



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

**ДЕПАРТАМЕНТ ПО ФИЗИКОМАТЕМАТИЧЕСКИ
И ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ**

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА”

Румяна Борисова Чуклева

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

ВЪРХУ КАЧЕСТВЕНАТА ТЕОРИЯ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПРОМЕНЛИВА СТРУКТУРА И ИМПУЛСИ

за придобиване на образователната и научна степен „доктор”

по научна специалност

„Математическо моделиране и приложения на математиката ”

Научни ръководители: доц. дмн Гани Стамов
 доц. д-р Ангел Дишлиев

Научно жури:

1. доц. д-р Димитър Колев - Председстел
2. проф. дмн Снежана Христова - Рецензент
3. проф. д-р Степан Костадинов - Рецензент
4. доц. д-р Валентина Проичева
5. доц. дмн Гани Стамов

София, 2012

Дисертационният труд е написан на 127 страници и съдържа 1 фигура. Цитирани са 248 източника.

Представеният дисертационен труд е обсъден и приет на защита на заседание на разширен научен съвет на научното звено на катедра „Математика”, състояло се на 27.04.2012г.

Заседанието ще се състои на 14.06.2012 година от 14.00 часа в зала 424, етаж 4, сграда „А“ на ХТМУ.

При следващите разглеждания номерата на: главите, условията, дефинициите, забележките и теоремите са запазени както в дисертационния труд.

Глава 0. Увод

Тема: Разглежданите в дисертационния труд проблеми се отнасят към качествената теория на системите от нелинейни нехомогенни диференциални уравнения с променлива структура и импулси (СННДУПСИ) и техните приложения в математическото моделиране на динамични процеси от инженерната практика.

Този тип уравнения са удобен математически апарат за моделиране на специфични динамични процеси, които по време на своето развитие се характеризират със следните две особености:

1. Процесите са подложени на „кратковременни и интензивни“ външни въздействия (смушения, пертурбации). Предполага се, че времетраенето на външните смушения е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процеса, поради което може да се приеме, че те са „мигновени“ и се извършват под формата на импулси.
2. Непосредствено след тези импулсни пертурбации изучаваният процес продължава своето развитие, като се подчинява на нови, различни от предходните, правила и закони.

Изучаването на скокообразно изменящи се процеси със смяна на законите на развитие е предмет на изследване в редица науки: механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. В тези случаи, използването на математически апарат под формата на моделиращи диференциални уравнения с променлива структура и импулси, като правило, е задължително.

Най-общо, СННДУПСИ, които се изследват в настоящия дисертационен труд, се състоят от следните елементи:

1. Съвкупност от системи нелинейни нехомогенни диференциални уравнения, които описват непрекъснато диференцируемите части на решението. Съвкупността от системите обикновено има вида:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x, \mu), \quad i = 1, 2, \dots;$$

където:

- функциите $f_1, f_2, \dots \in C[R^+ \times D \times M, R^n]$, т.е. десните страни на горната система са непрекъснати функции в дефиниционното си множество,
- фазовото пространство D е непразна област от $\mathbb{R}^n$,
- μ е вектор на параметрите, участващи в описанието на процеса,
- M е допустимото множество на тези параметри;
- 2. Условия за последователно определяне на моментите на:
 - смяната на структурата на системата от диференциални уравнения,
 - импулсни въздействия върху решението.

Тези два типа моменти съвпадат помежду си последователно и се наричат с общото наименование моменти на превключване. Те са последователни решения на системи от алгебрични уравнения от вида:

$$\varphi_i(t, x(t)) = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където функциите $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ се наричат превключващи функции. Те са съответни за всяка една дясна страна и са непрекъснати в разширеното фазово пространство или във фазовото пространство на изучаваните системи от диференциални уравнения, т.е. $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C[R^+ \times D, R]$ или $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C[D, R]$. Моментите на превключване означаваме с $t_1, t_2, \dots$;

3. Импулсни функции, които определят големината (и посоката) на импулсните въздействия. Тези въздействия математически се описват както следва:

$$x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots$$

Импулсните функции $I_1, I_2, \dots$ са непрекъснати във фазовото пространство на разглежданите системи с променлива структура и импулси.

По начина на определяне на моментите, в които се извършва смяна на структурата и импулсни въздействия (моментите $t_1, t_2, \dots$), разглежданите системи се разделят на различни класове, от които тук ще посочим следните:

1. СННДУПСИ с предварително фиксирани моменти на превключване;
2. СННДУПСИ с моменти на превключване, съпадащи с моментите, в които интегралната крива или траекторията на системата анулира предварително зададени функции, дефинирани в разширеното фазово пространство или във фазовото пространство на системите от диференциални уравнения. Както казахме по-горе, тези функции се наричат превключващи;
3. СННДУПСИ с моменти на превключване, съпадащи с моментите, в които траекторията на изучаваната система среща предварително зададени множества, разположени в разширеното фазово пространство (обикновено това са хиперповърхнини);
4. СННДУПСИ с моменти на превключване, съпадащи с моментите, в които решението минимизира даден функционал;
5. СННДУПСИ с превключващи моменти, които имат случаен характер, като удовлетворяват определен закон на разпределение и др.

В настоящия дисертационен труд се изучават системи с променлива структура и импулси от втория тип, посочен по-горе.

Решенията на съответните начални задачи на разглежданите системи диференциални уравнения са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род, в които решенията са непрекъснати отляво.

Характеристика: Специфичните особености, свързани с изследването на СННДУПСИ и възникващите трудности при тяхното изучаване, са следните:

1. Прекъснатост на решението: Точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът“ е ограничен. Обикновено се предполага, че решението е непрекъснато отляво в точките на импулсно въздействие (виж монографиите [10], [11], [25], [33], [62], [82], [95], [96], [97], [98] и [99] и др.);
2. Наличие на ефекта „биене“ ([35], [111], [122] и [126]): В този случай, интегралната крива или траекторията на системата диференциални уравнения среща многократно (възможно е и безбройно много пъти) превключващите множества. Тогава, може да се получи ситуация, при която превключващите моменти да притежават точка на съгъстяване и следователно решението да не е продължимо надясно от тази точка. Това означава, че решението „загива“. Поради тази причина при описаната по-горе ситуация, не може да се изучават различни аспекти на качествената теория на този тип системи, като например: непрекъснатата зависимост, периодичност, устойчивост и др.;
3. Загуба на свойството автономност: Действително, независимо, че десните страни на СННДУПСИ може да не зависят от времето, то поради факта, че превключващите моменти се получават като решения на алгебрични уравнения, зависещи от времето, то неявно се достига до извода, че решението зависи съществено от началния момент;

4. Сливане на решения: Обикновено сливането се осъществява след импулсно въздействие върху едно от сливащите се решения;
5. Промяна на превключващите моменти при промяна на началното условие: Различните решения (с начални условия, които не съвпадат) имат различни превключващи моменти, включително при едното от тези решения е възможно да липсват такива превключващи моменти. Такъв е случаят при изучаване на нулевото решение на СННДУПСИ;
6. Промяна на превключващите моменти при смущаване на системата: Решението на изследваната задача и съответното решение на смутената задача (при едни и същи начални условия) в общия случай имат различни превключващи моменти и различни по големина и направление импулсни въздействия;
7. Натрупване на грешки: Пертурбациите и неточностите при смяната на структурите (десните страни на системите) и импулсните въздействия се „натрупват“ във времето и оказват съществено влияние при определяне на поведението на решението. Така например, при неограничен брой импулси тези пертурбации могат да имат непреодолим характер и да доведат до формирането на решения, които се различават неограничено от изучаваното „не пертурбирано“ решение и др.

Кратък обзор: Началото на изучаването на „скокообразни“ процеси с помощта на импулсни диференциални уравнения е поставено от В. Мильман и А. Мышкис в първата половина на шестдесетте години на миналия век [23] и [24]. В тези работи са дадени някои общи съображения за необходимостта от изучаване на системите с импулсно въздействие. Получени са първите резултати за устойчивост на техните решения.

Ще посочим част от монографиите на български автори, отнасящи се за фундаменталната и качествената теория на импулсните диференциални уравнения и техните приложения: Д. Байнов и В. Ковачев [62]; Д. Байнов, С. Костадинов, Н. Минх [82]; Д. Байнов и П. Симеонов [95], [96] [97], [98] и [99]; Д. Байнов, С. Христова [80]; В. Лакшмикантам, Д. Байнов и П. Симеонов [173]; И. Стамова [222], Г. Стамов [215] и А. Дишлиев, К. Дишлиева и С. Ненов [129]. От монографиите, посветени на импулсните диференциални уравнения, с автори извън България, ще споменем: А. Самойленко и Н. Перестюк [33] и [209]; Н. Перестюк, В. Плотников, А. Самойленко и Н. Скрипник [25]; С. Борисенко, В. Косолапов и А. Оболенский [6]; А. Халанай и Д. Векслер [40]; С. Завалишин и А. Сесекин [11] и [241]; С. Завалишин, А. Сесекин и С. Дрозденко [10]; S. Pandit и S. Deo [204] и M. Benchohra, J. Henderson и S. Ntouyas [101].

Ще отбележим (потвърдено от много автори), че интензивното развитие на теорията на импулсните диференциални уравнения се дължи на многобройните им приложения: действието на амортизатор, подложен на ударни въздействия; колебанията на системи от махала при наличие на външни импулсни смущения; ударен модел на часовников механизъм; виброударни системи; бiliarдни движения на материални точки; релаксионни колебания на електромеханични системи; електронни схеми; затихващ осцилатор, подложен на импулсни въздействия; динамиката на системи за автоматично регулиране; смущения в клетъчни невронни мрежи; импулсни пертурбации в скоростта на развитие на кълбовидни бактерии, подчинени на закона на Schmalhausen; импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на изолирана популация; загиване на популации в резултат на импулсни въздействия; импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в

популационната динамика на съобщество от тип хищник-жертва; епидемиологията; „шокови“ изменения на цените на затворените пазари и др. На споменатите по-горе задачи от практиката са посветени множество изследвания, от които тук ще посочим: [4], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [13], [14], [17], [25], [26], [33], [34], [36], [41], [43], [46], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [60], [61], [73], [74], [79], [81], [94], [97], [100], [106], [107], [112], [113], [114], [115], [116], [118], [119], [120], [128], [129], [130], [131], [132], [133], [134], [135], [136], [137], [142], [144], [145], [151], [152], [153], [160], [162], [163], [164], [165], [166], [177], [178], [179], [180], [181], [182], [183], [184], [185], [187], [188], [189], [190], [194], [196], [197], [198], [203], [207], [208], [210], [214], [219], [220], [222], [224], [226], [227], [228], [229], [230], [232], [234], [235], [236], [241], [242], [243], [244], [245], [246], [248] и др.

Следните монографии изучават системи диференциални уравнения с променлива структура: А. Филиппов [39]; А. Андронов, А. Витт и С. Хайкин [2], В. Бабицкий и В. Крупенин [3]; Н. Перестюк, В. Плотников, А. Самойленко и Н. Скрипник [25] и др.

Приложенията на диференциалните уравнения с променлива структура са предимно в теорията на управлението. Освен това с помощта на такива уравнения се изучават: задачи от фармакокинетиката; управление на орбитата на спътник с помощта на радиални ускорения; преминаването на твърдо тяло от флуид с дадена плътност във флуид с друга плътност; изменението на скоростта на химична реакция при прибавянето или отнемането на катализатор и др. Тук ще посочим следните резултати: [1], [18], [19], [21], [22], [25], [28], [29], [30], [39], [41], [42] и др.

Основни цели: Основните цели на дисертационния труд са четири:

1. Въвеждане на нови класове нелинейни диференциални уравнения с променлива структура и импулси, които представляват адекватен математически апарат при моделирането на динамични процеси и явления;
2. Създаване на подходящ математически апарат за решаване на поставените задачи. Като пример ще посочим въвеждането на редици от функции на Ляпунов;
3. Изучаване на специфични свойства, характерни само за решенията на тези класове уравнения. Като пример ще посочим непрекъсната зависимост на решенията относно превключващите функции.
4. Прилагане на резултатите върху известни математически модели. Като пример ще посочим математически модел от хидродинамиката. Намерените асимптотични качества на решенията са интерпретирани в термините на съответните модели. Изрично е подчертано, че изследваните свойства на моделите са възможни само благодарение на предходните теоретични резултати в дисертационния труд.

