



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ДЕПАРТАМЕНТ ПО ФИЗИКОМАТЕМАТИЧЕСКИ

И ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА”

Ваньо Донев Иванов

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

ОСЦИЛАЦИОННИ СВОЙСТВА НА ФУНКЦИОНАЛНО- ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ОТ НЕУТРАЛЕН ТИП УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛСНО ВЪЗДЕЙСТВИЕ И АСИМПТОТИЧНО ПОВЕДЕНИЕ НА НЕОСЦИЛИРАЩЕ ИМ РЕШЕНИЕ

за придобиване на образователната и научна степен „доктор”

по научна специалност

„Диференциални уравнения”

Научни ръководители: проф. дмн Недьо Попиванов
доц. д-р Маргарита Димитрова

Научно жури:

1. Доц. д-р Ангел Дишлиев - председател
2. Проф. дмн Снежана Христова - рецензент
3. Проф. д-р Степан Костадинов - рецензент
4. Доц. д-р Валентина Пройчева
5. Доц. д-р Маргарита Димитрова

София, 2012

Дисертационният труд е написан на 140 страници и съдържа 11 фигури и 0 таблици. Цитирани са 120 източника.

Представеният дисертационен труд е обсъден и приет на защита на заседание на разширен научен съвет на научното звено на катедра „Математика”, състояло се на 15.12.2011 год.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 15.03.2012 г. от 13.00 часа в зала 439, етаж 4, сграда „А” на ХТМУ.

Материалите са на разположение на интересувашите се на интернет страницата на ХТМУ и в отдел „Научни дейности”, стая 406, етаж 4, сграда „А” на ХТМУ.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Дисертацията е посветена на изучаване на осцилационните свойства на решенията на функционално-диференциалните уравнения от неутрален тип с импулси, както и на изследване асимптотичното поведение на неосцилиращите им решения.

Осцилационната теория е едно от направленията, с които са започнали изследванията на качествените свойства на обикновените диференциалните уравнения (ОДУ). Концепцията за осцилиране на решения на диференциални уравнения възниква с появата на класическата работа на Sturm [111]. Нейната същност, развита през годините, се състои в намирането на условия за съществуване на осцилиращи (неосцилиращи) решения, изучаване на закономерностите на разпределение на нулите на непрекъснатите решения, получаване на оценки за разстоянието между съседните нули и броя на нулите в даден интервал, установяване на връзка между структурата на диференциалните уравнения и осцилационните и асимптотичните свойства на решенията им и т.н.

Интересът към осцилационната теория се проявява особено силно с появата на нови обекти на изследване. Две са актуалните за нашето съвремие тематични направления, където това е забележимо.

Едното направление е по посока на функционално-диференциалните уравнения (ФДУ), явяващи се естествено обобщение на ОДУ. По своята същност, ФДУ представляват адекватен математически апарат за моделиране на процеси и явления, които зависят от своята предистория или бъдеще. Още с появата си, те предизвикват голям интерес тъй като наличието на закъснение качествено променя осцилационното поведение на решенията. За начало на систематичното изучаване на осцилационните и асимптотични свойства на ФДУ, се считат работите на Мышкис, резултатите от които са отразени в [7]. В теорията на ФДУ е възприета следната класификация - уравнения от закъсняващ тип, уравнения от изпреварващ тип и уравнения от неутрален тип. Типични представители (при $h \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$) са:

- $y'(t) = f(t, y(h(t))), h(t) < t$ (закъсняващ тип),
- $y'(t) = f(t, y(H(t))), H(t) > t$ (изпреварващ тип),
- $y'(t) = f(t, y(h(t)), y'(h(t))), h(t) < t$ (неутрален тип със закъснение),
 $y'(t) = f(t, y(H(t)), y'(H(t))), H(t) > t$ (неутрален тип с изпреварване).

Функционално-диференциалните от закъсняващ тип уравнения (ФДЗУ) все още не са добре изучени, поради многобройните им приложения и поради богатството на самата теория. Функционално-диференциалните от изпреварващ тип уравнения (ФДИУ), поради своето естество, представляват предимно теоретичен интерес. Функционално-диференциалните от неутрален тип уравнения, с изпреварващо и/или закъсняващо отклонение на аргумента (ФДНУ), са най-сложния и интересен за изследване обект.

Другото направление с бурно развитие в изучаването на актуални ОДУ в наши дни е развитието на фундаменталната и качествената теория на диференциалните уравнения с импулси (ДУИ). Тяхната поява се свързва с обстоятелството, че редица физични явления в процеса на своята еволюция се оказват подлагани на кратки по време въздействия, нарушаващи естествения им ход. Например, в радиотехниката (генериране на импулси), в биологията (работа на сърцето, ръст на клетките), в популационната динамика (изменение на компоненти на системата субстрат-продукт-инхибитор), в теорията на управлението (импулсно управление) и др. При математическото моделиране на такива процеси е удобно да се пренебрегне времетраенето на въздействието и да се приеме, че процесът изменя състоянието си скокообразно, т.е. с импулси. Математическата теория на ДУИ бележи своето начало с работата на В.Д. Милман и А.Д. Мишкис [6].

Съвместяването на съдържателността на споменатите две актуални направления ОДУ ни води до появата на такива диференциални уравнения, описващи явления и процеси, които зависят по някакъв начин от своята предистория и които могат да бъдат подлагани на кратковременни въздействия, нарушаващи естествения им ход на развитие. Такива

уравнения наричаме най-общо функционално-диференциални (с отклонения на аргумента) уравнения с импулси (ФДУИ). От тях, най-голям интерес предизвикват функционално-диференциалните уравнения от неутрален тип с импулси (ФДНУИ). Накратко бихме могли да опишем тези уравнения от първи ред с линейна неутрална форма и постоянно закъснение на аргумента, по следния начин. Нека Y е фазово пространство на еволюционен процес, т.е. множеството от всевъзможните състояния на процеса и нека $J = [t_0 - h, +\infty) \subset R$, $c \in R$ и $h > 0$. Бележим разширеното фазово пространство на процеса чрез $Y^* = J \times Y$.

Приемаме, че законът за еволюция на този процес се описва от

- Функционално-диференциалното от неутрален тип уравнение

$$\frac{d}{dt}(y(t) + cy(t-h)) = F(t, y(t), y(t-h)), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad t \neq \tau_k, \quad (P4.1)$$

където $t-h \in J$, $y \in Y$, $F: Y^* \rightarrow R^m$.

- Множеството от моменти на импулсно въздействие, съпътстващи закона за еволюция, т.е. $M_\tau := \{(\tau_k, y(\tau_k)) \in Y^*\}$, за което съществува множеството на “еволюционна приемственост” - $M_\tau^+ := \{(\tau_k^+, y(\tau_k^+)) \in Y^*\}$.

- Операторът $I: M_\tau \rightarrow M_\tau^+$, който реализира приемствеността в закона за еволюция при моментите на импулсно въздействие чрез

$$I(\tau_k, y(\tau_k)) = F_k(\tau_k^+, y(\tau_k^+)), \quad k \in N, \quad (P4.2)$$

като считаме, че решението $y(t)$ на задачата $\{(4.1), (4.2)\}$, в моментите на импулс е непрекъснатата от ляво функция, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} y(t) = y(\tau_k - 0) = y(\tau_k^-) = y(\tau_k), \quad k \in N.$$

Ако са известни “начална функция”, дефинирана над “прединтервала” $[t_0 - \rho, t_0]$, където ρ е максималното измежду закъсненията в уравнението (P4.1) и началната ѝ стойност в момента време $t_0 + 0$, т.е.

$$y(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [t_0 - \rho, t_0], \quad (P4.3)$$

$$y(t_0 + 0) = \varphi_0(t_0 + 0), \quad \varphi_0(t_0 + 0) \in R \quad (P4.4)$$

където $\varphi_0(t): [t_0 - \rho, t_0] \rightarrow Y$, а $\varphi_0(t_0 + 0)$ е дадено реално число, то се формира задачата $(P4) = \{(P4.1), (P4.2), (P4.3), (P4.4)\}$, решението на която означаваме като $y(t) = y(t, t_0, \varphi_0)$.

Множеството M_τ се състои от моменти τ_k на импулсно въздействие, които могат да се избират по различен начин. Следните два начина на избор представляват практически интерес:

- Моментите τ_k са фиксирани предварително;
- Моментите на импулс са променливи и настъпват, когато са изпълнени някакви пространствено-времеви условия [115] или вероятностни закони ([15]).

Движението на изобразяващата точка $P(t, y(t))$ в $Y^* = J \times Y$ започва от начално положение $P_0(t_0, \varphi_0(t_0 + 0))$ и се извършва по интеграционната крива $(t, y(t))$, описвана от решението $y(t)$ на уравнението (P4.1) с начално условие (P4.4), до достигане на момента $\tau_1 > t_0$, в който среща множеството M_τ . В този момент, операторът $I: M_\tau \rightarrow M_\tau^+$ “мигновено” я прехвърля от положение $P_{\tau_1}(\tau_1, y(\tau_1))$ в положение $P_{\tau_1}^+(\tau_1, y^+(\tau_1))$ от множеството на еволюционна приемственост M_τ^+ , където $y^+(\tau_1) = I(\tau_1, y(\tau_1))$. След това, изобразяващата точка продължава да се движи по интеграционната крива, описвана от решението $y(t)$ на уравнението (P4.1), но с начално условие $y(\tau_1) = y^+(\tau_1)$ до нова среща с множеството M_τ и т.н.

Практически, възможностите за вида на множествата M_τ , M_τ^+ и оператора $I: M_\tau \rightarrow M_\tau^+$ са необятни. Това определя голямото разнообразие на ФДНУИ. Трябва да се

признае, че тези уравнения намират редица приложения в естествознанието и техниката, но притежават специфични свойства, които затрудняват в технически и идеен аспект изучаването им. Въпреки интересното си съдържание и оригиналните възможности за приложение, математическата им теория се развива сравнително бавно, включително и осцилационната им теория. Това е така, заради затрудненията от теоретичен и технически характер, свързани с естеството на тези уравнения. Ето защо, изучаването им представлява голямо предизвикателство. Показателно в това отношение е и сравнително малкият обем от изследователски работи в областта на ФДНУИ.

Като се има предвид казаното дотук, е съвсем естествено да формулираме целта на настоящия дисертационен труд, а именно :

На основата на подходяща класификация и удобни аксиоматични постановки, да се анализира връзката между структурата на ФДНУИ и свойството на решенията им да осцилират, както и да се изследва асимптотичното поведение на неосцилиращите им решения .

Произтичащите от това задачи са:

- да се построи математически модел на задачите, водещи до ФДНУИ;
- на базата на модела да се изгради подходяща класификация за ФДНУИ;
- да се изследват сходни на ФДНУИ композиции от ФДУИ от отклоняващ се тип;
- да се търси приемственост на получаваните резултати;
- на основата на класификацията, да се построяват стандартни композиции ФДНУИ, които да се изследват за условия, при които решенията им осцилират;
- на основата на класификацията, да се изследва асимптотичното поведение на неосцилиращите решения на стандартни композиции ФДНУИ.

ИЗПОЛЗВАНИ МЕТОДИ НА РАБОТА

Наред с класическите математически похвати на работа и принципите на математическа индукция и дедукция, в изследването са реализирани няколко ефективни метода, като :

- конструктивен метод за построяване на решения на ФДНУИ във форма на импулсни експоненти, на базата на които могат да се получават резултати за осцилиране или неосцилиране на решения;
- метод на сравнителния анализ между коефициентите на подобни ФДНУИ или между ФДНУИ и сродни на тях ФДУИ, при което се разкрива имплицативна връзка между осцилационните свойства на съответните им решения ;
- метод на линеаризация на нелинейни композиции ФДНУИ, за да им се осигури наследяване на осцилационните свойства на свързани с тях квазилинейни композиции;

ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

Настоящият труд е посветен на изучаване на осцилационните свойства на решенията на ФДНУИ, изследване на условията за съществуване на неосцилиращи решения, както и проследяване на асимптотичното поведение на някои от тях. Той се състои от увод, четири глави, заключение – резюме на получените резултати с декларация за оригиналност и библиография.

Глава Първа обръща внимание на аксиоматиката и на някои аспекти от фундаменталната и качествената теория за ФДНУИ, както и на осцилационната теория на функционално–диференциални от закъсняващ или изпреварващ тип уравнения с импулсно въздействие, имащи доста сходства с ФДНУИ.

