.

[HS74] M. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra.* Academic Press, New York, 1974.

[Kam32] E. Kamke. Zue theorie der systeme gewohnlicher differentialgleichungen, ii. *Acta Math.*, 58:57–85, 1932.

[KF89] A.N. Kolmogorov and S.B. Fomin. *Elements of theory of functions and functional analysis.* Nauka, Moskau, sixth edition, 1989.

[KG79] A.A. Kirilov and A.D. Gvishiany. *Theorems and examples in functional analysis.* Moskau – Nauka, 1979.

[Kre67] S.G. Krein. *Linear differential equations in Banach spaces.* Moskau – Nauka, 1967.

[LL69] V. Lakshmikantham and S. Leela. *Differential and integral inequalities. Theory and applications*, volume 55 of *A series of monographs and textbooks: Mathematics in science and engineering.* Academic Press, New York and London, 1969.

[Lyp49] A.M. Lypunov. The general problem for stability of motion. *Izd. Akcad.Nauk*, 1949.

[MM76] J.E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[Nen96] S. Nenov. Periodic solutions and perturbations of dynamical systems. *International J. of theoretical physics*, 35(12):2717–2732, 1996.

[Nit71] Z. Nitecki. *Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1971.

[NS49] V.V. Nemitsky and V.V. Stepanov. *Qualitative theory of ordinary differential equations.* Moskau – Leningrad, second edition, 1949.

[Per13] O. Perron. Uber lineare differentialgleichungen, bei denen die unabhangige variable reel ist. *Journ. d. reine und angewandte Mathematik*, 142, 1913.

[Per29] O. Perron. Die ordnungszahen der differentialgleichungssysteme. *Math. Ztschr*, 31, 1929.

[Pli77] V.A. Plis. *Integral sets of periodical systems differential equations.* Nauka, Moskva, Leningrad, 1977.

[PM82] J. Palis and W. De Melo. *Geometric theory of dynamical systems. An introduction.* Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[RHL77] N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy. *Stability theory by Liapunov's direct method*, volume 22 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

[Rob85] C. Robinson. Phase analysis using the poincaré map. *Non-linear Anal. Theory, methods and applications*, 9:1159–1164, 1985.

[Rob95] C. Robinson. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos.* Studies in advanced mathematics. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1995.

[Sma80] S. Smale. A mathematical model of two cells via turing's equation. *Am. Math. Soc. Proceedings on pure and applied Math.*, 1980.

[SW97] D. Schwalbe and S. Wagon. *VisualDSolve: Vsualizing differential equations with Mathematica.* Springer-Verlag and TELOS–The electronic library of science, New York, Santa Clara, California, sixth edition, 1997.

[Tho82] J.M.T. Thompson. *Instabilities and catastrophes in science and engineering.* Jhon Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1982.

[Ver90] F. Verhulst. *Non-linear differential equations and dynamical systems.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.

[Vin57] R.E. Vinograd. The inadequacy of the method of characteristic exponents for the study on non-linear differential equations. *Mat. Sbornik*, 41:431–438, 1957.

[VM97] A. Varma and M. Morbidelli. *Mathematical methods in chemical engineering.* Oxford University Press, New York, Oxford, 1997.

[Yos66] T. Yoshizawa. *Stability theory by Liapunov's second method.* The Mathematical Society of Japan, 1966.

[Zee73] E.C. Zeeman. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse. *Dynamical systems, ed. M.M. Peixoto*, page 683, 1973.