Съдържание: Дисертационният труд се състои от три глави:

Глава 1. Непрекъсната зависимост на решенията на диференциални уравнения с променлива структура и импулси относно превключващите функции

В тази глава се изучава специфичен клас нелинейни неавтономни системи обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Промяната на дясната страна на системата и импулсните въздействия на решението се извършват в моментите, в които се анулират така наречените превключващи функции. Още веднъж ще подчертаем, че след всеки момент на импулсно въздействие изучаваният процес продължава своето развитие, като се

подчинява на нов закон, който в общия случай е различен от закона на развитие в предходния времеви интервал на непрекъснатост на решението.

Приложенията на диференциалните уравнения с променлива структура са предимно в теорията на управлението: [1], [2], [18], [19], [20], [21], [22], [29], [30], [39], [42], [114], [115], [124], и [192]. Импулсните уравнения се използват най-често при описание и изучаване на развитието на биологични видове, подложени на дискретни въздействия: [25], [33], [37], [52], [55], [56], [57], [58], [60], [73], [74], [80], [100], [101], [107], [118], [119], [120], [121], [131], [133], [134], [135], [136], [137], [144], [145], [151], [153], [160], [162], [163], [164], [165], [166], [173], [178], [179], [180], [181], [182], [183], [184], [185], [187], [188], [189], [190], [196], [198], [207], [208], [209], [210], [214], [215], [220], [222], [226], [228], [229], [230], [232], [234], [241], [242], [243], [244], [245], [246] и [248]. В работи [20] и [116] уравненията с променлива структура и импулси се използват при изучаването на динамиката на затвора на хидравличен клапан.

В настоящата глава моментите на превключване съвпадат с моментите, в които траекторията анулира предварително зададени функции, дефинирани във фазовото пространство на системата от диференциални уравнения. Тези функции се наричат превключващи.

Подобни импулсни системи (без промяна на структурата) се изследват в редица публикации. Като примери тук ще посочим: [25], [33], [71], [72], [77], [78], [103], [104], [105], [107], [115], [121], [123], [124], [127], [130], [131], [132], [140], [141], [142], [173], [186], [200], [209], [218] и др.

Накратко, в първия параграф на главата са намерени достатъчни условия за непрекъсната зависимост на решението на съответна начална задача за описаните по-горе системи диференциални уравнения в зависимост от началното условие и превключващите функции. Резултатите в този параграф са публикувани в [114].

Накратко във втория параграф на глава 1 с помощта на системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси е описана динамиката на затвора на предпазен възвратен клапан. Структурата на моделиращата система се изменя във връзка със състоянията на затвора на клапана:

- «затворено»;
- «отворено».

Импулсите отразяват:

- мигновената промяна на скоростта на движение на затвора на клапана при преминаване от отворено състояние в затворено състояние;
- скокообразното преместване на затвора на клапана при преминаване от затворено в отворено състояние.

Основният резултат във втория параграф се състои в намирането на условия, подобни на условията в предходния параграф, които гарантират непрекъсната зависимост на решенията на моделиращата система по отношение на изменения в началното условие и превключващите функции. Получените резултати в параграфа са публикувани в [116].

В първия параграф на главата се изследва следната начална задача (която по-нататък ще наричаме основна задача) за системи нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \quad t_{i-1} < t < t_i,$$

$$(A) \quad \begin{aligned} \varphi_i(x(t_i)) &= 0, \quad i=1,2,\dots, \\ x(t_i+0) &= x(t_i) + I_i(x(t_i)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

където:

- фазовото пространство D е непразна област от R^n ;
- функциите $f_i: R^+ \times D \rightarrow R^n$, $f_i = (f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^n)$;
- функциите $\varphi_i: D \rightarrow R$;
- функциите $I_i: D \rightarrow R^n$;
- началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$.

Решението на изучаваната задача е непрекъснато отляво в моментите $t_1, t_2, \dots$. В общия случай това решение е прекъснато отляво в посочените по-горе точки, като точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът“ на решението в тези точки е ограничен. Точките $t_1, t_2, \dots$ се наричат моменти на превключване, функциите $I_i, i=1,2,\dots$, се наричат импулсни, а функциите $\varphi_i, i=1,2,\dots$, се наричат превключващи. Решението на основната задачата ще означаваме с $x(t; t_0, x_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$.

Заедно с основната задача ще разгледаме и така наречената смутена начална задача:

$$(B) \quad \begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= f_i(t, x^*), \quad \varphi_i(x^*(t)) \neq 0, \quad t_{i-1}^* < t < t_i^*, \\ \varphi_i(x^*(t_i^*)) &= 0, \quad i=1,2,\dots, \\ x^*(t_i^*+0) &= x^*(t_i^*) + I_i(x^*(t_i^*)), \\ x^*(t_0^*) &= x_0^*, \end{aligned}$$

където:

- превключващите функции $\varphi_i^*: D \rightarrow R$;
- началната точка $(t_0^*, x_0^*) \in R^+ \times D$.

Решението на горната задача означаваме с $x^*(t; t_0^*, x_0^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots)$.

Дефиниция 1.1. Ще казваме, че решението на основната задача (A) зависи непрекъснато от началното условие и превключващите функции, ако:

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon = \text{const} > 0)(\forall \eta = \text{const} > 0)(\forall T = \text{const} > t_0) \\ &(\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T) > 0): \\ &(\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in D, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ &(\forall \varphi_i^* \in C[D, R], \|\varphi_i^*(x) - \varphi_i(x)\| < \delta \text{ при } x \in D, i=1,2,\dots) \Rightarrow \\ &(\|x^*(t; t_0^*, x_0^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots) - x(t; t_0, x_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)\| < \varepsilon \\ &\text{за } t_0^{\max} \leq t \leq T \text{ и } |t - t_i| > \eta, \quad i=1,2,\dots), \end{aligned}$$

където $t_0^{\max} = \max\{t_0^*, t_0\}$.

Ще отбележим, че „близост“ между двете решения (на изучаваната задача (А) и съответната смутена задача (Б)) не се изисква в предварително фиксирани околности $(t_i - \eta, t_i + \eta)$, $i = 1, 2, \dots$, на моментите на превключване на основната задача.

Въвеждаме означенията:

- $\Phi_i = \{x \in D; \varphi_i(x) = 0\}$, $i = 1, 2, \dots$ - превключващи множества на основната задача;
- $\Phi_i^* = \{x \in D; \varphi_i^*(x) = 0\}$, $i = 1, 2, \dots$ - превключващи множества на смутената задача;
- $\gamma(t_0, x_0) = \{x(t; t_0, x_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots), t_0 \leq t \leq T\}$ - траектория на изучаваната задача;
- $\gamma^*(t_0^*, x_0^*) = \{x^*(t; t_0^*, x_0^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots), t_0^* \leq t \leq T\}$ - траекторията на смутената задача;
- $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ са съответно Евклидовата норма и скалярно произведение в R^n ;
- $B_\delta(x_0) = \{x \in R^n; \|x - x_0\| < \delta\}$ е δ -околност на точката x_0 .

Въвеждаме следните условия:

H1.1. Функциите $f_i \in C[R^+ \times D, R^n]$, $i = 1, 2, \dots$

H1.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \|f_i(t, x)\| \leq C_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.3. Функциите $\varphi_i \in C^1[D, R]$, $i = 1, 2, \dots$

H1.4. Съществуват константи $C_{grad \varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in D) \Rightarrow \|grad \varphi_i(x)\| \leq C_{grad \varphi_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.5. Функциите $I_i \in C[D, R^n]$ и $(Id + I_i): \Phi_i \rightarrow D$, $i = 1, 2, \dots$

H1.6. Съществуват константи $C_{\varphi_{i+1}(Id + I_i)} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow |\varphi_{i+1}((Id + I_i)(x))| = |\varphi_{i+1}(x + I_i(x))| \geq C_{\varphi_{i+1}(Id + I_i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.7. Валидни са неравенствата:

$$\varphi_i((Id + I_{i-1})(x)) \langle grad \varphi_i(x), f_i(t, x) \rangle < o, (t, x) \in R^+ \times D, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където $I_0 \equiv Id$.

H1.8. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{\varphi_i(Id + I_{i-1})}}{C_{grad \varphi_i} \cdot C_{f_i}}$ е разходящ.

H1.9. Съществуват константи $C_{\langle grad \varphi_i, f_i \rangle} > 0$ такива, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \|\langle \text{grad} \varphi_i(x), f_i(t, x) \rangle\| \geq C_{\langle \text{grad} \varphi_i, f_i \rangle}, i = 1, 2, \dots$$

H1.10. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ и за всяко $i = 1, 2, \dots$ решението на начална-та задача

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

съществува и е единствено за $t \geq t_0$.

Забележка 1.1. Ако са валидни равенствата:

$$C_{f_1} = C_{f_2} = \dots; \quad C_{\text{grad} \varphi_1} = C_{\text{grad} \varphi_2} = \dots; \quad C_{\varphi_2(Id+I_1)} = C_{\varphi_3(Id+I_2)} = \dots,$$

то лесно може да се установи, че е изпълнено $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots$, откъдето следва условие H1.8.

Следващите три теореми са помощни. Въпреки това те имат и самостоятелно значение.

Теорема 1.1. Нека са изпълнени условията H1.1 ÷ H1.7.

Тогава:

1. Ако траекторията $\gamma(t_0, x_0)$ на основната задача (A) среща последователно превключващите хиперповърхнини Φ_i и Φ_{i+1} , то за съответните моменти на превключване t_i и t_{i+1} е валидна оценката:

$$t_{i+1} - t_i \geq \frac{C_{\varphi_{i+1}(Id+I_i)}}{C_{\text{grad} \varphi_{i+1}} \cdot C_{f_{i+1}}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

2. Ако траекторията $\gamma(t_0, x_0)$ среща всички превключващи хиперповърхнини Φ_i , $i = 1, 2, \dots$, и е валидно условие H1.8, то моментите на превключване растат неограничено, т.е. изпълнено е $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Теорема 1.2. Нека са изпълнени условията H1.1, H1.3, H1.5, H1.7, H1.9 и H1.10.

Тогава траекторията на основната задача (A) среща всяка една от хиперповърхнините Φ_i , $i = 1, 2, \dots$.

Теорема 1.3. Нека са изпълнени условията H1.1 ÷ H1.8 и H1.10.

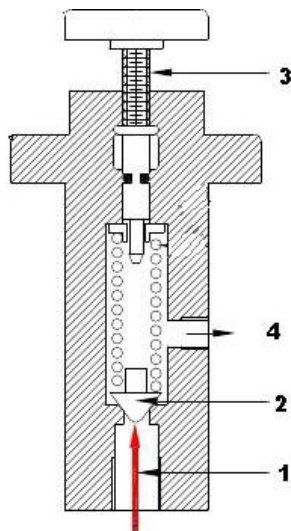
Тогава решението на основната задача (A) съществува и е единствено при $t_0 \leq t < \infty$.

Основният резултат в параграфа се съдържа в следната теорема.

Теорема 1.6. Нека са изпълнени условията H1.1 ÷ H1.8 и H1.10.

Тогава решението на основната задача (A) зависи непрекъснато от началното условие и превключващите функции.

Във втория параграф на първа глава се изследва динамичен математически модел на хидравличен предпазен възвратен клапан. Моделът е взиман от [124]. Ще отбележим, че основните елементи на клапана (фиг. 1.1) са:



- Фиг. 1.1 -

1. Смукателен колектор с обем V ;
2. Коничен затвор на клапана с ъгъл при върха на затвора с мярка 2α и маса M_c ;
3. Спирална пружина с маса M_s и специфична константа на еластичност C_s ;
4. Изпускателен колектор.

Въвеждаме следните означения:

- $\Delta = \Delta(t) \geq 0$ е разстоянието от затвора на клапана до неговото легло;
- $P_1 = P_1(t) \geq 0$ и $P_2 = P_2(t) \geq 0$ са наляганията в смукателния и изпускателния колектор;
- $Q_1 = Q_1(t) \geq 0$ и $Q_2 = Q_2(t) \geq 0$ са входящият и изходящият дебит на флуида;
- d е диаметърът на леглото на затвора;

По-нататък, с цел да се опрости модела, ще предполагаме, че величините Q_1 и P_2 са постоянни във времето.

Затворът на клапана се отваря в момента, в който разликата на наляганията в смукателния и в изпускателния колектор стане по-висока от силата на първоначалната напрегнатост на пружината C_0 . В противен случай, клапанът е в затворено състояние.