В параграф 1.1. е формулирана постановка на математическия модел на задачите, водещи до поява на ФДНУИ и са дефинирани основни понятия. Закон за еволюция на

процес, зависещ от предисторията си и търпящ мигновени изменения на своето състояние се описва от системата функционално-диференциални уравнения от n -ти ред с l закъснения на аргумента t , $t \in J_0$, $J_0 = [t_0, +\infty)$, във формата

$$f(t, y(t), \dots, y^{(m_0-1)}(t), y^{(m_0)}(t), y(h_1(t)), \dots, y^{(m_1)}(h_1(t)), \dots, y(h_l(t)), \dots, y^{(m_l)}(h_l(t))) = 0, \quad (1.1)$$

където $\max_{0 \leq i \leq l} m_i = n$, $\max_{1 \leq i \leq l} m_i = \mu$, а за функциите $h_i(t)$ е в сила

$$h_i \in C^1(R, R^+), i = \overline{1, l}, \quad h_i(t) < t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = +\infty, \quad h_i'(t) > 0.$$

Със закона за еволюция е свързана и системата от точки (моменти на импулс) $\tau_Y = \{\tau_i\}_{i=1}^\infty$, намиращи се в $J_0 = [t_0, \infty) \subset R$, за които е изпълнено

$$(H) \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots, \quad k \in N, \quad \text{където } t_0 \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty, \quad \text{като}$$

$$0 < \min_{k \in N} \{\tau_{k+1} - \tau_k\} \leq \max_{k \in N} \{\tau_{k+1} - \tau_k\} < \infty.$$

Приема се, че самите (моментни) скокообразни изменения на процеса се моделират чрез импулсните съотношения ($k \in N$, $j = \overline{0, n-1}$)

$$\Delta y^{(j)}(\tau_k) = I(y^{(j)}(h_1(\tau_k)), \dots, y^{(j)}(h_{s-1}(\tau_k)), \Delta y^{(j)}(h_s(\tau_k)), y^{(j)}(h_{s+1}(\tau_k)), \dots, y^{(j)}(h_l(\tau_k))), \quad (1.2)$$

където s е този измежду индексите от 1 до l , за който $\max_{1 \leq i \leq l} m_i = \mu$.

Задачата $(*) = \{(1.1), (1.2)\}$ се нарича функционално-диференциална задача с l закъснения на аргумента и импулси. Дефинирана е функцията $\rho(t) = \min_{1 \leq i \leq l} \{h_i(t), t \in J_0\}$ и множеството $E_{t_0} = [\rho(t_0), t_0]$, $t_0 \in R$. Върху E_{t_0} са приети за дадени началните функции

$$\Phi_k(t) = \varphi_0^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \mu, \quad \varphi_0^{(k)} : E_{t_0} \rightarrow R^m. \quad (1.3)$$

Приема се, че са налице и началните функционални стойности

$$y^{(k)}(t_0+) = \varphi^{(k)}(t_0+) = y_0^{(k)}, \quad \text{за } k = 0, 1, \dots, \mu. \quad (1.4)$$

Тогава, задачата $(**) = \{(1.1), (1.2), (1.3), (1.4)\}$, се нарича начална задача за функционално-диференциални уравнения от n -ти ред с l закъснения на аргумента и импулсно въздействие в точките $\tau_Y = \{\tau_i\}_{i=1}^\infty$.

При полагането $\lambda = m_0 - \mu$, се появява възможност функционално-диференциалните задачи с отклонения на аргумента и импулси да бъдат класифицирани така:

- при $\lambda > 0$, $(**)$ се нарича задача от закъсняващ тип с импулси;
- при $\lambda = 0$, $(**)$ се нарича задача от неутрален тип с импулси;
- при $\lambda < 0$, $(**)$ се нарича задача от избързващ тип с импулси.

Въведени са дефиниции, по-важните от които са:

Дефиниция 1.1.1. Пространството $PAC_\tau^n(J)$ се състои от всички функции $u(t)$, $u : J \rightarrow R$, които удовлетворяват следните условия :

(i) u имат абсолютно непрекъснати производни до n -ти ред на всеки от интервалите $[\tau_0, \tau_1] \cup \{(\tau_k, \tau_{k+1})\}_{k=1}^\infty$;

(ii) u са непрекъснати отляво в точките $\tau_k \in \tau_Y$, т.е. $u^{(j)}(\tau_k - 0) = \lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} u^{(j)}(t) = u^{(j)}(\tau_k)$;

(iii) $\exists \{u^{(j)}(\tau_k + 0)\}$, така че $u^{(j)}(\tau_k + 0) = \lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} u^{(j)}(t)$;

(iv) u могат да имат, заедно със своите производни до n -ти ред включително, прекъсване от първи род в точките $\tau_k \in \tau_Y$, т.е.

$$\Delta u^{(j)}(\tau_k) = u^{(j)}(\tau_k +) - u^{(j)}(\tau_k -) \neq 0, \quad k \in N, \quad j = \overline{0, n}.$$

Дефиниция 1.1.6. Регулярното решение $x(t)$ на задача $(*)$ наричаме финално положително (респ. финално отрицателно), ако $\exists T_1 > 0$, че да е в сила $x(t) > 0$ (респективно $x(t) < 0$) за всяко $t \geq T_1$.

Дефиниция 1.1.7. Регулярното решение $x(t)$ на задача (*) наричаме осцилиращо относно нулата (знакоосцилиращо), ако $\exists \{t_i\}_{i=1}^{\infty}, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty : x(t_i)x(t_{i+1}) < 0, i \in N$.

Дефиниция 1.1.8. Регулярното решение $x(t)$ на задача (*) наричаме осцилиращо относно функцията $f(t)$ (функциоосцилиращо), ако

$$\exists \{t_i\}_{i=1}^{\infty}, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty : [x(t_i) - f(t_i)][x(t_{i+1}) - f(t_{i+1})] < 0, i \in N.$$

Дефиниция 1.1.9. Казваме, че една функция $u(t)$ има форма на импулсна експонента, ако съществуват реално число $A \in R$, наречено “пулсираща константа”, и реално число $\lambda \in R$ с помощта на които $u(t)$ може да се представи във вида $u(t) = A^{i[\tau_0, t]} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, където под изразът $i[\tau_0, t]$ разбираме броя на импулсни моменти $\tau_k \in \tau_Y$ за функцията $u(t)$, намиращи се в интервала $[\tau_0, t]$.

За описание на по-важните ФДНУИ е въведена опростена сигнатура. Уравненията се разглеждат, като съставени от две части, втората от които конституира неутралния характер. Тези части се означават с “L” или “N”, в зависимост от това дали са с линеен (квазилинеен) или нелинеен характер. Между буквите се поставя число, указващо броя закъснения на аргумента, а накрая се завършва с число, указател за реда на диференциалното уравнение. Тогава, може да се каже следното:

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))] + r(t)y(t) + p(t)y(h_1(t)) + q(t)y(h_2(t)) = f(t), t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k}y(h_1(\tau_k))] + r_{\tau_k}y(\tau_k) + p_{\tau_k}y(h_1(\tau_k)) + q_{\tau_k}y(h_2(\tau_k)) = 0, k \in N \end{cases} \quad (L2L-1)$$

представлява квазилинейно ФДУ с две закъснения на аргумента, от неутрален тип в линейна форма, с импулси, от първи ред.

$$\begin{cases} f(y'(t), y'(h_1(t))) + F(y(t), y(h_1(t))y(h_2(t))) = f(t), t \neq \tau_k, k \in N \\ y(\tau_k +) = I_0[y(\tau_k), \Delta y(h_1(\tau_k)), y(h_1(\tau_k)), y(h_2(\tau_k))] , k \in N \end{cases} \quad (N2N-1)$$

представлява нелинейно ФДУ с две закъснения на аргумента, от неутрален тип в нелинейна форма, с импулси, от първи ред.

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))] + \sum_{i=0}^1 r_i(t)y^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^1 p_i(t)y^{(i)}(h_1(t)) + \sum_{i=0}^1 q_i(t)y^{(i)}(h_2(t)) = f(t), t \neq \tau_k \\ y'(\tau_k +) = I_1[y'(\tau_k), \Delta y'(h_1(\tau_k)), y'(h_1(\tau_k)), y'(h_2(\tau_k))], k \in N \\ y(\tau_k +) = I_0[y(\tau_k), \Delta y(h_1(\tau_k)), y(h_1(\tau_k)), y(h_2(\tau_k))], k \in N. \end{cases} \quad (L2L-2)$$

представлява квазилинейно ФДУ с две закъснения на аргумента, от неутрален тип в линейна форма, с импулси от втори ред.

$$\begin{cases} f(y''(t), y''(h_1(t))) + F(y(t), y'(t), y(h_1(t)), y'(h_1(t)), y(h_2(t)), y'(h_2(t))) = f(t), t \neq \tau_k, \\ y'(\tau_k +) = I_1[y'(\tau_k), \Delta y'(h_1(\tau_k)), y'(h_1(\tau_k)), y'(h_2(\tau_k))], k \in N \\ y(\tau_k +) = I_0[y(\tau_k), \Delta y(h_1(\tau_k)), y(h_1(\tau_k)), y(h_2(\tau_k))], k \in N. \end{cases} \quad (N2N-2)$$

представлява нелинейно ФДУ с две закъснения на аргумента, от неутрален тип в нелинейна форма, с импулси, от втори ред.

Очевидно, при $h_1(t) \equiv h_2(t)$ закъснението на аргумента в горните задачи е едно.

От значение е и удобно да се опише разположението на точките на импулс на задачите от разглежданите класове, от гледна точка на закъснителните функции $h_i(t), i = \overline{1, l}$. Затова се приема, че е в сила един от възможните два случая:

Хипотеза (Ahi): От определено място $n \geq 1, n \in N$ и нататък, за редицата $\{\tau_s\}_{s=n+1}^{\infty}$ е изпълнено $h_i(\tau_s) \in \{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. $h_i(\tau_s) = \tau_{s-j}$, $j \in N$.

Случай (Ahi+): Функцията $y(t)$ е само със “скокове-нагоре” в точките на импулс $h_i(\tau_k)$, т.е. $\Delta y(h_i(\tau_k)) > 0$, $k \in N$, $k \geq n+1$.

Случай (Ahi-): Съществува поне един “скок-надолу” в $h_i(\tau_k)$, т.е. $\exists \nu \geq \kappa, \nu \in N : \Delta y(h_i(\tau_\nu)) < 0$, $k \in N$, $k \geq n+1$.

Хипотеза (Bhi): Съществува строго растяща редица $\{k_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subseteq N$ (не задължително от последователни естествени числа), такава че $h_i(\tau_{k_\nu}) \notin \{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, когато $\{\tau_{k_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \subseteq \{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В параграф 1.2. са представени като помощни, няколко известни твърдения, които имат важна роля при получаване на някои от резултатите в следващите параграфи и глави.

В параграф 1.3. са разгледани началните задачи за квазилинейното ФДУ от неутрален тип в линейна форма, с постоянни коефициенти, с едно (от клас (L1cL-1c)) или с две (от клас (L2cL-1c)) постоянни отклонения на аргумента и импулси. Въз основа на метода на стъпките са доказани теореми за съществуване и единственост на решенията на такива задачи. Разисквани са условия, при които съществува решение за началната задача за нелинейното ФДУ от неутрален тип в квазилинейна форма, от клас (N2L-1), както и условия, при които това решение е единствено. Последните са свързани с отхвърляне на евентуална нееднозначност на импулсния оператор, т.е. “разклоняване” на интегралната крива след импулс. Изследван е и традиционния за качествената теория на диференциалните уравнения въпрос за непрекъсната зависимост на решенията на ФДНУИ от начални данни за такива уравнения, като е разгледано уравнението:

$$\begin{cases} [y(t) + g(y(h_1(t)))]' = F(t, y(t), y(h_1(t)), y(h_2(t))), & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) + g(y(h_1(\tau_k)))] = I_k[y(\tau_k), y(h_1(\tau_k))], & k \in N \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [\rho(\tau_0), \tau_0] \\ y(\tau_0+) = \varphi(\tau_0+) = y_0, & y_0 \in R, \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Въведени са следните условия:

(Н1.3.4) Съвкупността от решения на уравнението без импулси (1.3.8) притежава свойствата непродължимост, локалност, разрешимост на начална задача и локална компактност. (виж [9], стр. 11).

(Н1.3.5) $F \in C[J \times Y \times Y \times Y, R^m]$, $c \in C[J, R^m]$.

(Н1.3.6) Функцията F е Липшицова по втория, третия и четвъртия си аргументи равномерно в $J \times Y \times Y \times Y$, с положителна константа L_F .

(Н1.3.7) Функциите I_k са Липшицови по трите си аргумента равномерно в $Y \times Y \times Y$, с положителни константи L_I^k , $k \in N$, където $\exists L_I \in R^+ : L_I^k < L_I$, $k \in N$.

(Н1.3.8) Функцията g е Липшицова в Y с положителна константа $L_g < 1$.

Введена е следната дефиниция :

Дефиниция 1.3.1 Казваме, че решението $y_\varphi(t) = y(t, \varphi(t), y_0)$, $t \in J$ на (1.3.8) зависи непрекъснато от началната функция $\varphi(t) \in PAC_\tau([\rho(\tau_0), \tau_0], Y)$ и началната функционална стойност $\varphi(\tau_0+) = y_0$, ако $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) :$

$$\begin{aligned} (\forall \psi \in PAC_\tau([\rho(\tau_0), \tau_0], Y), \psi(\tau_0+) = \bar{y}_0 : \|\varphi(t) - \psi(t)\|_0 < \delta, |y_0 - \bar{y}_0| < \delta,) => \\ => \|y_\varphi(t) - y_\psi(t)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Основен резултат се дава от следната теорема:

ТЕОРЕМА 1.3.5. При изпълнени условия (H), (H1.3.4) - (H1.3.7), решението $y_\varphi(t) = y(t, \varphi(t), y_0)$, $t \in J$ на задачата (1.3.8) непрекъснато зависи от началната функция $\varphi(t) \in PAC_\tau([\rho(\tau_0), \tau_0], Y)$ и началната функционална стойност $\varphi(\tau_0+) = y_0$.

В параграф 1.4. е показана експоненциалната ограниченост на решенията на ФДНУИ-1. Разгледана е задача за квазилинейното ФДНУИ-1 в линейна форма, уравнение с постоянни коефициенти и две постоянни отклонения на аргумента, с импулси, от клас (L2cL-1c), записано във формата

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t-h)]' + qy(t-\sigma) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - cy(\tau_k-h)] + \nu y(\tau_k - \sigma) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

С помощта на теорема, разкриваща връзка между вече намерено решение и интеграла от него, като функция на неговите граници е доказана следната теорема.

ТЕОРЕМА 1.4.2 За всяко неосцилиращо решение на задачата (1.4.1) с коефициенти $\nu, q > 0$ е валидна оценката $\tilde{y}(t) \leq \tilde{C}(1+\nu)^{i(\tau_0, t)} e^{q(t-\tau_0)}$, при валидна Хипотеза (Ah1).

В този параграф е демонстрирано и качествено изследване на свойството устойчивост за квазилинейно ФДНУИ-1 с непостоянни коефициенти и две постоянни отклонения на аргумента, от клас (L2cL-1c), от вида

$$\begin{cases} y'(t) = c(t)y'(t-h) + q(t)y(t-\sigma), & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta y(\tau_k) = I(y(\tau_k)), & k \in N \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [\tau_0 - \rho, \tau_0] \\ y(\tau_0 + 0) = \varphi(\tau_0 + 0) = \varphi(\tau_0) = \varphi_0, \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Въведени са следните условия:

$$(H1.4.1) \quad c, q \in C^1(J, R), \exists c < 1: 0 < |c(t)| \leq c;$$

$$(H1.4.2) \quad I_k \in C(R, R), \exists \alpha_k > 0: |I_k(y)| \leq \alpha_k |y|, k \in N, \sum_k \alpha_k < \infty.$$

Дадена е следната дефиниция:

Дефиниция 1.4.1. Решение $x(t, \tau_0, 0) \equiv 0$ на (1.4.4) наричаме устойчиво, ако

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall \tau_0 \in R) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \tau_0) > 0: \forall \varphi \in B_\delta(\tau_0) \Rightarrow (|x(t, \tau_0, \varphi_0)| < \varepsilon, t > \tau_0)).$$

Доказана е теоремата:

ТЕОРЕМА 1.4.3. Ако са в сила хипотезите (H1.4.1) и (H1.4.2), тогава нулевото решение на (1.4.4) е устойчиво.

В параграф 1.5. е демонстриран подход за изследване на ФДНУИ чрез операторна символика по идея, заимствана от [3].

В параграф 1.6 са представени някои критерии за осцилиране на решенията на квазилинейни ФДУ от закъсняващ или изпреварващ тип с импулсно въздействие. Разгледани са квазилинейното ФДУ от закъсняващ тип с импулси

$$\begin{cases} z'(t) + Q(t)z(\alpha(t)) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta z(\tau_k) + Q_{\tau_k} z(\alpha(\tau_k)) = 0, & k \in N, \end{cases} \quad (1.6.1)$$

и квазилинейното ФДУ от изпреварващ тип с импулси

$$\begin{cases} z'(t) - Q(t)z(\beta(t)) = 0, & t \neq \tau_k, \quad k \in N \\ \Delta z(\tau_k) - Q_{\tau_k} z(\beta(\tau_k)) = 0, & k \in N, \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Въведени са следните условия:

$$(H1.6.1) \quad \alpha, \beta \in C^1(R^+, R^+), \quad \alpha'(t) > 0, \quad \beta'(t) > 0, \\ \alpha(t) < t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = +\infty, \quad \beta(t) > t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = +\infty;$$

$$(H1.6.2) \quad Q \in PAC_\tau(J, R_0^+), \quad Q_{\tau_k} \in R_0^+.$$

Доказани са следните по-важни резултати:

ЛЕМА 1.6.2. Нека са в сила условията (H) и (H1.6.1)-(H1.6.2) и нека освен това имаме $0 \leq Q_{\tau_k} < 1, \quad k \in N$. Ако $\frac{1}{e} \limsup_{t \rightarrow \infty} \prod_{\alpha(t) \leq \tau_k \leq t} (1 - Q_{\tau_k}) < \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\alpha(t)}^t Q(s) ds$, то всички решения на (1.6.1) осцилират.

ЛЕМА 1.6.3. Нека са изпълнени условията (H) и (H1.1)-(H1.2). Нека още:

1. Съществува такава редица реални числа $\{t_n\} \rightarrow \infty$ и такова число $l \in R^+$, че за функцията $Q(t)$ е изпълнено $Q(t) > 0$ поне в интервалите $\{[t_n - 2l, t_n + 2l]\}_{n=1}^\infty$, където $t_n < t_{n+1} - 2l, \quad n \in N, \quad \sigma \leq l$;
2. $\liminf_{t \rightarrow \infty, t \in U(t, 2l)} \int_{\alpha(t)}^t Q(s) ds > \frac{1}{e}$, където $U(t, 2l) := \bigcup_{n=1}^\infty U(t_n, 2l)$, $U(t_n, 2l) = [t_n - 2l, t_n + 2l], \quad n \in N$;
3. Съществува $c \in (0, 1)$, така че $0 < \limsup_{t_n \rightarrow \infty} \prod_{t_n - \sigma \leq \tau_k < t_n + \sigma} (1 - Q_{\tau_k}) \leq \left[\frac{(1-c)c}{e} \right]^2$.

Тогави (1.6.1) при $\alpha(t) = t - \sigma, \quad \sigma \in R^+$ има само осцилиращи решения.

ЛЕМА 1.6.5. Нека са в сила условията (H) и (H1.6.1)-(H1.6.2). Ако $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\prod_{t \leq \tau_k \leq \beta(t)} (1 + Q_{\tau_k}) \int_t^{\beta(t)} Q(s) ds \right] > \frac{1}{e}$, то всички решения на (1.6.2) осцилират.

Разгледани са и уравнения, подобни на (1.6.1), но с нелинейни импулсни условия, от вида

$$\begin{cases} z'(t) + \varepsilon Q(t)z(\alpha(t)) = 0, & t \neq \tau_k, \quad k \in N \\ \Delta z(\tau_k) = I(z(\tau_k), z(\alpha(\tau_k))), & k \in N, \end{cases} \quad (1.6.30)$$

Въведено е условието:

$$(H1.6.3) \quad I \in C(J \times J, R), \quad uI(u, v) \geq 0, \quad u \neq 0, \quad \exists c_I, C_I > 0: c_I |u| \leq |I(u, v)| \leq C_I |u|, \quad u \neq 0.$$

Разгледан е интервалът $(\alpha(t), t]$, за произволно t , за което $\alpha^2(t) \geq \alpha(t_0) = t_1$ и за фиксирано $k \in N$, е описано разположението на точките $\alpha(t)$ и t чрез

$$\left. \begin{aligned} t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \quad \alpha(t) \in (\tau_{k-m}, \tau_{k-m+1}], \quad \tau_{k-m} \geq t_1, \quad k \in N \\ m \in \{0, 1, 2, \dots, M\}, \quad M := \max_{t \in J} \{i(\alpha(t), t)\} \end{aligned} \right\} \quad (1.6.31)$$

Дефинирани са :

$$t_\alpha = \begin{cases} \frac{t + \alpha^{-1}(t)}{2}, & \text{ако } i(t, \frac{t + \alpha^{-1}(t)}{2}) = 0 \text{ или } i(t, \frac{t + \alpha^{-1}(t)}{2}) = 1 \\ \xi: \xi \in (t, \frac{t + \alpha^{-1}(t)}{2}), \quad i(t, \xi) = 1, & \text{ако } i(t, \frac{t + \alpha^{-1}(t)}{2}) > 1 \end{cases}, \quad (1.6.32)$$

$$t_L = \begin{cases} \max_{\alpha^2(t) \leq \tau_i < \alpha(t)} \tau_i, & \text{ако } i(\alpha^2(t), \alpha(t_\alpha)) > 0 \\ \alpha^2(t_\alpha), & \text{ако } i(\alpha^2(t), \alpha(t_\alpha)) = 0 \end{cases}, \quad (1.6.33)$$

$$t_R = \begin{cases} \alpha^{-1}\left(\max_{\alpha(t) \leq \tau_i < \alpha(t_\alpha)} \tau_i\right), & \text{ако } i(\alpha(t), \alpha(t_\alpha)) > 0 \\ t, & \text{ако } i(\alpha(t), \alpha(t_\alpha)) = 0 \end{cases}. \quad (1.6.34)$$

На основание (1.6.31), (1.6.32), (1.6.33) и (1.6.34) е конструирана функция, играеща роля на «генератор на ограничение», т.е.

$$\tilde{I}_\varphi(t) = \min \left\{ \int_{t_L}^t \varphi(s) ds, \quad \int_{t_R}^{t_\alpha} \varphi(s) ds \right\}, \quad t \geq \alpha^{-1}(t_0), \quad (1.6.35)$$

Доказани са следните важни резултати:

ЛЕМА 1.6.6. Нека са в сила условията (H), (H1.6.1)-(H1.6.3) и $z(t)$ е финално неосцилиращо решение на (1.6.30), при $\varepsilon = +1$. Ако $\exists A > 0$ така, че $\liminf_{t \rightarrow \infty} [\tilde{I}_Q(t)] \geq A$, то функцията $w(t) := \frac{z(\alpha(t))}{z(t)}$ е финално ограничена.

ЛЕМА 1.6.7. Нека са в сила условията (H) и (H1.6.1)-(H1.6.3). Ако

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} [\tilde{I}_Q(t)] \geq \frac{(1 + C_I)^M}{e}, \quad M = \max_{t \in [\alpha(t_0), +\infty)} \{i(\alpha(t), t)\},$$

то (1.6.30), при $\varepsilon = +1$, притежава само финално осцилиращи решения.

Глава Втора е посветена на изследването на асимптотичното поведение на неосцилиращите решения на квазилинейни ФДНУИ от първи ред, изследване условията за съществуването на такива решения чрез построяване на характеристични уравнения, както и на изучаване на осцилационните свойства на квазилинейни ФДНУИ от първи ред с постоянни и непостоянни коефициенти.