От динамична гледна точка клапанът може да се разглежда като механична система, която се изменя (в някои моменти "скокообразно") в течение на времето. Изменението на механичната система се описва с помощта на стойностите на функциите: $\Delta = \Delta(t)$, $y = y(t)$ и $P_1 = P_1(t)$, т.е. чрез големината на отвора между затвора на клапана и неговото легло, скоростта на движение на затвора и големината на налягането на флуида във входящия колектор.

Затворът на клапана има две състояния: «отворено» и «затворено».

Първо състояние. Клапанът е отворен, т.е. $\Delta(t) > 0$. Тогава преместването на затвора на клапана се описва с помощта на основното уравнение на динамиката

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta(t) = \frac{1}{m} P(t) = \frac{1}{m} \left(\frac{\pi d^2}{4} (P_1 - P_2) - C_0 - C_s \Delta(t) \right),$$

където: масата $m = M_c + \frac{1}{3} M_s$, силата $P = P(t)$ е векторна сума от началната напрегнатост на пружината C_0 , силата на свиване на пружината $C_s \Delta(t)$ и разликата в наляганията P_1 и P_2 .

От законите на хидродинамиката е известно, че изменението на налягането се задава с помощта на диференциалното уравнение от първи ред

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = \frac{E}{V} (Q_1 - Q_2),$$

където E е специфичен коефициент на работния флуид. Ще отбележим, че дебитът Q_2 , минаващ през клапана, се задава с помощта на равенството

$$Q_2 = \nu \pi D \Delta(t) \sin \alpha \sqrt{\frac{2}{\omega} (P_1 - P_2)}.$$

В горното равенство ν е специфичен коефициент на дебита Q_2 , ω е относителното тегло на флуида и $\pi d \Delta(t) \sin \alpha$ е приблизителното лице на отвора, образуван когато затворът на клапана е отместен на разстояние $\Delta = \Delta(t) > 0$ от неговото легло. Означаваме с y скоростта на движението на затвора или по друг начин казано

$$y = y(t) = \frac{d}{dt} \Delta(t).$$

Тогава нормализираната система, симулираща развитието на механичната система в първото ѝ състояние, има вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta &= y, \\ (A1) \quad \frac{d}{dt} y &= \frac{1}{m} P(t) = \frac{1}{m} \left(\frac{\pi d^2}{4} (P_1 - P_2) - C_0 - C_s \Delta \right), \\ \frac{d}{dt} P_1 &= \frac{E}{V} (Q_1 - Q_2) = \frac{E}{V} \left(Q_1 - \nu \pi d \Delta \sin \alpha \sqrt{\frac{2}{\omega} (P_1 - P_2)} \right). \end{aligned}$$

Второ състояние. Клапанът е в затворено състояние, т.е. $\Delta = \Delta(t) = 0$. В този случай скоростта y и дебитът Q_2 са равни на нула. Единствено се променя налягането P_1 във входящия колектор, като неговото изменение е пропорционално на постоянно постъпващия дебит. Изменението на механичната система, когато се намира във второто си състояние, се описва с помощта на следната система от диференциални уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta &= 0, \\ (A2) \quad \frac{d}{dt} y &= 0, \\ \frac{d}{dt} P_1 &= \frac{E}{V} Q_1. \end{aligned}$$

Промяната (преминаването) на клапана от първо състояние във второ състояние се осъществява в моментите $t_1, t_3, \dots, t_{2i-1}, \dots$, когато затворът на клапана достигне долно крайно положение, т.е. когато: $\Delta(t_{2i-1})=0$, $i=1, 2, \dots$. Ако въведем функцията $\varphi^\downarrow = \varphi^\downarrow(\Delta) = \Delta$, то последните равенства можем да запишем още така:

$$\varphi^\downarrow(\Delta(t_{2i-1})) = 0, i=1, 2, \dots$$

Означаваме с $\varphi^\uparrow = \varphi^\uparrow(P_1)$ следната функция:

$$\varphi^\uparrow(P_1) = \frac{1}{4}\pi d^2(P_1 - P_2) - C_0 = P(\Delta, P_1, \mu) \text{ за } \Delta = 0.$$

Когато функцията $\varphi^\uparrow$ е отрицателна, т.е. когато

$$\frac{1}{4}\pi d^2(P_1 - P_2) - C_0 < 0,$$

клапанът е във второто си състояние. Превключването на механичната система от второ състояние към първо състояние се осъществява в моментите $t_2, t_4, \dots, t_{2i}, \dots$, когато функцията $\varphi^\uparrow$ се анулира, т.е. когато са изпълнени равенствата:

$$\varphi^\uparrow(P_1(t_{2i})) = 0, i=1, 2, \dots$$

Ясно е, че в моментите $t_1, t_2, \dots$ системата нелинейни диференциални уравнения, която моделира изменението във времето на затвора на клапана, променя структурата си, т.е. извършва се смяна на дясната страна на системата диференциални уравнения. По-точно, в моментите с нечетен индекс системата (A1) се заменя със системата (A2). В моментите с четен индекс замяната на десните страни на системата е в обратен ред. По този начин достигахме до извода, че моделът на механичната система от хидродинамиката, представлява система нелинейни диференциални уравнения с променлива структура.

Ще обърнем внимание на още един факт. Както е известно в моментите на превключване на системата диференциални уравнения от първия тип дясна страна към втория тип затворът на клапана попада в крайно долно положение или в затворено положение. При тази смяна на дясната страна се анулира скоростта на движението на затвора, независимо от нейната големина. Това означава, че изменението (анулирането) на втората компонента на решението на моделната система (а именно скоростта) в моментите на превключване с нечетни индекси се извършва мигновено под формата на импулси. Практически това означава, че затворът се «удря» в неговото легло при достигане на крайно долно положение. Това можем да изразим с помощта на равенствата:

$$y(t_{2i-1} + 0) = 0, i=1, 2, \dots$$

В моментите на превключване от отворено в затворено състояние останалите моделиращи функции на механичната система (Δ и P_1) не се променят «скокообразно». Изпълнени са импулсните равенства:

$$\begin{aligned} &(\Delta(t_{2i-1} + 0), y(t_{2i-1} + 0), P_1(t_{2i-1} + 0)) \\ &= (\Delta(t_{2i-1}), y(t_{2i-1}), P_1(t_{2i-1})) + (0, -y(t_{2i-1}), 0) \\ &= (Id + I^\downarrow)(\Delta(t_{2i-1}), y(t_{2i-1}), P_1(t_{2i-1})), i=1, 2, \dots, \end{aligned}$$

където импулсната функция $I^\downarrow(\Delta, y, P_1) = (0, -y, 0)$, а Id е идентитетът в $\square^3$.

В моментите на превключване с четен индекс: $t_2, t_4, \dots, t_{2i}, \dots$ решението на моделната система е прекъснато, т.е. изучаваната система диференциални уравнения е подложена отново на импулсни въздействия. Действително, в тези моменти, за «пренебрежимо малко време» в сравнение с общата продължителност на изучавания процес, затворът на клапана се премества от крайно долно положение

$$\Delta = \Delta_{\min} = 0$$

в крайно горно положение

$$\Delta = \Delta_{\max} = \frac{1}{C_s} \left(\frac{\pi d^2}{4} (P_1 - P_2) - C_0 \right).$$

Стойността на $\Delta_{\max}$ се получава, като дясната страна на второто уравнение на (А) се приравни на 0, т.е. предполага се, че непосредствено след превключване на моделната система от затворено в отворено състояние скоростта на затвора на клапана е 0. С други думи, скоростта на затвора е 0, когато е в крайно горно положение, т.е. в моментите $t_2 + 0, t_4 + 0, \dots$ Изпълнени са равенствата:

$$\Delta(t_{2i} - 0) = \Delta(t_{2i}) = \Delta_{\min}, \quad \Delta(t_{2i} + 0) = \Delta_{\max}, \quad i = 1, 2, \dots$$

В моментите на превключване от затворено в отворено състояние останалите фазови функции на моделната система (y и P_1) не се променят скокообразно. Изпълнени са импулсните равенства:

$$\begin{aligned} (\Delta(t_{2i} + 0), y(t_{2i} + 0), P_1(t_{2i} + 0)) &= (\Delta(t_{2i}), y(t_{2i}), P_1(t_{2i})) + (\Delta_{\max}, 0, 0) \\ &= (Id + I^\uparrow)(\Delta(t_{2i}), y(t_{2i}), P_1(t_{2i})), \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

където импулсната функция в този случай има вида $I^\uparrow(\Delta, y, P_1) = (\Delta_{\max}, 0, 0)$.

По този начин установяваме, че решението на моделната система диференциални уравнения е прекъснато (по част от фазовите координати) в моментите на превключване $t_1, t_2, t_3, \dots$ Прекъсванията са от първи род, т.е. изучаваните решения са с ограничен скок. Без ограничение на общността, можем да считаме, че решението на моделната система е непрекъснато отляво в дефиниционния си времеви интервал.

Моделиращата система с променлива структура и импулси можем да запишем най-общо във формата на основната задача (А), където:

- размерността $n = 3$;
- неизвестната функция $x = x(t) = (\Delta(t), y(t), P_1(t))$;
- десните страни на системата се определят с помощта на равенствата:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_i(\Delta, y, P_1) \\ &= \begin{cases} \left(y, \frac{1}{m} \left(\frac{\pi d^2}{4} (P_1 - P_2) - C_0 - C_s \Delta \right), \right. \\ \quad \left. \frac{E}{V} \left(Q_1 - v \pi d \Delta \sin \alpha \sqrt{\frac{2}{\omega} (P_1 - P_2)} \right) \right), & i = 2j - 1, \\ \left(0, 0, \frac{E}{V} Q_1 \right), & i = 2j, \end{cases} \end{aligned}$$

където $j = 1, 2, \dots$;

- превключващите функции имат вида:

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(\Delta, y, P_i) = \begin{cases} \varphi^\downarrow(\Delta) = \Delta, & i = 2j - 1, \\ \varphi^\uparrow(P_i) = \frac{1}{4} \pi d^2 (P_1 - P_2) - C_0, & i = 2j, \quad j = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

- импулсните функции се задават с помощта на равенствата:

$$I_i(x) = I_i(\Delta, y, P_i) = \begin{cases} I^\downarrow(\Delta, y, P) = (0, -y, 0), & i = 2j - 1, \\ I^\uparrow(\Delta, y, P) = (\Delta_{\max}, 0, 0), & i = 2j, \quad j = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

- началният момент $t_0 = 0$;

- ще предполагаме, че началната точка $x_0 = (\Delta_0, y_0, P_{10})$ удовлетворява ограничения, съобразени с параметрите на механичната система.

Основната задача в параграфа е установяването на факта, че решението на математическия модел зависи непрекъснато от началното условие и превключващите функции. За целта е показана валидността на условията на Теорема 1.6 (Н1.1÷Н1.8, Н1.10):

Предлагаме следното тълкуване на получените резултати. Да изследваме динамиката на затвора на даден клапан при едни и същи външни и вътрешни условия (параметри) на системата. Извършваме два експеримента. Първият от тях ще наричаме основен, а вторият - смутен. Допустимите начални разлики при осъществяването на двата експеримента са следните:

- различни начални моменти;
- различни начални състояния на механичната система, по-точно допустими са:
 - разлика в отместванията на затвора относно неговото легло,
 - разлика в началната скорост на движение на затвора,
 - разлика в първоначалните налягания във входящия колектор;
- различни превключващи функции, например изменения във височината на леглото (получават се при продължителна употреба, т.е. при изхабяване на леглото на клапана), изменения в параметрите, определящи силата на пружината и др.

Двата експеримента, макар и с различни начални моменти, се наблюдават до един и същи краен момент.

Тогава, ако началните разлики, описани по-горе, са „достатъчно близки” помежду си, то трите динамични състояния на механичната система:

- големина на отместването на затвора,
- скорост на движение на затвора,
- налягане във входящия колектор,

при двата експеримента могат да бъдат “произволно близки” един към друг през общото време на наблюдение. Близостта между споменатите динамични състояния на механичната система е възможно да се нарушава само в симетрични околности на превключващите моменти на системата при основния експеримент. Тези околности могат да са с произволно малки радиуси.

Глава 2. Устойчивост на решенията на диференциални уравнения с променлива структура и нефиксирани моменти на импулси относно началното условие

В тази глава (както и в предходната) се изучава специфичен клас нелинейни неавтономни системи обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси.