В параграф 2.1. е изследвано асимптотичното поведение на финалните неосцилиращи решения на хомогенната задача за ФДНУИ-1 от клас **(L2L-1)**, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))] + \varepsilon r(t)y(t) + \varepsilon p(t)y(h_1(t)) + \varepsilon q(t)y(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k}y(h_1(\tau_k))] + \varepsilon r_{\tau_k}y(\tau_k) + \varepsilon p_{\tau_k}y(h_1(\tau_k)) + \varepsilon q_{\tau_k}y(h_2(\tau_k)) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Предварително е изследвано асимптотичното поведение на помощна функция, конструирана от финално неосцилиращи решения на изрази от вида (2.1.1).

За целта са въведени следните условия:

$$(H2.1.1) \quad \begin{aligned} h_1, h_2 &\in C^1(R^+, R^+), & h_1'(t) > 0, h_2'(t) > 0, \\ h_1(t) < t, \quad h_2(t) < t, & \lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = +\infty, & \lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = +\infty; \end{aligned}$$

$$(H2.1.2) \quad c \in C^1(J, R), \quad c_{\tau_k} = c(\tau_k), \quad c_{\tau_k} \in R, \quad r_{\tau_k} \in R_0^+, \quad p_{\tau_k} \in R_0^+, \quad q_{\tau_k} \in R_0^+;$$

$$(H2.1.3) \quad r, p \in PAC_\tau(J, R_0^+), \quad q \in PAC_\tau(J, R^+);$$

$$(H2.1.4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_{\tau_k}^2 \neq 0, \quad \int_J r(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} r_{\tau_k} = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{\tau_k}^2 \neq 0, \quad \int_J p(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} p_{\tau_k} = +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_{\tau_k}^2 \neq 0, \quad \int_J q(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} q_{\tau_k} = +\infty,$$

които са в сила наред с една от следните възможности :

$$(H2.1.5) \quad c \in C^1(J, (-\infty, 0)), \quad c_{\tau_k} \in (-\infty, 0];$$

$$(H2.1.6) \quad \exists c_0 \in (0, 1): c \in C^1(J, (0, c_0]), \quad 0 < c_{\tau_k} \leq c_0, \quad k \in N;$$

$$(H2.1.7) \quad \exists C_0 > 1: c \in C^1(J, [C_0, +\infty)), \quad c_{\tau_k} \in (C_0, +\infty), \quad k \in N.$$

Дефинирана е помощна функция $z(t)$, считайки $y(t)$ за решение на (2.1.1) :

$$z(t) = y(t) - c(t)y(h_1(t)), \quad \Delta z(\tau_k) = \Delta y(\tau_k) - c_{\tau_k} \Delta y(h_1(\tau_k)). \quad (2.*)$$

С няколко леми е изследвано асимптотичното поведение на $z(t)$, в случаите, когато тя е конструирана от неосцилиращи решения на (2.1.1). Показателна в това отношение е следната лема.

ЛЕМА 2.1.1. Нека хипотезите (H) и (H2.1.1)-(H2.1.4) са в сила, $\varepsilon = +1$ и $y(t)$ е финално положително решение на задачата (2.1.1). Тогава, функцията $z(t)$, дефинирана в (2.*) е намаляваща и :

(1) Ако в сила (H2.1.5) или (H2.1.6), то $z(t)$ е финално положителна и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0, \quad \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta z(\tau_k)| = 0;$$

(2) Ако е в сила (H2.1.7), то $z(t)$ е финално отрицателна и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = -\infty, \quad \Delta z(\tau_k) \leq 0.$$

Потърсени са нови възможности за изследване на задачи от вида (2.1.1). Показано е, че помощната функция $z(t)$, дефинирана в (2.*) с помощта на решения на (2.1.1), удовлетворява интересна релация с полезни характеристики, която е родствена на (2.1.1) в някои отношения. За целта е разгледана задача от клас (L2L-1) - квазилинейни ФДНУИ-1, с две отклонения на аргумента и непостоянни коефициенти от вида

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))] + \varepsilon q(t)y(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, \quad k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k}y(h_1(\tau_k))] + \varepsilon q_{\tau_k}y(h_2(\tau_k)) = 0, & k \in N, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

При валидна хипотезата (Ah1) е доказана следната лема:

ЛЕМА 2.1.5. Нека хипотезите (Ah1), (H) и (H2.1.1)-(H2.1.3) са в сила, $\varepsilon = \pm 1$ и $y(t)$ е решение на задачата (2.1.4). Тогава, функцията $z(t)$, дефинирана в (2.*), финално удовлетворява квазилинейното функционално-диференциално от неутрален тип уравнение с импулси (2.1.*)

$$\begin{cases} z'(t) - S(t)z'(h_1(t)) + \varepsilon q(t)z(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, \\ \Delta[z(\tau_k) - S_{\tau_k}z(h_1(\tau_k))] + \varepsilon q_{\tau_k}z(h_2(\tau_k)) = 0, & k \in N, \end{cases} \quad (2.1.*)$$

където $S(t) = c(h_2(t)) \frac{q(t)}{q(h_1(t))}$, $S_{\tau_k} = c_{h_2(\tau_k)} \frac{q_{\tau_k}}{q_{h_1(\tau_k)}}$, $q_{\tau_k} = q(\tau_k)$.

Показано е, че при валидна хипотезата (Bh1), са в сила симетрични резултати, съдържащи се в Леми 2.1.6 и 2.1.7 :

ЛЕМА 2.1.6. Нека хипотезите (Bh1), (H), (H2.1.1)-(H2.1.3) са в сила. Нека $y(t)$ е финално положително решение на задачата (2.1.4) при $\varepsilon = +1$ или $y(t)$ е финално отрицателно решение на задачата (2.1.4) при $\varepsilon = -1$. Тогава :

(1) Ако една от двете хипотези (H2.1.6) или (H2.1.7) е в сила, то функцията $z(t)$, дефинирана в (2.*), финално удовлетворява квазилинейната функционално-диференциална от неутрален тип релация с импулси

$$\begin{cases} z'(t) - S(t)z'(h_1(t)) + \varepsilon q(t)z(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, \\ \Delta[z(\tau_k) - S_{\tau_k} z(h_1(\tau_k))] + \varepsilon q_{\tau_k} z(h_2(\tau_k)) \leq 0, & k \in N; \end{cases} \quad (2.1.*a)$$

(2) Ако хипотезата (H2.1.5) е в сила, то функцията $z(t)$, дефинирана в (2.*), финално удовлетворява квазилинейната функционално-диференциална от неутрален тип релация с импулси

$$\begin{cases} z'(t) - S(t)z'(h_1(t)) + \varepsilon q(t)z(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, \\ \Delta[z(\tau_k) - S_{\tau_k} z(h_1(\tau_k))] + \varepsilon q_{\tau_k} z(h_2(\tau_k)) \geq 0, & k \in N, \end{cases} \quad (2.1.*b)$$

където $S(t) = c(h_2(t)) \frac{q(t)}{q(h_1(t))}$, $S_{\tau_k} = c_{h_2(\tau_k)} \frac{q_{\tau_k}}{q_{h_1(\tau_k)}}$, $q_{\tau_k} = q(\tau_k)$.

Изследвано е и асимптотичното поведение на помощна функция, дефинирана чрез финално неосцилиращи решения на хомогенната задача за ФДНУИ-1 от клас (L2L-1) със смесени по знак коефициенти от вида

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))] + p(t)y(h_1(t)) - q(t)y(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k} y(h_1(\tau_k))] + p_{\tau_k} y(h_1(\tau_k)) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

За целта са въведени условията:

$$(H2.1.8) \quad h_1(t) \leq h_2(t), \quad q(h_2^{-1}(t))(h_2^{-1}(t))' \leq p(h_1^{-1}(t)), \quad t \in J;$$

$$(H2.1.9) \quad c(t) + \int_{h_2^{-1}(h_2(t))}^t q(s)ds \leq 1, \quad t \in J$$

и е дефинирана помощната функция

$$z(t) = y(t) - c(t)y(h_1(t)) - \int_{h_2^{-1}(h_1(t))}^t q(s)y(h_2(s))ds, \quad \Delta z(\tau_k) = \Delta y(\tau_k) - c_{\tau_k} \Delta y(h_1(\tau_k)). \quad (2.**)$$

Доказана е важната

ЛЕМА 2.1.8. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.3) и (H2.1.8)-(H2.1.9) са в сила, $y(t)$ е финално положително решение на (2.1.7) и $c(t) > 0$. Тогава $z(t)$, дефинирана в (2.**), е финално положителна и нерастяща функция със „скокове надолу”.

На основание на получените по-горе резултати е изследвано асимптотичното поведение на финалните неосцилиращи решения на (2.1.1) чрез помощната функция, дефинирана в (2.*). Доказана е важната теорема 2.1.1, на която останалите са органическо допълнение.

ТЕОРЕМА 2.1.1. Нека хипотезите (H) и (H2.1.1)-(H2.1.4) са в сила и $y(t)$ е финално положително решение на задачата (2.1.1) при $\varepsilon = +1$. Тогава :

(1) Ако е в сила (H2.1.5) или (H2.1.6), то решението $y(t)$ удовлетворява

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta y(\tau_k)| = 0.$$

(2) Ако е в сила (H2.1.7) и $\exists C_1 \in \mathbb{R}^+ : c(t) \leq C_1$, то $y(t)$ удовлетворява

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

В параграф 2.1 са изследвани условията за съществуване на неосцилиращи решения на задачи от клас **(LL-1c)** - квазилинейни функционално-диференциални от неутрален тип в линейна форма уравнения от първи ред с импулсно въздействие (ФДНУИ-1) и постоянни коефициенти при валидни хипотези (Ahi). Разгледани са различни задачи, първата от които е задачата от клас **(L1cL-1c)** с едно постоянно отклонение на аргумента $h_1(t) = t - h_1$, $h_1 \in \mathbb{R}^+$, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t - h_1)]' + ry(t) + py(t - h_1) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - cy(\tau_k - h_1)] + sy(\tau_k) + uy(\tau_k - h_1) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Доказана е теоремата

ТЕОРЕМА 2.2.1. Задача (2.2.1) притежава решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато уравнението

$$(r - \lambda) \left(1 + \frac{(ur - sp) - (cs + u)\lambda}{cr + p} \right)^L + (c\lambda + p)e^{\lambda h_1} = 0, \quad L \in \mathbb{R} \quad (2.2.3)$$

притежава реален корен $\lambda \in \mathbb{R}$.

Следствията от тази теорема утвърждават условия, при които съществуват неосцилиращи решения на (2.2.1). Основен резултат тук е :

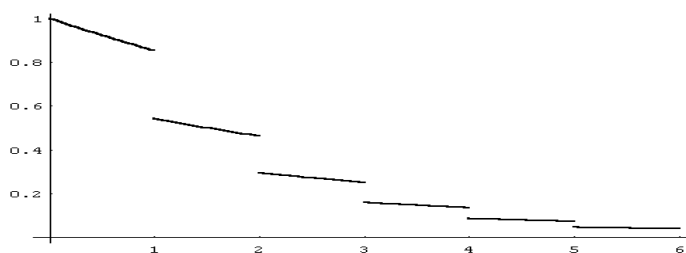
СЛЕДСТВИЕ 2.2.1.1. Задача (2.2.1) притежава финално положително решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато (2.2.3)

- 1) притежава реален корен $\lambda < \frac{r(c+u) + p(1-s)}{u+sc}$, при $(u+sc)(p+rc) > 0$;
- 2) притежава реален корен $\lambda > \frac{r(c+u) + p(1-s)}{u+sc}$, при $(u+sc)(p+rc) < 0$.

Пример 2.2.1. Квазилинейното ФДНУИ от клас **(L1cL-1c)**

$$\begin{aligned} [y(t) - 0.14711y(t-1)]' + 0.063065y(t-1) &= 0 \quad t \neq \tau_k \\ \Delta[y(\tau_k) - 0.14711y(\tau_k - 1)] + 0.1438y(\tau_k - 1) &= 0, \quad k \in N \end{aligned}$$

при $\tau_{k+1} - \tau_k = 1, k \in N$, за всяко $t \geq \tau_0 > 0$ удовлетворява условията на Следствие 2.2.1.1 при $r = s = 0$ и съгласно неговите изводи, притежава финално положително решение. Такова наистина има, във вида $y(t) = e^{-\lambda_* t} A^{i(\tau_0, t)}$, където $\lambda_* \approx 0.1591895$, а пулсиращият коефициент е $A \approx 0.637018$ (Виж фиг. 2.2.1).



фиг. 2.2.1

Въз основа на следствията от Теорема 2.2.1. е направено изследване, с цел откриване на по-конкретни условия за съществуване на финално положителни решения на задачи от вида (2.2.1).

ТЕОРЕМА 2.2.2. Задачата (2.2.1), при $r = 0, s = 0, L = 1$ и $c \in (0, 1)$, има за решение финално положителна импулсна експонента, ако

$$\frac{1}{4\alpha_2} - \frac{c}{2} \leq u \leq \frac{1}{4\alpha_1} - \frac{c}{2}$$

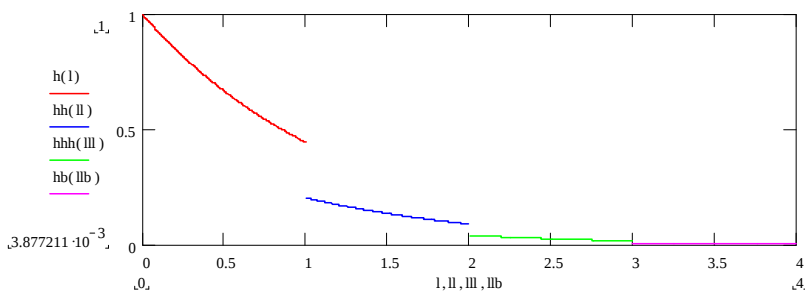
където $\alpha_1 \leq \alpha_2$ са реални корени на уравнението

$$\alpha = e^{\frac{ph_1(c+2u)}{u}} \alpha, \text{ при } ph_1 \leq \frac{u}{(c+2u)e}.$$

Пример 2.2.3 Квазилинейното ФДНУИ от клас **(L1cL-1c)**

$$\begin{cases} \left[y(t) - \frac{1}{4e} \cdot y(t-1) \right]' + \frac{1}{4e} \cdot y(t-1) = 0 & t \neq \tau_k \\ \Delta \left[y(\tau_k) - \frac{1}{4e} \cdot y(\tau_k - 1) \right] + \frac{1}{8e} \cdot y(\tau_k - 1) = 0, & k \in N \end{cases}$$

при $\tau_{k+1} - \tau_k = 1, k \in N$, за всяко $t \geq \tau_0 > 0$ удовлетворява Теорема 2.2.2. и следователно притежава финално положително решение. Такова е например $y(t) = e^{-\lambda_* t} A^{i(\tau_0, t)}$, с $\lambda_* = 1$ и пулсиращ коефициент $A = \frac{1}{2}$, т.е. $y(t) = e^{-t} 2^{-i(\tau_0, t)}$ (Виж фиг. 2.2.4).



фиг. 2.2.4

Втора от разгледаните задачи е тази от клас **(L2cL-1c)** - квазилинейни ФДНУИ-1 с постоянни коефициенти с две постоянни отклонения на аргумента $h_1(t) = t - h_1$, $h_1 \in R^+$ и $h_2(t) = t - h_2$, $h_2 \in R^+$, $h_2 > h_1$, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t-h_1)]' + qy(t-h_2) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - cy(\tau_k - h_1)] + vy(t-h_2) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

За нея е доказана следната теорема.

ТЕОРЕМА 2.2.4. Задача (2.2.7) притежава решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато уравнението

$$-\lambda \left(1 - \frac{v}{q}\lambda\right)^K + c\lambda e^{\lambda h_1} \left(1 - \frac{v}{q}\lambda\right)^{K-L} + qe^{\lambda h_2} = 0 \quad (2.2.9)$$

притежава реален корен $\lambda \in \mathbb{R}$.

Следствията от тази теорема утвърждават условия, при които съществуват неосцилиращи решения на (2.2.7). Основен резултат тук е:

СЛЕДСТВИЕ 2.2.4.1. Задача (2.2.7) притежава финално положително решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато (2.2.9):

- 1) притежава реален корен $\lambda < \frac{q}{v}$, при $vq > 0$;
- 2) притежава реален корен $\lambda > \frac{q}{v}$, при $vq < 0$.

Разгледан е и частния случай на (2.2.7) при $q = 0$, т.е. задачата

$$\begin{cases} [y(t) - c \cdot y(t - h_1)]' = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c \cdot y(\tau_k - h_1)] + v y(\tau_k - h_2) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.2.13)$$

ТЕОРЕМА 2.2.6. Съществува финално положително решение на (2.2.13) във форма на импулсен линеал, тогава и само тогава когато уравнението

$$A^K (A - 1) - c(A - 1)A^{K-L} + v = 0 \quad (2.2.14)$$

притежава положителен реален корен A .

В параграф 2.3. са установени критерии за осцилиране на решенията на квазилинейни ФДНУИ-1 с непостоянни коефициенти. Разгледана е задачата от клас **(L2L-1)** с две закъснения на аргумента, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))] + q(t)y(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k} y(h_1(\tau_k))] + q_{\tau_k} y(h_2(\tau_k)) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

На основание резултатите от параграф 1.6 и лемите на параграф 2.1. са доказани единадесет теореми, по-важните от които са:

ТЕОРЕМА 2.3.4. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4) и (H2.1.6) са в сила и нека
$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{h_1(h_2(t))}^t c(h_2(t))q(t) ds + \sum_{h_1(h_2(t)) \leq \tau_k \leq t} q_{\tau_k} c(h_2(\tau_k)) \right] \geq 1.$$
 Тогава, всички решения на (2.3.1) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.3.6. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4) и (H2.1.6) са в сила. Нека са изпълнени и зависимостите:

$$(1) \exists s_0 > 0: S(t) = c(h_2(t)) \frac{q(t)}{q(h_1(t))} \geq s_0, \quad t \in J, \quad S_{\tau_k} = S(\tau_k), \quad q_{\tau_k} = q(\tau_k), \quad k \in N;$$

$$(2) h_2(t) \leq h_1(t) < t, \quad t \in J;$$

$$(3) \liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\int_t^{h_1^{-1}(t)} q(u) du + \sum_{t \leq \tau_k \leq h_1^{-1}(t)} q_{\tau_k} \right] \geq 1 + s_0.$$

Тогава всички решения на (2.3.1) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.3.7. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4) и (H2.1.6) са в сила. Нека са изпълнени и зависимостите:

- (1) $\exists s_0 < 1 : S(t) = c(h_2(t)) \frac{q(t)}{q(h_1(t))} \leq s_0, S'(t) \geq 0, t \in J, S_{\tau_k} = S(\tau_k), q_{\tau_k} = q(\tau_k) < 1, k \in N;$
- (2) $h_2(t) \leq h_1(t) < t, t \in J;$
- (3) $\frac{1}{e} \limsup_{t \rightarrow \infty} \prod_{h_1^{-1}(h_2(t)) \leq \tau_k \leq t} (1 - q_{\tau_k}) < \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h_1^{-1}(h_2(t))}^t \frac{q(u)}{1 - S(h_1^{-1}(h_2(u)))} du.$

Тогава всички решения на (2.3.1) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.3.10. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4) и (H2.1.7) са в сила и :

- (1) $h_1(t) < h_2(t);$
- (2) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{t \leq \tau_k \leq h_1^{-1}(h_2(t))} \left(1 + \frac{q_{\tau_k}}{c(h_1^{-1}(h_2(\tau_k)))} \right)^{h_1^{-1}(h_2(t))} \int_t^{h_1^{-1}(h_2(t))} \frac{q(s)}{c(h_1^{-1}(h_2(s)))} ds \right) > \frac{1}{e}.$

Тогава всички решения на (2.3.1) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.3.11. Нека хипотезите (Ah1), (H), (H2.1.1)-(H2.1.4) и (H2.1.7) са в сила и са изпълнени следните зависимости :

- (1) $h_2(t) < h_1(t);$
- (2) $\exists S_0 > 0 : S(t) = c(h_2(t)) \frac{q(t)}{q(h_1(t))} \geq S_0, t \geq t_0, S_{\tau_k} = c(h_2(\tau_k)) \frac{q_{\tau_k}}{q(h_1(\tau_k))};$
- (3) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \left[\int_t^{h_1^{-1}(t)} q(s) ds + \sum_{t \leq \tau_k \leq h_1^{-1}(t)} q_{\tau_k} \right] \leq 1 + S_0.$

Тогава всички решения на (2.3.1) са осцилиращи.

Установени са критерии за осцилиране на решенията на квазилинейни ФДНУИ-1 от клас (L2L-1), имащи смесени по знак коефициенти, като е разгледано уравнението

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))] + p(t)y(h_1(t)) - q(t)y(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k}y(h_1(\tau_k))] + p_{\tau_k}y(h_1(\tau_k)) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.3.30)$$

Доказани са следните по-важни теореми:

ТЕОРЕМА 2.3.12. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.3) и (H2.1.8)-(H2.1.9) са в сила

$$и \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{h_1(t)}^t \left(p(s) - q(h_2^{-1}(h_1(s))) (h_2^{-1}(h_1(s)))' \right) ds + \sum_{h_1(t) \leq \tau_k \leq t} p_{\tau_k} \right] \geq 1.$$

Тогава, всички решения на (2.3.30) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.3.13. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.3) и (H2.1.8)-(H2.1.9) са в сила и са изпълнени следните зависимости :

- (1) $p_{\tau_k} < 1;$
- (2) $\frac{1}{e} \limsup_{t \rightarrow \infty} \prod_{h_1(t) \leq \tau_k \leq t} (1 - p_{\tau_k}) < \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h_1(t)}^t \left(p(s) - q(h_2^{-1}(h_1(s))) (h_2^{-1}(h_1(s)))' \right) ds.$

Тогава, всички решения на (2.3.30) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.3.14. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.3) и (H2.1.8)-(H2.1.9) са в сила и са изпълнени следните зависимости :

$$(1) \quad p_{\tau_k} < 1 ;$$

$$(2) \quad \liminf_{k \in N} \left\{ \frac{\sum_{\tau_k \leq \tau_i < h_1^{-1}(\tau_k)} p_{\tau_i} + \int_{\tau_k}^{h_1^{-1}(\tau_k)} \left(p(s) - q(h_2^{-1}(h_1(s))) (h_2^{-1}(h_1(s)))' \right) ds}{1 - p_{\tau_k}} \right\} \geq 1.$$

Товага всички решения на (2.3.30) са осцилиращи.

Обърнато е внимание и на случаи със знакоосцилиращи коефициенти. В Теорема 2.3.16 е установен критерий за осцилиране на решенията на (2.3.1) при условие, че коефициента $q(t)$ е знакоосцилираща функция.

ТЕОРЕМА 2.3.16. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.3) и (H2.1.6) са в сила и са изпълнени следните зависимости :

(1) Съществува такава редица реални числа $\{t_n\} \rightarrow \infty$ и такова число $l \in R^+$, че за функцията $q(t)$ е изпълнено $q(t) > 0$ поне в интервалите $\{[t_n - 2l, t_n + 2l]\}_{n=1}^{\infty}$, където $t_n < t_{n+1} - 2l$, $n \in N$, $\sigma \leq l$;

$$(2) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty, t \in J_U} \int_{\alpha(t)}^t q(s) ds > \frac{1}{e}, \quad J_U = J \cap U(t, 2l),$$

$$\text{където} \quad U(t, 2l) := \bigcup_{n=1}^{\infty} U(t_n, 2l), \quad U(t_n, 2l) = [t_n - 2l, t_n + 2l], \quad n \in N;$$

$$(3) \quad \text{Съществува } c \in (0, 1), \text{ така че } 0 < \limsup_{t_n \rightarrow \infty} \prod_{t_n - \sigma \leq \tau_k < t_n + \sigma} (1 - q_{\tau_k}) \leq \left[\frac{(1-c)c}{e} \right]^2.$$

Товага, задачата (2.3.1) притежава само осцилиращи решения.