Накратко в първия параграф на главата са намерени достатъчни условия за устойчивост, равномерна устойчивост и асимптотическа равномерна устойчивост относно началното условие на нулевото решение на началната задача за описаните по-горе системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Ще отбележим, че нулевото решение не е подложено на импулсни въздействия, за разлика от съответното му смутено решение. Това обстоятелство дава възможност да се изисква “равномерна близост” между тези две решения от началния момент до безкрайност (без прекъсвания).

Резултатите са получени с помощта на подходяща модификация на втория метод на Ляпунов (известен още като директен метод). Накратко, същността на предложената модификация се състои в следното. За всяка система от диференциални уравнения с променлива структура и импулси се построява редица от функции на Ляпунов, притежаващи специфични свойства. Качествата на функциите от помощната редица гарантират различните видове устойчивост на нулевото решение.

Ще обърнем внимание на следните факти:

1. Последователно, всяка една от функциите на Ляпунов (от построената помощна редица) съответства на поредната дясна страна на разглежданата система диференциални уравнения с променлива структура и импулси;
2. Последователната смяна (активиране) на функциите на Ляпунов се синхронизира във времето със смяната на дясната страна на изучаваната система, т.е. моментите, в които се осъществяват тези промени са едни и същи;
3. Ще отбележим, че се допуска всяка една от функциите на Ляпунов да е по части непрекъсната функция. Точките на прекъсване за всяка една от тях съвпадат с множество на превключване на съответната дясна страна на системата.

Резултатите от този параграф са публикувани в [115].

Накратко основните резултати, получени във втория параграф на тази глава, се отнасят за асимптотическата устойчивост на ненулевите решения. Ще обърнем внимание, че при ненулевите решения съответните моменти на превключване на решението на изходната задача и на решението на смутената задача са различни. Това означава, че между всеки два съответни моменти на превключване равномерна близост между тези две решения не може да се изисква. Това обстоятелство се отразява съществено на проведените изследвания в параграфа и значително ги затруднява. В случая разработения метод с използването на редици от функции на Ляпунов е неприложим. Поради тази причина и с цел да се облекчат изследванията е разгледан само случаят, когато превключващите множества са хиперравнини от фазовото пространство на системата с променлива структура и импулси. Основният резултат се състои в намирането на достатъчни условия, при които, ако ненулевите решения на всяка една от съответните системи без импулси и фиксирани десни страни, съвпадащи с някоя от дясните страни на системата с променлива структура, са експоненциално устойчиви, то решенията на разглежданата система с променлива структура и импулси са асимптотически устойчиви.

Различни аспекти на директния метод на Ляпунов за системи обикновени диференциални уравнения (без импулси и променлива структура) са дадени в множество публикации, от които тук ще посочим монографиите: [2], [3], [5], [17], [19], [29], [31], [38], [42], [117], [151], [154] и [238]. С. Гургула и Н. Перестюк са първите, които прилагат втория метод на Ляпунов за решенията на

импулсни системи. В [9] те използват класическите непрекъснати функции на Ляпунов за изследване на устойчивостта на нулевото решение на импулсни системи диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсни въздействия. Ще отбележим, че използването на непрекъснатите помощни функции силно стеснява приложението на директния метод. Основна причина за това е фактът, че решенията на импулсните системи са частично непрекъснати функции. Прекъснатите функции на Ляпунов са въведени от Байнов и Симеонов в [99]. Върху теорията на устойчивостта на импулсните системи са посветени редица изследвания, от които тук ще посочим следните: [6], [7], [8], [9], [10], [16], [23], [24], [26], [27], [32], [41], [44], [45], [46], [47], [51], [53], [59], [62], [64], [76], [77], [78], [82], [83], [84], [85], [87], [88], [92], [93], [97], [99], [102], [103], [104], [108], [119], [127], [129], [131], [132], [136], [138], [146], [147], [149], [150], [155], [161], [168], [169], [170], [171], [172], [173], [174], [175], [185], [186], [188], [191], [192], [193], [194], [195], [197], [201], [202], [203], [205], [206], [208], [209], [213], [216], [217], [220], [221], [222], [223], [225], [233], [235], [236], [237], [239], [240], [241] и др.

Както казахме по-горе основен обект на изследване в първия параграф на втора глава е основната начална задача (А) за системи нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти. Решението на задачата ще означаваме с $x(t; t_0, x_0)$.

Ще използваме следните условия:

H2.1. $0 \in D$ и $f_i(t, 0) = 0, t \in R^+, i = 1, 2, \dots$.

H2.2. $\varphi_i(0, 0, \dots, 0) \neq 0, i = 1, 2, \dots$,

Тривиално се доказва следната теорема.

Теорема 2.1. Нека са изпълнени условията H1.1, H2.1 и H2.2.

Тогав импулсната система (А) притежава нулево решение, т.е. $x(t; t_0, 0) = 0$ при $0 \leq t_0 \leq t < \infty$.

Дефиниция 2.1. Ще казваме, че нулевото решение на системата (А) е:

- устойчиво относно началното условие, ако:

$$(\forall t_0 \in R^+) (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0): \\ (\forall x_0 \in D \cap B_\delta(0)) \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, t \geq t_0;$$

- равномерно устойчиво относно началното условие, ако:

$$(\forall t_0 \in R^+) (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0): \\ (\forall x_0 \in D \cap B_\delta(0)) \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, t \geq t_0;$$

- асимптотически устойчиво относно началното условие, ако то е устойчиво и $(\forall t_0 \in R^+) (\exists \lambda = \lambda(t_0) > 0): (\forall x_0 \in D \cap B_\lambda(0)) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0$;

- равномерно асимптотически устойчиво относно началното условие, ако то е равномерно устойчиво и

$$(\exists \lambda = \text{const} > 0) (\forall t_0 \in R^+) (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\exists T = T(\varepsilon) > 0): \\ (\forall t \geq t_0 + T) (\forall x_0 \in B_\lambda(0)) \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon.$$

Дефиниция 2.2. Ще казваме, че е зададена редица от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов:

$$\{V_i; V_i: R^+ \times D \rightarrow R^+, i = 1, 2, \dots\},$$

съответна на системата диференциални уравнения с променлива структура и импулси (A), ако:

1. $V_i \in C[R^+ \times D \setminus \Phi_i, R^+], i = 1, 2, \dots;$

2. За всяко $i = 1, 2, \dots$ и всяка точка $(t, x_{\Phi_i}) \in R^+ \times \Phi_i$ съществуват границите:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_{\Phi_i}, \Phi_i(x) > 0 \\ (t, x) \in R^+ \times D}} V_i(t, x) = V_i(t, x_{\Phi_i} - 0) = V_i(t, x_{\Phi_i}), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_{\Phi_i}, \Phi_i(x) > 0 \\ (t, x) \in R^+ \times D}} V_i(t, x) = V_i(t, x_{\Phi_i} + 0).$$

Дефиниция 2.3. Нека $\{V_i; i = 1, 2, \dots\}$ е редица от скалярни частично непрекъснати функции на Ляпунов.

Тогава за всяка точка $(t, x) \in R^+ \times D \setminus \Phi_i$ и за всяко $i = 1, 2, \dots$ дефинираме производна на функцията на Ляпунов V_i в точката (t, x) по импулсната система (A):

$$\dot{V}_i(t, x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (V_i(t + h, x + hf_i(t, x)) - V_i(t, x)).$$

Производната на всяка една от функциите на Ляпунов $V_i, i = 1, 2, \dots$, във всяка една точка $(t, x) = (t, x(t; t_0, x_0)) \in [t_0, \infty) \times D \setminus \Phi_i$ по импулсната система диференциални уравнения (A) съвпада с горната дясна производна на Дини в същата точка по решението на разглежданата система.

По-нататък ще използваме следния клас от скалярни функции:

$$K = \{a \in C[R^+, R^+], a \text{ е строго монотонно растяща и } a(0) = 0\}.$$

Основните резултати са формулирани в следните теореми:

Теорема 2.2. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H1.1 ÷ H1.8, H2.1 и H2.2.
2. Съществува редица от скалярни частично непрекъснати функции на Ляпунов

$$\{V_i; V_i : R^+ \times D \rightarrow R^+, i = 1, 2, \dots\},$$

съответна на импулсната система диференциални уравнения (A), такава, че:

2.1. $V_i(t, 0) = 0, t \in R^+, i = 1, 2, \dots;$

2.2. На горната редица от функции на Ляпунов съответства функция $a \in K$, такава, че

$$a(\|x\|) \leq V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times D, i = 1, 2, \dots;$$

2.3. Изпълнено е

$$V_{i+1}(t + 0, x + I_i(x)) = V_{i+1}(t, x + I_i(x)) \leq V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times \Phi_i, i = 1, 2, \dots;$$

2.4. Изпълнено е

$$\dot{V}_i(t, x) \leq 0, (t, x) \in R^+ \times (D \setminus \Phi_i), i = 1, 2, \dots;$$

Тогава:

1. Началната задача за системата диференциални уравнения с променлива структура и импулси (A) притежава решение, продължимо до безкрайност.
2. Нулевото решение на изучаваната система (A) е устойчиво относно началното условие.

Теорема 2.4. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H1.1 ÷ H1.8, H2.1 и H2.2.

2. Съществува редица от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов

$$\{V_i; V_i : R^+ \times D \rightarrow R^+, i = 1, 2, \dots\},$$

съответна на импулсната система диференциални уравнения (A), такава, че:

2.1. За горната редица от функции на Ляпунов съществуват функции $a, b \in K$, такива, че

$$a(\|x\|) \leq V_i(t, x) \leq b(\|x\|), (t, x) \in R^+ \times D, i = 1, 2, \dots;$$

2.2. Изпълнено е

$$V_{i+1}(t + 0, x + I_i(x)) = V_{i+1}(t, x + I_i(x)) \leq V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times \Phi_i, i = 1, 2, \dots;$$

2.3. Изпълнено е

$$\dot{V}_i(t, x) \leq 0, (t, x) \in R^+ \times (D \setminus \Phi_i), i = 1, 2, \dots.$$

Тогав импулсната система (A) притежава равномерно устойчиво нулево решение.

Теорема 2.5. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H1.1 ÷ H1.8, H2.1 и H2.2.
2. Съществува редица от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов

$$\{V_i; V_i : R^+ \times D \rightarrow R^+, i = 1, 2, \dots\},$$

съответна на импулсната система диференциални уравнения (2.1), (2.2), (2.3), такава, че:

2.1. На горната редица от функции на Ляпунов съответстват функции $a, b \in K$, такива, че

$$a(\|x\|) \leq V_i(t, x) \leq b(\|x\|), (t, x) \in R^+ \times D, i = 1, 2, \dots;$$

2.2. Изпълнено е

$$V_{i+1}(t + 0, x + I_i(x)) = V_{i+1}(t, x + I_i(x)) \leq V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times \Phi_i, i = 1, 2, \dots;$$

2.3. Съществува функция $c \in K$ такава, че

$$\dot{V}_i(t, x) \leq -c(\|x\|), (t, x) \in R^+ \times (D \setminus \Phi_i), i = 1, 2, \dots.$$

Тогав импулсната система (A) притежава равномерно асимптотически устойчиво нулево решение.

Теорема 2.6. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H1.1 ÷ H1.8, H2.1 и H2.2.
2. Съществува редица от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов

$$\{V_i; V_i : R^+ \times D \rightarrow R^+, i = 1, 2, \dots\},$$

съответна на импулсната система диференциални уравнения (A), такава, че:

2.1. За горната редица от функции на Ляпунов съществуват функции $a, b \in K$, такива, че

$$a(\|x\|) \leq V_i(t, x) \leq b(\|x\|), (t, x) \in R^+ \times D, i = 1, 2, \dots;$$

2.2. Изпълнено е

$$V_{i+1}(t + 0, x + I_i(x)) = V_{i+1}(t, x + I_i(x)) \leq V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times \Phi_i, i = 1, 2, \dots;$$

2.3. Съществува константа $c \in R^+$ такава, че

$$\dot{V}_i(t, x) \leq -c V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times (D \setminus \Phi_i), i = 1, 2, \dots.$$

Тогава импулсната система (A) притежава равномерно асимптотически устойчиво нулево решение.

Обект на изследване във втория параграф на втора глава е следната начална задача:

$$(B) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_i(t, x), \quad \langle a_i, x(t) \rangle \neq \alpha_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ \langle a_i, x(t_i) \rangle &= \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, \\ x(t_i + 0) &= x(t_i) + I_i(x(t_i)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

където:

фазовото пространство D на разглежданата система е непразна област от R^n ;

- функциите $f_i : R^+ \times D \rightarrow R^n$;
- векторите $\alpha_i \in R^n$, $\alpha_i \neq 0$, $\|\alpha_i\| = 1$;
- константите $\alpha_i \in R$;
- функциите $I_i : D \rightarrow R^n$;
- $(Id + I_i) : D \rightarrow D$, Id е идентитетът в R^n ;
- началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$.

Както се вижда превключващите множества:

$$\Phi_i = \{x \in D; \langle a_i, x \rangle = \alpha_i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

представяват части от хиперравнини, разположени във фазовото пространство на системата. Решението на задачата (B) означаваме с $x(t; t_0, x_0)$.

Разгледаме и съответната смутена начална задача:

$$(Г) \quad \begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= f_i(t, x^*), \quad \langle a_i, x^*(t) \rangle \neq \alpha_i, \quad t_{i-1}^* < t < t_i^*, \\ \langle a_i, x^*(t_i^*) \rangle &= \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, \\ x^*(t_i^* + 0) &= x^*(t_i^*) + I_i(x^*(t_i^*)), \\ x^*(t_0^*) &= x_0^*, \end{aligned}$$

където точката $(t_0^*, x_0^*) \in R^+ \times D$. В общия случай е изпълнено $(t_0^*, x_0^*) \neq (t_0, x_0)$.

Решението на горната задача означаваме с $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$.

Въпреки, че разликата между основната и смутената задачи е само в началната точка, то този факт дава отражение при определяне на дефиниционните интервали на решенията им. Съществено е влиянието на различните начални точки при пресмятане на моментите на промяна на десните страни на системата, които разбира се съвпадат с моментите на импулсни въздействия върху съответните им решения. Още веднъж ще подчертаем, че в общия случай са изпълнени неравенствата: $t_0^* \neq t_0$, $t_1^* \neq t_1$, $t_2^* \neq t_2, \dots$, $x_0^* \neq x_0$.

Дефиниция 2.4. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (B) е:

- устойчиво относно началното условие, ако:

$$(\forall t_0 \in R^+) (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) (\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon, \eta) > 0):$$

$$\begin{aligned} & (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in D \cap B_\delta(x_0)) \\ \Rightarrow & \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0^{\max} = \max\{t_0^*, t_0\}, \\ & |t - t_i| > \eta_i, i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta; \end{aligned}$$

- *равномерно устойчиво относено началното условие, ако:*

$$\begin{aligned} & (\forall t_0 \in R^+) (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta) > 0): \\ & (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in D \cap B_\delta(x_0)) \\ \Rightarrow & \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0^{\max}, \\ & |t - t_i| > \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta; \end{aligned}$$

- *асимптотически устойчиво относено началното условие, ако то е устойчиво и*

$$\begin{aligned} & (\forall t_0 \in R^+) (\exists \lambda = \lambda(t_0) > 0) \\ & (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \lambda) (\forall x_0^* \in D \cap B_\lambda(x_0)) \\ \Rightarrow & \lim_{t \rightarrow \infty, |t - t_i| > \eta_i, i = 1, 2, \dots} \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| = 0; \end{aligned}$$

- *равномерно асимптотически устойчиво относено началното условие, ако то е равномерно устойчиво и*

$$\begin{aligned} & (\exists \lambda = \text{const} > 0) (\forall t_0 \in R^+) (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\exists T = T(\varepsilon) > 0): \\ & (\forall t \geq t_0 + T, |t - t_i| > \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta) \\ & (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \lambda) (\forall x_0^* \in D \cap B_\lambda(x_0)) \\ \Rightarrow & \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

От горната дефиниция се вижда, че при всички видове устойчивости на произволно ненулево решение на системите диференциални уравнения с променлива структура и импулсно въздействие, за които моментите на превключване са променливи, са налице специфични особености. Така например, “равномерна близост” между решението на изходната задача и решението на съответната й смутена задача не се изисква за всяко $t \geq t_0^{\max}$. Равномерната близост е допустимо да се нарушава, когато времето принадлежи на “контролируемо малки” околности на моментите на превключване. Неравенството $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta$ показва, че времетраенето на “неконтролируемото разстояние” между двете решения е с произволно малка обща продължителност η .

Ще използваме следните условия:

H2.3. *Функциите $f_i \in C[R^+ \times D, R^n]$, $i = 1, 2, \dots$*

H2.4. *Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че*

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \|f_i(t, x)\| \leq C_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H2.5. *Съществуват константи $C_{Id+I_i} > 0$ такива, че*

$$(\forall x', x'' \in \Phi_i) \Rightarrow \|(Id + I_i)(x') - (Id + I_i)(x'')\| \leq C_{Id+I_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots,$$

т.е. функциите $(Id + I_i)$ са Липшицови с константи C_{Id+I_i} ;

H2.6. Изпълнени са равенствата $\|a_i\|=1$ и съществуват константи $C_{\langle a_{i+1}, Id+I_i \rangle} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow |\langle a_{i+1}, (Id + I_i)(x) \rangle - \alpha_{i+1}| = |\langle a_{i+1}, x + I_i(x) \rangle - \alpha_{i+1}| \geq C_{\langle a_{i+1}, Id+I_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H2.7. Валидни са неравенствата:

$$(\langle \alpha_i, (Id + I_{i-1})(x) \rangle - \alpha_i) \langle \alpha_i, f_i(t, x) \rangle < 0, (t, x) \in R^+ \times D, \quad i = 1, 2, \dots, \quad I_0 \equiv Id.$$

H2.8. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{\langle a_i, Id+I_{i-1} \rangle}}{C_{f_i}}$ е разходящ.

H2.9. Съществуват константи $C_{\langle a_i, f_i \rangle} > 0$ такива, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow |\langle a_i, f_i(t, x) \rangle| \geq C_{\langle a_i, f_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H2.10. За всяко $i = 1, 2, \dots$ и за всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ решението на началната задача

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

съществува и е единствено за $t \geq t_0$.

Забележка 2.3. Ще отбележим, че ако съществуват константи C_f и $C_{\langle a, Id+I \rangle}$, такива, че са валидни неравенствата:

$$C_{f_1} \leq C_f, \quad C_{f_2} \leq C_f, \dots, \quad C_f = \text{const} > 0;$$

$$C_{\langle a_2, Id+I_1 \rangle} \geq C_{\langle a, Id+I \rangle}, \quad C_{\langle a_3, Id+I_2 \rangle} \geq C_{\langle a, Id+I \rangle}, \dots, \quad C_{\langle a, Id+I \rangle} = \text{const} > 0,$$

то условие H2.8.е в сила.

В следващата теорема ще изискваме всяко едно от решенията $X_i(t; t_0, x_0)$ на началните задачи (без импулси и с фиксирана структура)

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

да са равностепенно експоненциално устойчиви. Горните задачи ще наричаме съответни на изходната задача.

Дефиниция 2.5. Ще казваме, че решенията $X_i(t; t_0, x_0)$, $i = 1, 2, \dots$, на съответните задачи са равностепенно експоненциално устойчиви, ако

$$(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times D) (\forall i = 1, 2, \dots)$$

$$(\exists \lambda = \text{const} > 0) (\exists \delta = \text{const} > 0):$$

$$(\forall x_0^* \in D \cap B_\delta(x_0))$$

$$\Rightarrow \|X_i(t; t_0, x_0^*) - X_i(t; t_0, x_0)\| < \|x_0^* - x_0\| \exp(-\lambda(t - t_0)), \quad t \geq t_0,$$

Следващата теорема е основна в този параграф.

Теорема 2.11. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H2.3÷H2.7, H2.9 и H2.10.
2. Съществуват положителни константи C_f , C_{ld+1} , $C_{\langle a,ld+1 \rangle}$, $C_{\langle a,f \rangle}$, такива, че:

$$C_{f_i} \leq C_f, \quad C_{ld+I_i} \leq C_{ld+1}, \quad C_{\langle a_{i+1},ld+I_i \rangle} \geq C_{\langle a_i,ld+1 \rangle}, \quad C_{\langle a_i,f_i \rangle} \geq C_{\langle a,f \rangle} > 0, \quad i=1,2,\dots$$

3. Решенията $X_i(t; t_0, x_0)$ на съответните начални задачи са равностепенно експоненциално устойчиви.

Тогава, ако е изпълнено неравенството

$$\frac{C_{ld+1}(C_f + C_{\langle a,f \rangle}) + C_f}{C_{\langle a,f \rangle}} < \exp\left(\frac{\lambda C_{\langle a,ld+1 \rangle}}{C_f}\right),$$

то решението на разглежданата начална задача с променлива структура и импулси (B) е асимптотически устойчиво.

Глава 3. Ограниченост и непрекъсната зависимост на решения на диференциални уравнения с променлива структура и нефиксирани моменти на импулси

В тази глава се изучава специфичен клас нелинейни неавтономни системи обикновени диференциални уравнения с променлива структура и с импулси (в първия параграф) и без импулси (във втория параграф). Подобни системи се изучават и в предходните глави.

Накратко в първия параграф на главата са намерени достатъчни условия за ограниченост, равномерна ограниченост и равномерна финална ограниченост относно началното условие на решения на началната задача за описаните по-горе системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Ще отбележим, че при изследванията в този параграф решенията са подложени на импулсни въздействия. Въпреки това обстоятелство ограниченост се изисква от началния момент до безкрайност (без прекъсвания).

Резултатите са получени с помощта на подходяща модификация на втория метод на Ляпунов. Този математически апарат беше използван и в предходната глава.

Основните резултати, получени във втория параграф на тази глава се отнасят за системи диференциални уравнения с променлива структура и без импулси. Разглежданите системи притежават ограничени решения (по част от координатите) и сменят дясната си страна в моментите, в които решението достигне контура на фазовото пространство. Контурът се състои от две хиперравнини, ограничаващи последната координата на пространството. Изучен е въпросът за непрекъсната зависимост на решенията при постоянно действащи смущения, т.е. смущенията са във всяка една от десните страни на изучаваната система и в началната точка на съответната начална задача. Ще отбележим, че решението на изходната (основната) задача и решението на съответната смутена задача притежават различни превключващи моменти, т.е. решенията достигат контура на областта в различни моменти. Това означава, че структурните промени (смените на десните страни) се осъществяват по различно време. Въпреки това обстоятелство “близост” между двете решения се изисква и доказва в ограничен времеви интервал (без прекъсвания).

Както казахме, основен обект на изследване, както и в предходните параграфи, е начална задача за системи нелинейни неавтономни обикновени

диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти (А)

Дефиниция 3.1. Ще казваме, че решенията на системата диференциални уравнения с променлива структура и импулси (А) са:

- ограничени, ако

$$\begin{aligned} & (\forall t_0 \in R^+) (\forall \alpha = \text{const} > 0) (\exists \beta = \beta(t_0, \alpha) > 0): \\ & (\forall x_0 \in R^n, \|x_0\| < \alpha) \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0)\| < \beta, t \geq t_0; \end{aligned}$$

- равномерно ограничени, ако

$$\begin{aligned} & (\forall t_0 \in R^+) (\forall \alpha = \text{const} > 0) (\exists \beta = \beta(\alpha) > 0): \\ & (\forall x_0 \in R^n, \|x_0\| < \alpha) \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0)\| < \beta, t \geq t_0; \end{aligned}$$

- квази-равномерно финално ограничени, ако

$$\begin{aligned} & (\exists \beta = \text{const} > 0) (\forall \alpha = \text{const} > 0) (\exists T = T(\alpha) > 0): \\ & (\forall x_0 \in R^n, \|x_0\| < \alpha) \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0)\| < \beta, t \geq t_0 + T; \end{aligned}$$

- равномерно финално ограничени, ако решенията са равномерно ограничени и квази-равномерно финално ограничени.