Параграф 2.4. е мястото, където се ползват характеристичните уравнения, получени в параграф 2.2., за да се изследват условията за съществуване на осцилиращи решения на квазилинейни ФДНУИ-1 с постоянни коефициенти. Разгледана е задачата от клас **(L1cL-1c)** с едно постоянно закъснение на аргумента $h_1(t) = t - h_1$, $h_1 \in R^+$, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t - h_1)]' + ry(t) + py(t - h_1) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - cy(\tau_k - h_1)] + sy(\tau_k) + uy(\tau_k - h_1) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Доказани са няколко теореми, най-важната от които е:

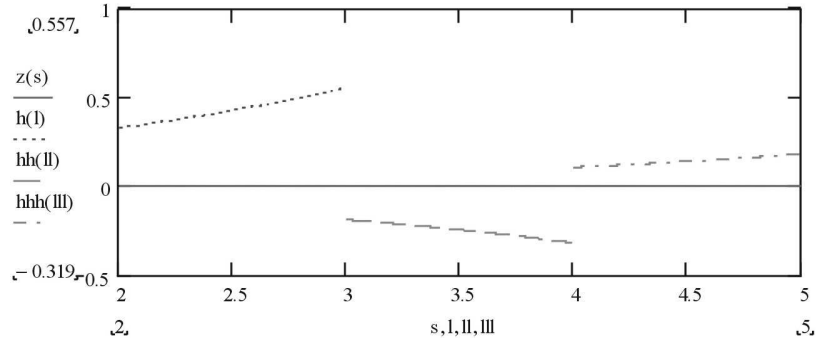
ТЕОРЕМА 2.4.1. Задача (2.4.1) притежава само финално осцилиращи решения $y(t)$ във форма на импулсна експонента, тогава и само тогава когато, алгебричното уравнение (2.4.2) притежава само реални корени $\lambda > \frac{r(c+u) + p(1-s)}{u+sc}$, при

$$(u+sc)(p+rc) > 0 \text{ или само реални корени } \lambda < \frac{r(c+u) + p(1-s)}{u+sc}, \text{ при } (u+sc)(p+rc) < 0.$$

Пример 2.4.2. Квазилинейното ФДНУИ-1 с постоянни коефициенти

$$\begin{cases} \left[y(t) - \frac{1}{2} y(t-1) \right]' - 3y(t) = 0 & t \neq \tau_k \\ \Delta \left[y(\tau_k) - \frac{1}{2} y(\tau_k - 1) \right] + \frac{5}{2} y(\tau_k) = 0, & k \in N \end{cases}$$

при $\tau_{k+1} - \tau_k = 1, k \in N$, за всяко $t \geq \tau_0 > 0$ удовлетворява Теорема 2.4.1 (при $p = u = 0$) и затова всички негови решения са осцилиращи. Едно такова решение например е $y(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot A^{i[\tau_0, t]}$ с $\lambda \approx -0.534607$ и пулсиращ коефициент $A \approx -0.337$ (Виж фиг. 2.4.2).



фиг. 2.4.2

Отбелязано е, че всички теореми от параграф 2.3. могат да се преформулират и за случаите, когато коефициентите на разглежданите уравнения са постоянни. Спецификата на функционалната зависимост обаче понякога „скрива“ интересен резултат, който може да се получи при константна зависимост. Затова са приведени теореми, които не могат да се получат като адаптация на никоя от теоремите на параграф 2.3.. За целта е разгледана задача от вида (2.3.1) с постоянни коефициенти, т.е.

$$\begin{cases} [y(t) - cy(h_1(t))] + qy(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - cy(h_1(\tau_k))] + \nu y(h_2(\tau_k)) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

ТЕОРЕМА 2.4.9. Нека хипотезите **(Ah1)**, (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.6), (H2.4.1) и (H2.4.2) са в сила и са изпълнени още следните зависимости :

(1) $h_2(t) \leq h_1(t) < t, t \in J$;

(2) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{h_2(h_1^{-1}(t))}^t q \, ds + \sum_{h_2(h_1^{-1}(t)) \leq \tau_k \leq t} \nu \right] \geq 1 - c$.

Тогава, всички решения на (2.3.1) (т.е. на (2.4.10)) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.4.10. Нека хипотезите **(Ah1)**, (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.6), (H2.4.1) и (H2.4.2) са в сила и са изпълнени още следните зависимости :

(1) $h_2(t) \leq h_1(t) < t, t \in J$;

(2) $c + \nu < 1$;

(3) $\frac{1}{e} \limsup_{t \rightarrow \infty} \prod_{h_2(h_1^{-1}(t)) \leq \tau_k \leq t} \left(\frac{1-c-\nu}{1-c} \right) < \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h_2(h_1^{-1}(t))}^t \frac{q}{1-c} \, ds$.

Тогава, всички решения на (2.3.1) (т.е. на (2.4.10)) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.4.11. Нека хипотезите **(Ah1)**, (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.7), (H2.4.1) и (H2.4.2) са в сила и са изпълнени още следните зависимости :

(1) $h_1(t) \leq h_2(t) < t, t \in J$;

(2) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{h_2^{-1}(t)}^{h_1^{-1}(t)} q \, ds + \sum_{h_2^{-1}(t) \leq \tau_k \leq h_1^{-1}(t)} \nu \right] \geq c^2$.

Тогава, всички решения на (2.3.1) (т.е. на (2.4.10)) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 2.4.12. Нека са в сила условията на теорема 2.4.11. Тогава, ако

$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h_2^{-1}(t)}^{h_1^{-1}(t)} q ds \leq \frac{c}{e}$ и $\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{h_2^{-1}(t) \leq \tau_k \leq h_1^{-1}(t)} \nu \geq c^2$, то (2.4.10) има само осцилиращи решения.

Забележка. Тази теорема е директно следствие от теорема 2.4.11, но има принципна важност, която се състои в следното. Известно е ([55]), че достатъчно условие за осцилиране на решенията на (2.4.10) без импулси и при постоянни закъснения на аргументите $(h_1(t) = t - h, h_2(t) = t - \sigma)$ е $\frac{q}{c}(h - \sigma) > \frac{1}{e}$. Но, наличието на импулси може да причини или неутрализира осцилациите на решенията, както се твърди в горната теорема. В частност, тя показва, че уравнението (2.4.10), под въздействието на импулси, е осцилиращо дори и извън гореспоменатото условие, т.е. и при $\frac{q}{c}(h - \sigma) \leq \frac{1}{e}$.

В параграф 2.5. са анализирани условията за осцилиране на решенията на сродни задачи ФДНУИ-1, за да се открие връзка между тях. Разгледани са квазилинейни ФДНУИ-1 с постоянни коефициенти и по специално задачите от клас **(L2cL-1c)** с две постоянни закъснения на аргумента $h_1(t) = t - h_1, h_1 \in R^+, h_2(t) = t - h_2, h_2 \in R^+$, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t - h_1)]' + ry(t) + py(t - h_1) + qy(t - h_2) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - cy(\tau_k - h_1)] + s_k y(\tau_k) + u_k y(\tau_k - h_1) + v_k y(\tau_k - h_2) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

и

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t - h_1)]' + \bar{r}y(t) + \bar{p}y(t - h_1) + \bar{q}y(t - h_2) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - cy(\tau_k - h_1)] + \bar{s}_k y(\tau_k) + \bar{u}_k y(\tau_k - h_1) + \bar{v}_k y(\tau_k - h_2) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Целта, която се следва е, да се покаже, че при определени условия, сравнявайки коефициентите на такива сродни уравнения, от осцилиране на всички решения на едното, следва осцилиране на всички решения и на другото уравнение. Доказани са теоремите:

ТЕОРЕМА 2.5.1. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.6) и (H2.4.2) са в сила и са изпълнени зависимостите $r \leq \bar{r}, p \leq \bar{p}, q \leq \bar{q}, s_k \geq \bar{s}_k, u_k \geq \bar{u}_k, v_k \geq \bar{v}_k, k \in N$. Тогава, от осцилирането на всички решения на (2.5.1) следва осцилиране на всички решения и на (2.5.2).

ТЕОРЕМА 2.5.2. Нека хипотезите (Ah1), (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.6) и (H2.4.2) са в сила и са изпълнени следните зависимости:

$$(1) \quad h_2 \geq h_1;$$

$$(2) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(q(h_2 - h_1) + \sum_{t-h_2+h_1 \leq \tau_k \leq t} \nu \right) \geq 1 - c;$$

$$(3) \quad c \leq \bar{c} < 1, q \leq \bar{q}, \nu \leq \bar{\nu}.$$

Тогава, от осцилирането на всички решения на (2.5.1) следва осцилиране и на всички решения на (2.5.2).

На това място, допълнително са разгледани задачите от отклоняващ се тип с едно постоянно закъснение на аргумента $h_2(t) = t - h_2, h_2 \in R^+$, от вида

$$\begin{cases} z'(t) + q(t)z(t - h_2) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta z(\tau_k) + q_{\tau_k} z(\tau_k - h_2) = 0, & k \in N, \end{cases} \quad (2.5.6)$$

и

$$\begin{cases} z'(t) + \bar{q}(t)z(t - h_2) \leq 0, & t \neq \tau_k, & k \in N \\ \Delta z(\tau_k) + \bar{q}_{\tau_k} z(\tau_k - h_2) \leq 0, & k \in N, \end{cases} \quad (2.5.7)$$

за да се обобщи Лема 2.6.4 [55] над пространството $PAC_\tau^n(J)$, а именно:

ЛЕМА 2.5.1. *Нека хипотезите (H) и (H1.6.2) са в сила. Нека още са изпълнени зависимостите $\bar{q}(t) \geq q(t) > 0$, $\bar{q}_{\tau_k} \geq q_{\tau_k} > 0$. Тогава, ако $\psi(t)$ е финално положително решение на (2.5.7), то съществува финално положително решение $\phi(t)$ на (2.5.6), за което $\phi(t) \leq \psi(t)$.*

С помощта на това обобщение е разгледаме задачата с непостоянни коефициенти от клас **(L2cL-1)** с две постоянни закъснения на аргумента $h_1(t) = t - h_1$, $h_1 \in R^+$, $h_2(t) = t - h_2$, $h_2 \in R^+$ от вида (2.3.1), т.е.

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(t - h_1)]' + q(t)y(t - h_2) = 0, & t \neq \tau_k, & k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c(\tau_k)y(\tau_k - h_1)] + q_{\tau_k}y(\tau_k - h_2) = 0, & k \in N \end{cases} \quad (2.5.11)$$

и е доказана следната важна теорема:

ТЕОРЕМА 2.5.3. *Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.6) са в сила и $\bar{q}(t) \geq q(t) > 0$, $\bar{q}_{\tau_k} \geq q_{\tau_k} > 0$. Тогава, от осцилирането на всички решения на (2.5.6) следва осцилиране на всички решения и на (2.5.11).*

В параграф 2.6. е разгледан въпросът, дали този резултатите от параграф 2.3. се запазват и в специалния случай, когато $c = 1$. Затова е разгледана задачата от вида (2.2.7)

$$\begin{cases} [y(t) - y(t - h)]' + q(t)y(t - \sigma) = 0, & t \neq \tau_k, & k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - y(\tau_k - h)] + \nu y(\tau_k - \sigma) = 0, & k \in N, \end{cases} \quad (2.6.*)$$

както и съответната и задача с нехомогенно уравнение имащо дясна част $f(t)$.

$$\begin{cases} [y(t) - y(t - h)]' + q(t)y(t - \sigma) = f(t), & t \neq \tau_k, & k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - y(\tau_k - h)] + \nu y(\tau_k - \sigma) = 0, & k \in N, \end{cases} \quad (2.6.**)$$

където за удобство сме приели $h_1 = h$, $h_2 = \sigma$, $h, \sigma, \nu > 0$, $c = 1$. Въведени са условията:

$$\int_{t_0}^{\infty} q(s)ds = \infty, \quad (2.6.1)$$

$$\int_0^{\infty} |f(t)|dt < \infty. \quad (2.6.2)$$

ТЕОРЕМА 2.6.1. *Ако (2.6.1) е в сила, то всички решения на задача (2.6.*) са осцилиращи.*

Изследвано е и асимптотичното поведение на финално положителните решения на (2.6.**). Доказана е следната теорема.

ТЕОРЕМА 2.6.2. *Ако $y(t)$ е финално положително решение на (2.6.**), при условие че са в сила зависимостите (2.6.1) и (2.6.2), то :*

(а) *функцията $z(t) = y(t) - y(t - h)$ е финално отрицателна, т.е. $z(t) < 0$ за достатъчно големи t и е изпълнено $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$, $\lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta z(\tau_k)| = 0$;*

(б) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, $\lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta y(\tau_k)| = 0$.

Глава трета подлага на изследване нелинейните ФДНУИ от първи ред. Разгледани са критерии за осцилиране на решенията им и асимптотичното поведение на неосцилиращите им решения, Разработен е метод на линеаризацията.