Въвеждаме следните условия:

НЗ.1. Функциите $f_i \in C[R^+ \times R^n, R^n]$, $i = 1, 2, \dots$

НЗ.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times R^n) \Rightarrow \|f_i(t, x)\| \leq C_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

НЗ.3. Функциите $\varphi_i \in C^1[R^n, R]$, $i = 1, 2, \dots$

НЗ.4. Съществуват константи $C_{\text{grad} \varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in R^n) \Rightarrow \|\text{grad} \varphi_i(x)\| \leq C_{\text{grad} \varphi_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

НЗ.5. Функциите $I_i \in C[R^n, R^n]$, $i = 1, 2, \dots$

НЗ.6. Съществуват константи $C_{\varphi_{i+1}(Id+I_i)} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow |\varphi_{i+1}((Id + I_i)(x))| = |\varphi_{i+1}(x + I_i(x))| \geq C_{\varphi_{i+1}(Id+I_i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

НЗ.7. Валидни са неравенствата:

$$\varphi_i((Id + I_{i-1})(x)) \langle \text{grad} \varphi_i(x), f_i(t, x) \rangle < 0, (t, x) \in R^+ \times R^n, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където $I_0 \equiv Id$.

НЗ.8. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{\varphi_i(Id+I_{i-1})}}{C_{\text{grad} \varphi_i} \cdot C_{f_i}}$ е разходящ.

НЗ.9. Съществуват константи $C_{\langle \text{grad} \varphi_i, f_i \rangle} > 0$ такива, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times R^n) \Rightarrow |\langle \text{grad} \varphi_i(x), f_i(t, x) \rangle| \geq C_{\langle \text{grad} \varphi_i, f_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots$$

НЗ.10. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times R^n$ и за всяко $i = 1, 2, \dots$ решението на началната задача

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

съществува и е единствено за $t \geq t_0$.

НЗ.11. Съществува константа $C_I > 0$ такава, че

$$(\forall x \in R^n) \Rightarrow \|I_i(x)\| \leq C_I, \quad i = 1, 2, \dots$$

Основната цел на изследванията в първия параграф на трета глава е намирането чрез редици от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов на достатъчни условия за някои видове ограниченост на нулевото решение на разглежданата система (А).

Теорема 3.1. Нека са изпълнени условията:

3. Валидни са условията НЗ.1 ÷ НЗ.10.

4. Съществува редица от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов

$$\{V_i; V_i : R^+ \times D \rightarrow R^+, i = 1, 2, \dots\},$$

съответна на импулсната система диференциални уравнения (А), такава, че:

2.1. $V_i(t, 0) = 0, t \in R^+, i = 1, 2, \dots$;

2.2. За въведената редица от функции на Ляпунов съответства функция $a \in K$, такава, че:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} a(u) = \infty$$

$$a(\|x\|) \leq V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times R^n, i = 1, 2, \dots;$$

2.3. Изпълнено е

$$V_{i+1}(t + 0, x + I_i(x)) = V_{i+1}(t, x + I_i(x)) \leq V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times \Phi_i, i = 1, 2, \dots;$$

2.4. Изпълнено е

$$\dot{V}_i(t, x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (V_i(t + h, x + hf_i(t, x)) - V_i(t, x)) \leq 0$$

при $(t, x) \in R^+ \times (D \setminus \Phi_i), i = 1, 2, \dots$.

Тогава решенията на системата диференциални уравнения с променлива структура и импулси (А) са ограничени.

Теорема 3.2. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1 ÷ НЗ.11.

2. Съществува редица от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов

$$\{V_i; V_i : R^+ \times D \rightarrow R^+, i = 1, 2, \dots\},$$

съответна на импулсната система диференциални уравнения (3.1), (3.2), (3.3), такава, че:

2.1. На горната редица от функции на Ляпунов съответстват функции $a, b \in K$ и константа $\rho > 0$, такива, че:

$$2.1.1. a(\|x\|) \leq V_i(t, x) \leq b(\|x\|), (t, x) \in R^+ \times B_\rho^c(0), i = 1, 2, \dots$$

$$2.1.2. \lim_{u \rightarrow \infty} a(u) = \infty;$$

2.2. Изпълнено е

$$V_{i+1}(t+0, x+I_i(x)) = V_{i+1}(t, x+I_i(x)) \leq V_i(t, x), (t, x) \in R^+ \times (B_\rho^c(0) \cap \Phi_i), i = 1, 2, \dots;$$

2.3. Изпълнено е

$$\dot{V}_i(t, x) \leq 0, (t, x) \in R^+ \times (B_\rho^c(0) \setminus \Phi_i), i = 1, 2, \dots$$

Тогава решенията на системата диференциални уравнения с променлива структура и импулси (A) са равномерно ограничени.

Теорема 3.5. Нека е изпълнено:

1. Валидни са условията НЗ.1 ÷ НЗ.11 и условията 2.1 и 2.2 на Теорема 3.2.
2. В сила са неравенствата

$$\dot{V}_i(t, x) \leq -c(\|x\|), (t, x) \in R^+ \times (B_\rho^c(0) \setminus \Phi_i), i = 1, 2, \dots,$$

където функцията $c \in K$.

Тогава решенията на системата диференциални уравнения с променлива структура и импулси (A) са равномерно финално ограничени.

Основен обект на изследване в последния параграф на последната глава е следната начална задача за системи нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_i(t, x), \quad t_{i-1} < t \leq t_i; \\ (Д) \quad \chi_1 &< x^n(t) < \chi_2, \quad t_{i-1} < t < t_i; \\ x^n(t_i) &= \chi_p, \quad p \in \{1, 2\}, \quad i = 1, 2, \dots; \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

където:

- функцията $f_i : R^+ \times D \rightarrow R^n, f_i = (f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^n)$ и дефиниционното множество $D = R^{n-1} \times [\chi_1, \chi_2]$;
- $x = x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)), t \geq t_0$;
- χ_1 и χ_2 са реални константи, $\chi_1 < \chi_2$;
- началният момент $t_0 \in R^+$;
- началната точка $x_0 \in D$;

Решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (Д) е частично диференцируема функция.

Заедно с основната задача (Д) разглеждаме и така наречената смутена задача (при постоянно действащи смущения):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_i^*(t, x), \quad t_{i-1}^* < t \leq t_i^*; \\ (Е) \quad \chi_1 &< x^{*n}(t) < \chi_2, \quad t_{i-1}^* < t < t_i^*; \\ x^{*n}(t_i) &= \chi_p, \quad p \in \{1, 2\}, \quad i = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$x^*(t_0^*) = x_0^*,$$

където:

- функцията $f_i^* : R^+ \times D \rightarrow R^n, f_i^* = (f_i^{*1}, f_i^{*2}, \dots, f_i^{*n})$;
- $x^* = x^*(t) = (x^{*1}(t), x^{*2}(t), \dots, x^{*n}(t)), t \geq t_0^*$;
- началният момент $t_0^* \in R^+$;
- началната точка $x_0^* \in D$;

Разликата между двете задачи е в началните условия и десните страни. Ясно е, че в общия случай съответните решения и моментите на превключване на десните страни са различни. Решението на смутената задача (E) означаваме с $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$.

Дефиниция 3.2. Ще казваме, че решенията на системата диференциални уравнения с променлива структура (Д) зависят непрекъснато при постоянно действащи смущения, ако

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times D) (\forall T = \text{const} > t_0) (\forall f_i \in C[R^+ \times D, R^n], i = 1, 2, \dots) \\ & (\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0, T, f_i) > 0): \\ & (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in D, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & (\forall f_i^* \in C[R^+ \times D, R^n], \|f_i^*(t, x) - f_i(t, x)\| < \delta \text{ при } (t, x) \in R^+ \times D, i = 1, 2, \dots) \\ & \Rightarrow \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, t_0^{\max} \leq t \leq T, \end{aligned}$$

Основната цел на изследванията в параграфа е намирането на достатъчни условия, при които решенията на основната система зависят непрекъснато при постоянно действащи смущения. Ще използваме допълнително следните условия:

H3.12. Функциите $f_i \in C[R^+ \times D, R^n], i = 1, 2, \dots$.

H3.13. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \|f_i(t, x)\| \leq C_{f_i}, i = 1, 2, \dots$$

H3.14. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{C_{f_i}}$ е разходящ.

H3.15. Валидни са неравенствата:

$$f_i^n(t, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, \chi_p) \cdot f_{i+1}^n(t, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, \chi_p) < 0,$$

където $t \in R^+, (x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, \chi_p) \in D_p, p = 1, 2, i = 1, 2, \dots$.

H3.16. За всяка начална точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ и за всеки номер $i = 1, 2, \dots$ началната задача

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

притежава единствено решение.

Следната теорема е основна в параграфа

Теорема 3.11. *Нека са валидни условията НЗ.12 ÷ НЗ.16.*

Тогава решенията на системата диференциални уравнения с променлива структура (Д) зависят непрекъснато при постоянно действащи смущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящия дисертационен труд са получени следните по-важни резултати:

1. Въведено е понятието непрекъсната зависимост относно началното условие и превключващите функции на решенията на системи нелинейни диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти. Намерени са достатъчни условия, при които съответната система диференциални уравнения притежава въведеното качество.
2. Получените резултати са приложени при описване и изучаване на динамиката на затвора на предпазен клапан.
3. Въведен е нов математически апарат: редици от функции на Ляпунов. С тяхна помощ са намерени достатъчни условия за различни видове устойчивост относно началните условия на нулевото и ненулевите решения на системи нелинейни диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти.
4. Редиците от функции на Ляпунов са използвани за установяване на условия за ограниченост на решенията на системи нелинейни диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти.
5. Изучен е въпросът за непрекъсната зависимост относно постоянно действащи смущения на ограничени по част от променливите решения на системи нелинейни диференциални уравнения с променлива структура.

ДЕКЛАРАЦИЯ

1. Резултатите и сведенията от увода са предварителни и се основават на различни литературни източници, които са надлежно посочени.
2. Резултатите в първите три параграфа са публикувани съответно в три научни статии. Във всяка една от тях участва като автор Р. Чуклева. Списъкът на тези публикации е даден отделно. Тези статии са приложени и в библиографията.
3. Резултатите в следващите три параграфа са нови и се публикуват за първи път тук.

СПИСЪК

на публикации по дисертационния труд

1. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses with respect to the switching functions, International J. of Applied Science and Technology, (2011), Vol. 1, № 5, 46-59.*
2. Chukleva R., *Modeling using differential equations with variable structure and impulses, International J. of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 72, № 3, 343-364.*

3. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2012), Vol. 11, № 1, 57-80.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Алимов Ю., О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначной правой частью, *Автоматика и телемеханика*, (1961), Том 22, № 7, 817-830.
2. Андронов А., Витт А., Хайкин С., *Теория колебаний*, Наука, Москва, (1981).
3. Бабицкий В., Крупенин В., *Колебания в сильно нелинейных системах*, Наука, Москва, (1985).
4. Баутин Н., *Теория точечных преобразований и динамическая теория часов*, Труды ICNO V, АН УССР, Киев, (1963), Том 2, 29-54.
5. Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, И-во Иностранной литературы, Москва, (1954).
6. Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., *Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях*, Научная думка, Москва, (1988).
7. Борисенко С., Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсными воздействиями, *Укр. мат. журнал*, (1983), Том 35, № 2, 144-150.
8. Борисенко С., Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсными воздействиями, *Дифференц. уравнения*, (1986), Том 22, № 5, 884-886.
9. Гургула С., Перестюк Н., Об второго метода Ляпунова для систем с импульсными воздействиями, *Докл. АН Укр. ССР*, (1982), Сер. А, Том 10, 11-14.
10. Завалицин С., Сесекин А., Дрозденко С., *Динамические системы с импульсной структурой*, Средне Урал. кн. изд-во, Свердловск, (1983).
11. Завалицин С., Сесекин А., *Импульсные процессы: Модели и приложения*, Наука, Москва, (1991).
12. Калигин Б., О колебаниях маятника с ударными импульсами, *Дифференц. уравнения*, (1969), Том 5, № 7, 1267-1274.
13. Калигин Б., О колебаниях маятника с ударными импульсами, часть 2, *Дифференц. уравнения*, (1970), Том 6, № 12, 2174-2181.
14. Калигин Б., О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением, *Дифференц. уравнения*, (1971), Том 7, № 3, 540-542.
15. Каранджулов Л., Стоянова Я., Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, *Весці НАН Беларусі*, (2003), Том 2, 59-65.
16. Каранджулов Л., Стоянова Я., Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, *Дифференц. уравнения*, (2004), Том 40, № 3, 310-323.
17. Кобринский А. Е., Кобринский А. А., *Выброударные системы*, Наука, Москва, (1973).
18. Козлов Р., К теории дифференциальных уравнений с разрывными правой частями, *Дифференц. уравнения*, (1974), Том 10, № 7, 1264-1275.
19. Крылов Н., Боголюбов Н., *Введение в нелинейную механику*, Изд. УССР, Киев, (1937).
20. Матов В., Определяне на градиента на оптимизация на динамичен модел, зависещ от параметър, *Математика и математическо образование*, И-во на БАН, (1983), 195-201.
21. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правой частями I, *Дифференц. уравнения*, (1967), Том 3, № 3, 395-409.
22. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правой частями II, *Дифференц. уравнения*, (1967), Том 3, № 5, 869-878.
23. Мильман В., Мышкис А., Об устойчивости движения при наличии толчков, *Сиб. мат. журнал*, (1960), Том 1, № 2, 233-237.
24. Мильман В., Мышкис А., Случайные толчки в линейных динамических системах, *Приближенные методы решения дифференциальных уравнений*, Киев, Изд-во АН УССР, (1963), 64-81.
25. Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., *Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью*, Институт математики НАН Украины, Киев, (2007).
26. Плотников В., Китанов Н., Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления, *Кибернетика и системный анализ*, (2002), Том 5, 71-85.
27. Плотников В., Китанов П., Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами, *Укр. мат. журнал*, (1997), Том 49, № 11, 1504-1511.
28. Плотников В., Плотникова Л., Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами, *Укр. мат. журнал*, (1995), Том 47, № 11, 1526-1532.
29. Попов Е., *Динамика систем автоматического регулирования*, Гостехиздат, Москва, (1964).
30. Рожко В., Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах, *Дифференц. уравнения*, (1975), Том 11, № 6, 1005-1012.
31. Руш Н., Абетс П., Лалуа М., *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, Москва, (1983).
32. Самойленко А., Перестюк Н., Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями, *Дифференц. уравнения*, (1974), Том 10, № 11, 2001-2010.
33. Самойленко А., Перестюк Н., *Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями*, Вища шк., Киев, (1987).
34. Самойленко А., Перестюк Н., О методе усреднения в системах с импульсными воздействиями, *Укр. мат. журнал*, (1974), Том 24, № 3, 411-418.

35. Самойленко А., Перестюк Н., Трофимчук С., Проблема “биений” в импульсных системах, *Институт математики АН УкрССР, Киев*, (1990).
36. Самойленко А., Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, *Укр. мат. журнал*, (1961), Том 13, № 3, 85-94.
37. Симеонов П., Върху качествената теория на импулсните диференциални уравнения, *Автореферат за присъждане на научна степен „доктор на математическите науки”*, София, (1998).
38. Филатов А., Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, “ФАН”, Узбекской ССР, Ташкент, (1971).
39. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, *Наука, Москва*, (1985).
40. Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, *Мир, Москва*, (1971).
41. Цыпкин Я., Критерии абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента, *ДАН СССР*, (1964), Том 155, № 5, 1029-1032.
42. Черноусько Ф., Акуленко Л., Соколов Б., Управление колебаниями, *Наука, Москва*, (1980).
43. Agarwal R., Franco D., O'Regan D., Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations, *Aequationes Mathematicae*, (2005), Vol. 69, № 1-2, 83-96.
44. Agarwal R., O'Regan D., A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem, *Applied Mathematics and Computation*, (2003), Vol. 161, № 2, 433-419.
45. Agarwal R., O'Regan D., Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, (2000), Vol. 114, № 1, 51-59.
46. Ahmad B., Sivasundaram S., Dynamics and stability of impulsive hybrid setvalued integro-differential equations with delay, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2289-2293.
47. Ahmad B., Sivasundaram S., Instability criteria for impulsive hybrid state dependent delay integrodifferential systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2010), Vol. 11, № 2, 750-758.
48. Ahmad B., Sivasundaram S., The monotone iterative technique for impulsive hybrid set valued integro-differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 12, 2260-2276.
49. Ahmad S., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E., Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2004), Vol. 290, № 2, 436-451.
50. Ahmad S., Stamov G., Almost periodic solutions of N-dimensional impulsive competitive systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.
51. Ahmad S., Stamova I., Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 3, 786-795.
52. Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2006), Vol. 7, № 5, 1255-1267.
53. Akhmet M., On the smoothness of solutions of impulsive autonomous system, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 60, № 2, 311-324.
54. Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., Control over linear pulse systems, *Ukrainian Math. J.*, (1995), Vol. 47, № 3, 360-368.
55. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, *Computers & Mathematics with Applications*, (2002), Vol. 43, № 10-11, 1203-1218.
56. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2000), Vol. 3, № 4, 7-18.
57. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 39, № 4, (2000), 483-497.
58. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems in population dynamics, *Applicable Analysis*, (1999), Vol. 69, № 3&4, 207-221.
59. Anokhin A., Berezensky L., Braverman E., Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1995), Vol. 193, 923-941.
60. Baek H., Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008), Article ID 752403, 18 p.
61. Bailey J., Shafer S., A simple analytical solution to the three-compartment pharmacokinetic model suitable for computer-controlled infusion pumps, *Biomedical Engineering*, (1991), Vol. 38, № 6, 522-525.
62. Bainov D., Covachev V., Impulsive differential equations with a small parameter, *World Scientific*, Singapore, (1994).
63. Bainov D., Covachev V., Stamova I., Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, (1991), Vol. 12, № 2, 149-161.
64. Bainov D., Covachev V., Stamova I., Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1994), Vol. 187, № 3, 790-808.
65. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument, *Kodai Math. J.*, (1997), Vol. 20, № 2, 120-126.
66. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument, *Applicable Analysis*, (1996), Vol. 63, № 3&4, 287-297.
67. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument, *J. of Applied Analysis*, (1998), Vol. 4, № 2, 215-230.

68. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument, *J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, (1998), Vol. 11, № 1, 95-102.
69. Bainov D., Dimitrova M., Petrov V., Oscillatory properties of solutions of impulsive differential equations with several retarded argument, *Georgian Math. J.*, (1998), Vol. 5, № 3, 201-212.
70. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., An application of the method of quasilinearization for a periodic problem for systems of nonlinear differential equations, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, (1997), Tome 50, № 11-12, 21-22.
71. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations, *Multivariate Approximation and Splines*, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.
72. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations, *Indian J. pure Appl. Math.*, (1999), Vol. 30, № 9, 893-910.
73. Bainov D., Dishliev A., Population dynamic control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, *Math. Model. Numer. Anal.*, (1990), Vol. 24, № 6, 681-692.
74. Bainov D., Dishliev A., Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences*, (1989), Tome 42, № 12, 29- 32.
75. Bainov D., Dishliev A., Stamov G., Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations, *Kumamoto J. Math.*, (1997), Vol. 10, 1-10.
76. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations, *Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII-Sc. Mat.*, (1995), Vol. 41, 45-54.
77. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics, *ANZIAM J.*, (2002), Vol. 43, 525-539.
78. Bainov D., Dishliev A., Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, *International J. Systems Sci.*, (1990), Vol. 21, № 12, 2637-2643.
79. Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., Partial averaging for impulsive differential equations with supremum, *Georgian Math. J.*, (1996), Vol. 3, № 1, 11-26.
80. Bainov D., Hristova S., *Differential Equations with Maxima*, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, New York, (2011).
81. Bainov D., Kolev D., Nakagawa K., The control of the blowing-up time for the solution of the semilinear parabolic equation with impulsive effect, *J. Korean Math. Soc.*, (2000), Vol. 37, № 5, 793-802.
82. Bainov D., Kostadinov S., Minh N., Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations, *Science Culture Technology Publishing*, (1994).
83. Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 36, № 2, 383-393.
84. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., L_p -equivalence of linear and nonlinear impulsive differential equations in a Banach space, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (1992), Vol. 36, 17-33.
85. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space, *International J. of Theoretical Physics*, (1989), Vol. 28, № 7, 797-814.
86. Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1995), Vol. 194, № 3, 612-639.
87. Bainov D., Kulev G., Stamova I., Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations, *SUT J. of Math.*, (1995), Vol. 1, 55-71.
88. Bainov D., Kulev G., Stamova I., Instability of solutions of impulsive systems of differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 35, № 8, 1799-1804.
89. Bainov D., Markova N., Simeonov P., Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown functions, *J. of Computational and Applied Math.*, (1998), Vol. 91, № 1, 87-96.
90. Bainov D., Milusheva S., Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1983), Vol. 95, № 1, 85-105.
91. Bainov D., Milusheva S., Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses, *Zeitschrift fur Angawandte Mathematik und Physik*, (1981), Vol. 32, 237-254.
92. Bainov D., Minchev E., Trends in the theory of impulsive partial differential equations, *Nonlinear Word*, (1996), Vol. 3, 357-384.
93. Bainov D., Nenov S., Limit sets of impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations*, (1994), 31-34.
94. Bainov D., Petrov V., Proytcheva V., Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with "maxima", *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1997), Vol. 83, № 2, 237-249.

95. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions*, World Scientific, Singapore, (1995).
96. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications*, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1993).
97. Bainov D., Simeonov P., *Integral inequalities and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
98. Bainov D., Simeonov P., *Oscillation theory of impulsive differential equations*, International Publications, FL, (1998).
99. Bainov D., Simeonov P., *System with impulse effect: Stability theory and applications*, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
100. Ballinger G., Liu X., *Permanence of population growth model with impulsive effects*, *Mathematics and Computer Modeling*, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.
101. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive differential equations and inclusions*, *Contemporary Mathematics and its Applications*, Hindawi Publishing Corporations, Vol. 2, (2006).
102. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces*, *Applicable Analysis*, (2001), Vol. 80, № 3, 353-365.
103. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 47, № 10-11, 1659-1665.
104. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay*, *International J. of Applied Math. Sciences*, (2005), Vol. 2, № 1, 130-148.
105. Benchohra M., Ouahab A., *Impulsive neutral functional differential equations with variable times*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2003), Vol. 55, № 6, 679-693.
106. Berezansky L., Braverman E., *On Impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications*, *J. of Differential Equations and Applications*, (2004), Vol. 10, № 9, 851-868.
107. Braverman E., Mamdani R., *Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment*, *J. of Mathematical Biology*, (2008), Vol. 57, № 3, 413-434.
108. Chellaboina V., Bhat S., Haddad W., *An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems*, *Nonlinear Analysis*, (2003), Vol. 53, № 3-4, 527-550.
109. Chen G., Shen J., *Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks*, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A*, (2007), Vol. 14, 177-188.
110. Chen J., Tisdell C., Yuan R., *On the solvability of periodic boundary value problems with impulse*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 331, № 2, 902-912.
111. Chen S., Qi J., Jin M., *Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2003), Vol. 46, № 8-9, 1281-1287.
112. Chua L., Yang L., *Cellular neural networks: Applications*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), Vol. 35, 1273-1290.
113. Chua L., Yang L., *Cellular neural networks: Theory*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), Vol. 35, 1257-1272.
114. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses with respect to the switching functions*, *International J. of Applied Science and Technology*, (2011), Vol. 1, № 5, 46-59.
115. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2012), Vol. 11, № 1, 57-80.
116. Chukleva R., *Modeling using differential equations with variable structure and impulses*, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 72, № 3, 343-364.
117. Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).
118. Cordova-Lepe F., *Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics*, *Biomat 2006, International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
119. D'onofrio A., *Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model*, *Mathematical Biosciences*, (2002), Vol. 179, № 1, 57-72.
120. Dai B., Su H., Hu D., *Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.
121. Dimov H., Nenov S., *Some features of uncontinuable solutions of impulsive dynamical systems*, *Extracta Mathematicae*, (1996), Vol. 11, № 3, 443-456.
122. Dishliev A., Bainov D., *Conditions for the absence of the phenomenon "beating" for systems of impulse differential equations*, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, (1985), Vol. 13, № 3, 237-256.
123. Dishliev A., Bainov D., *Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.