Разгледани са нелинейните ФДНУИ-1 от клас **(N2L-1)** от вида

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))] + \varepsilon q(t)f(y(t), y(h_1(t)), y(h_2(t))) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k}y(h_1(\tau_k))] + \varepsilon q_{\tau_k}I(y(\tau_k), y(h_1(\tau_k)), y(h_2(\tau_k))) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Въведени са следните условия:

$$(H3.1.1) \quad f \in C(J \times J \times J, R), \quad u_i f(u_1, u_2, u_3) > 0, (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0),$$

$$f'_{u_i}(u_1, u_2, u_3) > 0, \quad \exists C_f \in R^+ : 1 \leq \frac{|f(u_1, u_2, u_3)|}{|u_i|} \leq C_f, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$(H3.1.2) \quad I \in C(J \times J \times J, R), \quad u_i I(u_1, u_2, u_3) > 0, (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0),$$

$$\exists C_I \in R^+ : 1 \leq \frac{|I(u_1, u_2, u_3)|}{|u_i|} \leq C_I, \quad i = 1, 2, 3.$$

В параграф 3.1. е изследвано асимптотичното поведение на финалните неосцилиращи решения на нелинейни ФДНУИ-1 от вида (3.1.1), чрез функцията $z(t)$, дефинирана в (2.*), в случаите, когато тя е конструирана от неосцилиращи решения на (3.1.1). Основен резултат за поведението на помощната функция дава следната лема:

ЛЕМА 3.1.1. Нека хипотезите (H) и (H2.1.1)-(H2.1.4), (H3.1.1), (H3.1.2) са в сила и $y(t)$ е финално положително решение на задачата (3.1.1) при $\varepsilon = +1$. Тогава, функцията $z(t)$, дефинирана в (2.*), е намаляваща и :

(1) Ако е в сила (H2.1.5), то $z(t)$ е финално положителна и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = L, \quad 0 \leq L < +\infty, \quad \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta z(\tau_k)| = 0;$$

(2) Ако е в сила (H2.1.6), то $z(t)$ е финално положителна и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0, \quad \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta z(\tau_k)| = 0;$$

(3) Ако е в сила (H2.1.7), то $z(t)$ е финално отрицателна и $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = -\infty$.

Въз основа на тази лема и в зависимост от валидността на коя да е от хипотезите (2.1.5), (2.1.6) или (2.1.7) е изследвано асимптотичното поведение на финалните неосцилиращи решения на нелинейни ФДНУИ-1 от вида (3.1.1) в следните теореми:

ТЕОРЕМА 3.1.1. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4) и (H2.1.5) са в сила и $y(t)$ е финално неосцилиращо решение на задачата (3.1.1) при $\varepsilon = +1$. Тогава:

(1) $y(t)$ е финално ограничена функция, т.е.

$$0 < \liminf_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| < +\infty \quad \text{и} \quad \exists L_1, L_2 \in R^+ : L_1 \leq |\Delta y(\tau_k)| \leq L_2, \quad k \in N.$$

(2) Ако са в сила (H3.1.1) и (H3.1.2), а $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta y(\tau_k)| = 0.$$

(3) Ако са в сила (H3.1.1) и (H3.1.2), а $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = -\infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta y(\tau_k)| = 0.$$

ТЕОРЕМА 3.1.2. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4) и (H2.1.6) са в сила и $y(t)$ е финално неосцилиращо решение на задачата (3.1.1) при $\varepsilon = +1$. Тогава:

(1) $y(t)$ е финално ограничена функция, т.е.

$$0 < \liminf_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| < +\infty \quad \text{и} \quad \exists L_1, L_2 \in \mathbb{R}^+ : L_1 \leq |\Delta y(\tau_k)| \leq L_2, k \in \mathbb{N};$$

(2) Ако $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = \bar{c}_0 \leq c_0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq 0$, $\lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta y(\tau_k)| = 0$;

(3) Ако са в сила (H3.1.1) и (H3.1.2), то $\liminf_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| = 0$;

(4) Ако са в сила (H3.1.1) и (H3.1.2), а $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = \bar{c}_0 \leq c_0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta y(\tau_k)| = 0.$$

ТЕОРЕМА 3.1.3. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4) и (H2.1.7) са в сила и $y(t)$ е финално неосцилиращо решение на задачата (3.1.1) при $\varepsilon = +1$. Тогава, ако $\exists C_1 > 1$: $c(t) \leq C_1$, то $\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$.

В параграф 3.2. е изследвана задачата от клас (N2L-1) - нелинейни функционално-диференциални, с две отклонения на аргумента, от неутрален тип в линейна форма, уравнения от първи ред с импулси (ФДНУИ-1) и непостоянни коефициенти от вида (3.1.1). Доказани са следните теореми:

ТЕОРЕМА 3.2.1. Нека в сила са хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H3.1.1), (H3.1.2), както и (H2.1.5) или (H2.1.6), при $\varepsilon = +1$. Ако, за дефинираната в (1.6.35) функция $\tilde{I}_Q(t)$, във връзка с (1.6.32), (1.6.33) и (1.6.34), при $h_1(h_2(t)) := \alpha(t)$ е изпълнено

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} [\tilde{I}_Q(t)] \geq \frac{(1+C_I)^M}{e}, \quad M = \max_{t \in [\alpha(t_0), +\infty)} \{i(\alpha(t), t)\},$$

то (3.1.1) притежава само финално осцилиращи решения.

ТЕОРЕМА 3.2.2. Нека в сила са хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.7), (H3.1.1), (H3.1.2), при $\varepsilon = +1$. Ако, $h_1(t) \leq h_2(t)$, $t \geq t_1$ и освен това

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\int_t^{h_1(h_2(t))} \frac{q(s)}{c(h_1^{-1}(h_2(s)))} ds + \sum_{t \leq \tau_k \leq h_1(h_2(t))} \frac{q_{\tau_k}}{c(h_1^{-1}(h_2(\tau_k)))} \right] \geq 1,$$

то (3.1.1) притежава само финално осцилиращи решения.

ТЕОРЕМА 3.2.3. Нека в сила са хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.7), (H3.1.1), (H3.1.2), при $\varepsilon = +1$. Ако, $h_1(t) \leq h_2(t)$, $t \geq t_1$ и освен това

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\prod_{t \leq \tau_k \leq h_1(h_2(t))} \left(1 + \frac{q_{\tau_k}}{c(h_1^{-1}(h_2(\tau_k)))} \right) \int_t^{h_1(h_2(t))} \frac{q(s)}{c(h_1^{-1}(h_2(s)))} ds \right] > \frac{1}{e},$$

то (3.1.1) притежава само финално осцилиращи решения.

В параграф 3.3. е развита идеята за линеаризационен подход при изследване нелинейните ФДНУИ-1 с непостоянни коефициенти от клас (N2L-1). Разгледана е задача от вида

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)g(y(h_1(t)))]' + \varepsilon q(t)f(y(h_2(t))) = 0, & t \neq \tau_k, k \in \mathbb{N} \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k}y(h_1(\tau_k))] + \varepsilon q_{\tau_k}I(y(h_2(\tau_k))) = 0, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Въведени са следните условия:

$$(H3.3.1) \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c, c \in R; \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q, q \in R; \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 1; \lim_{u \rightarrow 0} \frac{I(u)}{u} = 1;$$

$$(H3.3.2) \quad v g(v) > 0, \frac{|g(v)|}{|v|} \leq 1, v \neq 0; g'(v) \geq 0, \lim_{v \rightarrow 0} \frac{g(v)}{v} = 1.$$

Дадена е следната дефиниция:

Дефиниция 3.3.1. Линеаризационен модел на уравнението (3.3.1), във връзка с хипотезата (H3.3.1), наричаме уравнението (2.2.7).

Основен резултат е получен в следната теорема:

ТЕОРЕМА 3.3.1 Нека хипотезите **(Ah1)**, (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H2.1.6), (H3.1.1), (H3.1.2), (H3.3.1) и (H3.3.2) са в сила, при $\varepsilon = +1$. Ако са изпълнени още следните зависимости :

$$(1) \quad h_2(t) \leq h_1(t), t \geq t_1;$$

$$(2) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{h_2(h_1^{-1}(t))}^t q \, ds + \sum_{h_2(h_1^{-1}(t)) \leq \tau_k \leq t} q_{\tau_k} \right] \geq 1 + c(\varepsilon - 1), \quad \forall \varepsilon \in (0, 1),$$

то всички решения на (3.3.1) са осцилиращи.

В Глава четвърта са изучени осцилационните свойства на ФДНУИ от втори ред и са построени характеристични уравнения за някои видове квазилинейни ФДНУИ. Изследвано е асимптотичното поведение на финалните неосцилиращи решения на квазилинейни ФДНУИ-2 с непостоянни коефициенти от клас **(L2L-2)** и са установени някои критерии за осцилиране на решенията на такива уравнения. Разгледана е задачата с две закъснения на аргумента, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))]'' + \varepsilon q(t)y(h_2(t)) = 0, \quad t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y'(\tau_k) - c_{\tau_k} y'(h_1(\tau_k))] + \varepsilon q_{\tau_k} y(h_2(\tau_k)) = 0, \quad k \in N. \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k} y(h_1(\tau_k))] = \varepsilon Q_{\tau_k} y(h_2(\tau_k)), \quad k \in N. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Въведено е следното допълнително условие:

$$(H4.1.1) \quad Q_{\tau_k} \in R_0^+, \sum_k Q_{\tau_k} < +\infty.$$

В параграф 4.1. е изследвано асимптотичното поведение на функцията $z(t)$, дефинирана в (2.*), в случаите, когато е конструирана от неосцилиращи решения на (4.1.1). В зависимост от валидността на хипотезите (2.1.5), (2.1.6) или (2.1.7) са доказани характерните за тези уравнения лемми:

ЛЕМА 4.1.1. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.3), (H2.1.5) и (H4.1.1) са в сила, $\varepsilon = +1$ и $y(t)$ е финално положително решение на задачата (4.1.1). Тогава, $z(t)$, дефинирана в (2), е финално положителна растяща функция с нестроги „скокове-нагоре“ и намаляваща неотрицателна първа производна.

ЛЕМА 4.1.2. Нека са в сила хипотезите (H) и (H2.1.1)-(H2.1.4), (H4.1.1), (H2.1.6) или (H2.1.7), където $\exists C: C > C_0$. Нека още $\varepsilon = +1$ и $y(t)$ е финално положително решение на задачата (4.1.1). Тогава, $z(t)$, дефинирана в (2.*), е финално отрицателна растяща функция с нестроги „скокове-нагоре“, с намаляваща положителна първа производна. Нещо повече,

$$z(t) < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0, \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta z(\tau_k)| = 0, z'(t) > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} z'(t) = 0, \lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} |\Delta z'(\tau_k)| = 0.$$

В параграф 4.2. са установени условия за съществуване на осцилиращи и неосцилиращи (финално положителни или финално отрицателни) решения на квазилинейни ФДНУИ-2 с постоянни коефициенти, от клас **(LL-2c)**. Разгледана е задачата от клас **(L2cL-2c)** с едно постоянно отклонение на аргумента $h_1(t) = t - h_1$, $h_1 \in R^+$, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t - h_1)]'' + r_0 y(t) + r_1 y'(t) + p_0 y(t - h_1) + p_1 y'(t - h_1) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta \left[(y(\tau_k) - cy(\tau_k - h_1))' \right] + s_1 y'(\tau_k) + u_1 y'(\tau_k - h_1) = 0, & k \in N. \\ \Delta [y(\tau_k) - cy(\tau_k - h_1)] + s_0 y(\tau_k) + u_0 y(\tau_k - h_1) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Основен резултат ни дава следната теорема:

ТЕОРЕМА 4.2.1. Задача (4.2.1) притежава решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато системата уравнения

$$\begin{cases} (\lambda^2 - r_1 \lambda + r_0) A^L - (c \lambda^2 + p_1 \lambda - p_0) e^{\lambda h_1} = 0 \\ \lambda ((s_1 - s_0) A^L + (u_1 - u_0) e^{\lambda h_1}) = 0, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

притежава реални корени λ , $A \in R$.

Въз основа на теорема 4.2.1 са формулирани следните две теореми:

ТЕОРЕМА 4.2.2. Задача (4.2.1) притежава финално положително решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато трансцедентната система (4.2.2) притежава реални корени λ , $A \in R$, вторият от които е положителен, т.е. $A > 0$.