124. Dishliev A., Bainov D., Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1990), Vol. 29, № 6, 655-675.
125. Dishliev A., Bainov D., Differentiability on a parameter and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses, *Osterreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, (1987), Wien, Band 196, Heft 1-3, 69-96.
126. Dishliev A., Bainov D., Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with impulses, *Aplicable Analysis*, (1984), Vol. 18, № 1&2, 67-73.
127. Dishliev A., Bainov D., Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 363-372.
128. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right-hand side, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, № 2, 149-159.
129. Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. *Methods and applications*, Academic Publications, Ltd. (2011).
130. Dishliev A., Markova N., Sufficient conditions for oscillation of the solutions of impulsive linear homogeneous differential equations with retarded argument, *Communications in Applied Analysis*, (2007), Vol. 11, № 2, 223-228.
131. Dishliev A., Stoykov D., Stability of limiting equations of impulsive differential equations, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2002), Vol. 6, № 4, 389-410.
132. Dishliev A., Stoykov D., Stability via limiting equations of impulsive differential equations, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2002), Vol. 6, № 4, 369-388.
133. Dong L., Chen L., Shi P., Periodic solutions for a two-species nonautonomous competition system with diffusion and impulses, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 32, № 5, 1916-1926.
134. Dong L., Chen L., Sun L., Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 2, 572-578.
135. Elaydi S., Yakubu A., Global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking, *J. Diff. Equations Appl.*, (2002), Vol. 8, № 6, 537-549.
136. Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth, *The J. of Australian Math. Society. Series B. Applied Mathematics*, (1991), Vol. 32, 382-400.
137. Feng C., Huang Z., Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
138. Fenner L., Pinto M., On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 38, № 3, 307-325.
139. Franco D., Nieto J., Maximum principles for periodic impulsive first order problems, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1998), Vol. 88, № 1, 149-159.
140. Frigon M., O'Regan D., First order impulsive initial and periodic problems with variable moments, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1996), Vol. 233, № 2, 730-739.
141. Frigon M., O'Regan D., Impulsive differential equations with variable times, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (1996), Vol. 26, № 12, 1913-1922.
142. Frigon M., O'Regan D., Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, (2001), Vol. 8, № 2, 149-159.
143. Fu X., Li X., Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time, *Mathematics and Computer Modeling*, (2008), Vol. 48, № 5-6, 776-786.
144. Gao S., Chen L., Nieto J., Torres A., Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, *Vaccine*, (2006), Vol. 24, № 35-36, 6037-6045.
145. Gao S., Teng Z., Nieto J., Torres A., Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay, *J. Biotechnol.*, (2007), Article ID 64870.
146. Georgieva A., Kostadinov S., L_p -equivalence of impulsive differential equations, *SUT J. of Mathematics*, (1997), Vol. 33, № 2, 291-301.
147. Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the L_p -equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, *Turkish J. of Mathematics*, (2008), Vol. 32, 451-466.
148. Georgiou D., Nieto J., Rodríguez-López R., Initial value problems for higher-order fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 63, № 4, 587-600.
149. Gladilina R., Icnat'ev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, *International Applied Mechanics*, (2008), Vol. 44, № 2, 228-237.
150. Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, (1996), Vol. 26, № 1, 165-173.
151. Gopalsamy K., Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, (1992).
152. Gopalsamy K., Zhang B., On delay differential equations with impulses, *J. Math. Analysis and Applications*, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.
153. Guo H., Chen L., Time-limited pest control of a Lotka-Volterra model with impulsive harvest, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 840-848.
154. Hartman F., Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).

155. Hristova S., Stefanova K., Practical stability of impulsive differential equations with “supremum”, *European J. of Pure and Applied Mathematics*, (2012), Vol. 5, № 1, 30-44.
156. Hristova S., Bainov D., Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations, *Rocky Mountain J. Math.*, (1993), Vol. 23, № 2, 609-618.
157. Hristova S., Kulev G., Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Math.*, (2001), Vol. 132, № 2, 399-407.
158. Hristova S., Nonlinear delay integral inequalities for piecewise continuous functions and applications, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, (2004), Vol. 5, № 4, Article 88.
159. Hristova S., Roberts L., Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, (2001), Vol. 34, № 7-8, 839-847.
160. Huo H-F., Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 48, № 12, 1833-1846.
161. Ignatyev A., On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 1, 53-72.
162. Jia J., Li C., A Predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195, 15 p.
163. Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey, *Applied Mathematics and Mechanics*, (2008), Vol. 29, № 5, 653-663.
164. Jin Z., Zhen M., Maoan H., The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competitions system with impulsive, *Chaos Solitons & Fractals*, (2004), Vol. 22, № 1, 181-188.
165. Juang G., Lu Q., Impulsive state feedback control of a predator-prey model, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2007), Vol. 200, № 1, 193-207.
166. Juang G., Lu Q., The dynamics of a prey-predator model with impulsive state feedback control, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, (2006), Vol. 6, 1310-1320.
167. Karandjulov L., Stoyanova Y., Problem of Cauchy for linear singularly perturbed impulsive systems, *Univ. Mishcolc Inst. Mathematical Notes*, (2002), Vol. 3, № 1, 25-37.
168. Kosseva A., Kostadinov S., Schneider K., L_p -dichotomy of linear differential equations in arbitrary Banach space, *Chinese Ann. Math. Ser. B*, (2003), Vol. 24, № 4, 485-490.
169. Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator, *Rostock. Math. Kolloq.*, (1999), Vol. 53, 51-59.
170. Kulev G., Bainov D., Global stability of sets for systems with impulses, *Applied Mathematics and Computation*, (1989), Vol. 29, № 3, 255-270.
171. Kulev G., Bainov D., On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct methods, *Dynamics and stability of systems*, (1990), Vol. 110, № 3, 149-162.
172. Kulev G., Bainov D., Stability of sets for systems with impulses, *Tamkang J. of Math.*, (1988), Vol. 19, № 2, 13-22.
173. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
174. Lakshmikantham V., Liu X., Stability for impulsive differential systems in terms of two measures, *Applied Mathematics and Computations*, (1989), Vol. 29, № 1, 89-98.
175. Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., Hybrid systems with time scales and impulses, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2147-2152.
176. Li J., Nieto J., Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 226-236.
177. Lin D., Hui J., The best dosage scheme on multiple rapid vein injection, *J. of Biological Systems*, (2007), Vol. 15, № 3, 355-364.
178. Liu B., Teng Z., Liu W., Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.
179. Liu B., Zhang Y., Chen L., The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning integrated pest management, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2005), Vol. 6, № 2, 227-243.
180. Liu L., Ye Y., Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses, *International J. of Computational and Math. Sciences*, (2011), Vol. 5, № 4, 229-235.
181. Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y., Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2002), Vol. 271, № 1, 124-188.
182. Liu X., Chen L., Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator, *Chaos Solitons & Fractals*, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.
183. Liu X., Chen L., Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.
184. Liu X., Li G., Luo G., Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.
185. Liu X., Stability results for impulsive differential systems with application to population growth models, *Dyn. Stabil. Syst.*, (1994), Vol. 9, № 2, 163-174.

186. Luo Z., Shen J., *Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional*, *Applied Mathematics Letters*, (2009), Vol. 22, № 2, 163-169.
187. Meng X., Chen L., Li Q., *The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients*, *Applied Mathematics and Computation*, (2008), Vol. 198, № 1, 361-374.
188. Meng X., Chen L., *Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays*, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 2, 179-196.
189. Meng X., Jiao J., Chen L., *The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 2, 1255-1267.
190. Meng X., Li Z., Nieto J., *Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment*, *J. of Mathematical Chemistry*, (2010), Vol. 47, № 1, 123-144.
191. Milev N., Bainov D., *Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure*, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 353-361.
192. Milev N., Bainov D., Roach G., *Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (1989), Vol. 11, № 2, 271-278.
193. Milev N., Bainov D., *Stability of linear impulsive differential equations*, *Computers & Mathematics with Applications*, (1990), Vol. 20, № 12, 35-41.
194. Naulin R., Pinto M., *Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 208, № 2, 281-297.
195. Nenov S., Bainov D., *Impulsive dynamical systems*, *Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations*, (1992), 145-166.
196. Nenov S., *Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics*, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 36, № 7, 881-890.
197. Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., *Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects*, *J. of Computational and Applied Math.*, (2009), Vol. 224, № 2, 544-555.
198. Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., *The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator*, *BioSystems*, (2009), Vol. 98, № 2, 67-72.
199. Nieto J., *Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 205, № 2, 423-433.
200. Nieto J., O'Regan D., *Variational approach to impulsive differential equations*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 680-690.
201. Nieto J., Rodrigues-Lopez R., *Boundary value problems for a class of impulsive functional equations*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2008), Vol. 55, № 12, 2715-2731.
202. Nieto J., Rodríguez-López R., *Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.
203. Nieto J., *The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations*, *Fuzzy sets and systems*, (1999), Vol. 102, № 1, 159-262.
204. Pandit S., Deo S., *Differential systems involving impulses*, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
205. Perestyuk M., Chernikova O., *Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations*, *Ukrainian Math. J.*, (2008), Vol. 60, № 1, 91-107.
206. Plotnikov V., Ivanov R., Kitanov N., *Method of averaging for impulsive differential inclusions*, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, (1998), Vol. 12, 43-55.
207. Rogovchenko Y., *Nonlinear Impulse evolution systems and applications to population models*, *J. Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 207, № 2, 300-315.
208. Saito Y., *The necessary and sufficient condition for global stability of a Lotka-Volterra cooperative or competition systems with delays*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2002), Vol. 268, № 1, 109-124.
209. Samoilenko A., Perestyuk N., *Impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, (1995).
210. Shen J., Li J., *Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.
211. Simeonov P., Bainov D., *Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations*, *Tamkang J. Math.*, (1991), Vol. 22, № 3, 275-284.
212. Simeonov P., Bainov D., *Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter*, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (1988), Vol. 31, № 2, 353-368.
213. Simeonov P., Bainov D., *Estimates for Cauchy matrix of perturbed linear impulsive equations*, *Chinese J. of Math.*, (1993), Vol. 1, 73-80.
214. Smith L., Wahl L., *Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects*, *Bulletin of Math. Biology*, (2005), Vol. 67, № 4, 783-813.
215. Stamov G., *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, (2012).
216. Stamov G., Stamova I., *Integral manifolds for impulsive differential-difference equations*, *Electronic Modeling*, (2005), Vol. 4, 115-120.
217. Stamov G., Stamova I., *Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2001), Vol. 258, № 2, 371-379.

218. Stamova I., Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations, (2008), *Bulletin of the Australian Math. Society*, (2008), Vol. 77, 331-345.
219. Stamova I., Emmenegger G.-F., Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets, *International J. of Applied Math.*, (2004), Vol. 15, № 3, 271-290.
220. Stamova I., On the stability of an impulsive differential-difference population model, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, 285-291.
221. Stamova I., Parametric stability of impulsive functional differential equations, *J. of Dynamical and Control Systems*, (2008), Vol. 14, № 2, 235-250.
222. Stamova I., Stability analysis of impulsive functional differential equations, *Walter de Gruyter, Berlin, New York*, (2009).
223. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations, *Electronic J. of Differential Equations*, (2008), Vol. 48, 1-10.
224. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics, *J. of Computational and Applied Math.*, (2001), Vol. 130, № 1-2, 163-171.
225. Stamova I., Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 612-623.
226. Sun S., Chen L., Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, *Applied Mathematics and Computation*, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.
227. Wang F., Pang G., Shen L., Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Math.*, (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.
228. Wang H., Feng E., Xiu Z., Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.
229. Wang W., Shen J., Luo Z., Partial survival and extinction in two competing species with impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.
230. Wang X., Song Q., Song X., Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay, *Applied Math. Modeling*, (2009), Vol. 33, № 11, 4231-4240.
231. Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.
232. Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.
233. Xian X., O'Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, *Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems*, (2008), Vol. 2008, Article ID 197205.
234. Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, *Mathematics and Computer Modeling*, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.
235. Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.
236. Yang Z., Xu D., Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, (2005), Vol. 52, 517-521.
237. Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays, *Physics Letters A*, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.
238. Yoshizawa T., Stability theory by Lyapunov's second method, *Math. Soc. Jap., Tokyo*, (1966).
239. Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.
240. Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.
241. Zavalishchin S., Seseikin A., Dynamic impulse systems. Theory and applications. *Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
242. Zeeman E., Zeeman M., From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems, *Transactions of the American Math. Society*, (2002), Vol. 355, № 2, 713-734.
243. Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Advances in Complex Systems*, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.
244. Zhang H., Chen L., Nieto J., A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 4, 1714-1726.
245. Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, *Mathematical and Computer Modelling*, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.
246. Zhang X., Shuai Z., Wang K., Optimal impulsive harvesting policy for single population, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651.
247. Zhao A., Lakshmikantham V., Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.
248. Zhao Z., Jiang J., Lazer A., The permanence and global attractivity in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2004), Vol. 5, № 2, 265-276.