ТЕОРЕМА 4.2.3. Задача (4.2.1) притежава финално осцилиращо решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато трансцедентната система (4.2.2) притежава реални корени λ , $A \in R$, вторият от които е отрицателен, т.е. $A < 0$.

Представени са и експлицитни условия за съществуване на осцилиращи и неосцилиращи решения на квазилинейни ФДНУИ-2, свързани с техните коефициенти.

ТЕОРЕМА 4.2.4. Задача (4.2.1) притежава финално положително решение:

(a) във форма на импулсен линеал тогава и само тогава когато е изпълнено

$$r_0 p_0 < 0;$$

(b) във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато

$$(u_0 - u_1)(s_1 - s_0) > 0,$$

$$(p_1(s_1 - s_0) - r_1(u_0 - u_1))^2 \geq 4(u_0 - u_1 + c(s_1 - s_0))(r_0(u_0 - u_1) - p_0(s_1 - s_0)).$$

ТЕОРЕМА 4.2.5. Задача (4.2.1) притежава финално осцилиращо решение:

(a) във форма на импулсен линеал тогава и само тогава когато е изпълнено

$$r_0 p_0 > 0;$$

(b) във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато

$$(u_0 - u_1)(s_1 - s_0) < 0,$$

$$(p_1(s_1 - s_0) - r_1(u_0 - u_1))^2 \leq 4(u_0 - u_1 + c(s_1 - s_0))(r_0(u_0 - u_1) - p_0(s_1 - s_0)).$$

Разгледана е и задача от клас **(L2cL-2c)** с две постоянни закъснения на аргумента $h_1(t) = t - h_1$, $h_2(t) = t - h_2$, $h_1, h_2 \in R^+$, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t - h_1)]'' + qy(t - h_2) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y'(\tau_k) - cy'(\tau_k - h_1)] + Qy(t - h_2) = 0, & k \in N. \\ \Delta[y(\tau_k) - cy(\tau_k - h_1)] + \nu y(\tau_k - h_2) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Основният резултат тук се предоставя от следната теорема:

ТЕОРЕМА 4.2.6. Задача (4.2.5) притежава решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато трансцендентното уравнение

$$A^K - ce^{\frac{-Q}{\nu}h_1} A^{K-1} + \frac{q\nu^2}{Q^2} e^{\frac{-Q}{\nu}h_2} = 0. \quad (4.2.6)$$

притежава реален корен $A \in \mathbb{R}$.

Въз основа на Теорема 4.2.6 са установени са следните резултати за съществуване на осцилиращи и неосцилиращи решения на квазилинейни ФДНУИ-2 :

ТЕОРЕМА 4.2.7. Задача (4.2.5) притежава финално положително решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато уравнението (4.2.6) притежава реален корен $A > 0$, при $\lambda = \frac{-Q}{\nu}$.

ТЕОРЕМА 4.2.8. Задача (4.2.5) притежава финално осцилиращо решение $y(t)$ във форма на импулсна експонента тогава и само тогава когато уравнението (4.2.6) притежава реален корен $A < 0$, при $\lambda = \frac{-Q}{\nu}$.

В параграф 4.3. са установени критерии за осцилиране на решенията на квазилинейни ФДНУИ-2 с непостоянни коефициенти, от клас **(L2L-2)**. Разгледана е задачата от клас **(L2L-2)** с две закъснения на аргумента, от вида

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(h_1(t))]'' + q(t)y(h_2(t)) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N \\ \Delta[y'(\tau_k) - c_{\tau_k} y'(h_1(\tau_k))] + q_{\tau_k} y(h_2(\tau_k)) = 0, & k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k} y(h_1(\tau_k))] = Q_{\tau_k} y(h_2(\tau_k)), & k \in N. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Доказана са следните теореми:

ТЕОРЕМА 4.3.1. Нека хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.3), (H4.1.1), (H2.1.5) са в сила и $0 > c(t) > -1$. Ако $\sum_{t_0 \leq \tau_k < t} q_{\tau_k} (1 + c(h_2(\tau_k))) + \int_{t_0}^t q(s) (1 + c(h_2(s))) ds = \infty$, то всички решения на (4.3.1) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 4.3.2. Нека са в сила хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H4.1.1), (H2.1.6) или (H2.1.7), където $\exists C : C > c(t)$. Нека е изпълнено още и :

$$(1) \quad h_2(t) < h_1(t);$$

$$(2) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t \left(\int_s^t \alpha(u) du + \sum_{h_2(t) \leq \tau_k \leq t} \alpha_{\tau_k} \right) ds > 1,$$

$$\text{където } h(t) = h_1^{-1}(h_2(t)), \alpha(u) = \frac{q(u)}{c(h_1^{-1}(h_2(u)))}, \alpha_k = \frac{q_{\tau_k}}{c(h_1^{-1}(h_2(\tau_k)))}, k \in N;$$

Тогава, всички решения на (4.3.1) са осцилиращи.

ТЕОРЕМА 4.3.3. Ако са в сила хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H4.1.1), (H2.1.6) или (H2.1.7), където $\exists C : C > c(t)$, то всяко неограничено решение на (4.3.1) е осцилиращо.

ТЕОРЕМА 4.3.4. Нека са в сила хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H4.1.1), (H2.1.6) или (H2.1.7), където $\exists C : C > c(t)$. Нека е изпълнено още $h_2(t) < h_1(t)$ и :

$$(1) \exists B > 0 : \alpha(t) = \frac{q(t)}{c(h(t))} \geq B, \quad h(t) := h_1^{-1}(h_2(t)), \quad t \geq t_0, \quad \alpha_k = \frac{q_{\tau_k}}{c(h(\tau_k))}, \quad k \in N;$$

$$(2) \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{\tilde{h}(t) \leq \tau_k \leq t} (1 + \alpha_k) \right) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} (e\sqrt{B}(t - \tilde{h}(t))),$$

където $\tilde{h}(t) : \tilde{h}(t) < t, \tilde{h}(t) \in C^1(R), \tilde{h}'(t) > 0$ и $\tilde{h}(\tilde{h}(t)) = h(t)$.

Тогава, всички ограничени решения на (4.3.1) са осцилиращи.

Комбиниране на последните две теореми ни води до следния резултат :

ТЕОРЕМА 4.3.5. Нека са в сила хипотезите (H), (H2.1.1)-(H2.1.4), (H4.1.1), (H2.1.6) или (H2.1.7), като $\exists C : C > c(t)$. Нека е изпълнено още $h_2(t) < h_1(t)$ и :

$$(1) \exists B > 0 : \alpha(t) = \frac{q(t)}{c(h(t))} \geq B, \quad h(t) := h_1^{-1}(h_2(t)), \quad t \geq t_0, \quad \alpha_k = \frac{q_{\tau_k}}{c(h(\tau_k))}, \quad k \in N;$$

$$(2) \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{\tilde{h}(t) \leq \tau_k \leq t} (1 + \alpha_k) \right) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} (e\sqrt{B}(t - \tilde{h}(t))),$$

Където $\tilde{h}(t) : \tilde{h}(t) < t, \tilde{h}(t) \in C^1(R), \tilde{h}'(t) > 0$ и $\tilde{h}(\tilde{h}(t)) = h(t)$.

Тогава, всички решения на (4.3.1) са осцилиращи.

Като се изключи Параграф 1.2., който припомня някои известни в литературата резултати, всички останали параграфи от Първа до Четвърта глави представят оригиналните научни резултати на автора по темата на дисертационния труд.

Част от резултатите, получени в този труд са докладвани на международните конференции „Applications of Mathematics in Engeneering and Economics”, Созопол –2002г. [52] и 2008г. [47], на първата международната конференция “Applications of Mathematics in Technical and Natural Sciences” [48], а други са публикувани в национални - [46], [53] или международни математически списания - [49] и [64].

ИЗВОДИ

Изучаването на асимптотичното поведение на неосцилиращите решения на функционално-диференциални от неутрален тип уравнения с импулси (ФДНУИ) от първи и втори ред и осцилационните свойства на такива уравнения показва, че те представляват сложен и многообразен обект за изследване. Получаването на резултати и ефективни критерии за осцилиране на решенията е трудоемко, но възможно, благодарение на добро познаване на тяхната природа и структура и на осъзнаване на органическата им връзка със обекти от сродни на тях класове диференциални уравнения. Възможностите за приложението на тези резултати в областта на динамичните системи от много области на познанието е необятно и предоставя на изследователя широко поле за творческа изява.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящият дисертационен труд е посветен на изучаване на осцилационните свойства на решенията на **Функционално-Диференциални от Неутрален тип Уравнения с Импулси (ФДНУИ)**, изследване на условията за съществуване на осцилиращи и неосцилиращи решения, получаване на критерии за осцилиране на всички решения, както и анализиране на асимптотичното поведение на неосцилиращите решения за такива уравнения. Въведена е единна класификация за **Функционално-Диференциални от Неутрален тип Уравнения с Импулси (ФДНУИ)** с линейни и нелинейни компоненти. На основата на тази класификация са направени изследвания в следните класове диференциални уравнения, като са получени следните по-важни резултати :

I. Квазилинейни ФДНУИ от първи ред:

- Въведено е понятието „пулсираща експонента”;
- Дефинирано е пространството $PAC_{\tau}^n(J)$ от по-части непрекъснатите функции;
- Получени са резултати за съществуване, единственост и продължимост на решенията и са намерени условия за експоненциална ограниченост, устойчивост и непрекъсната зависимост от начални данни на тези решения при постоянни отклонения на аргумента.
- Получени са необходими и достатъчни условия за съществуване на неосцилиращи решения на квазилинейни ФДНУИ от първи ред с постоянни коефициенти.
- Изследвано е асимптотичното поведение на неосцилиращите решения на квазилинейни ФДНУИ от първи ред.
- Установени са критерии за осцилиране на всички решения на квазилинейни ФДНУИ от първи ред с постоянни и непостоянни коефициенти.
- Реализиран е метод на сравнителен анализ на осцилиращото (или неосцилиращото) поведение на решенията на квазилинейните ФДНУИ от първи ред.

II. Нелинейни ФДНУИ от първи ред:

- Изследвано е асимптотичното поведение на неосцилиращите решения на нелинейни ФДНУИ от първи ред.
- Установени са критерии за осцилиране на всички решения на нелинейни ФДНУИ от първи ред.
- Реализиран е метод на линеаризацията, чрез който изследването на осцилационните свойства на нелинейни ФДНУИ от първи ред се свежда до изучаване на осцилационните свойства на квазилинейни ФДНУИ от първи ред.

III. Квазилинейни ФДНУИ от втори ред:

- Изследвано е асимптотичното поведение на неосцилиращите решения на квазилинейни ФДНУИ от втори ред.
- Получени са необходими и достатъчни условия за съществуване на неосцилиращи решения на квазилинейни ФДНУИ от втори ред с постоянни коефициенти.
- Получени са необходими и достатъчни условия за съществуване на осцилиращи решения на квазилинейни ФДНУИ от втори ред с постоянни коефициенти.
- Установени са критерии за осцилиране на всички решения на квазилинейни ФДНУИ от втори ред с непостоянни коефициенти.

Получените научни резултати могат да се прилагат за решаване на редица задачи, моделиращи реални процеси и явления, зависещи от своята предистория и подложени на импулсни въздействия във фиксирани моменти от времето. В тази връзка, можем да споменем разгледаните примери в увода.

Да припомним, че в ПРИМЕР 1 от увода е разгледан биологичен вид (напр. бактерии) с численост $x(t)$ в момента време t , който се размножава в постоянна (хранителна)

среда, затворена относно емиграцията и миграцията му. Отбелязано е, че са възможни изменения в числеността, в резултат на импулсни въздействия (импулси), реализирани в определени моменти от време $\tau_k, k \in N$. Функционално-Диференциалното от Неутрален тип Уравнение без импулси, което моделира популационната динамика на разглеждания биологичен вид има вида

$$\dot{x}(t) = x(t) \left[r \left(1 - \frac{x(t-\sigma)}{K} \right) + \frac{\rho \dot{x}(t-h)}{K} \right], t \neq \tau_k. \quad (P1.1)$$

Ако се направи „смяна на променливата”, чрез формулата

$$y(t) = \ln \frac{x(t)}{K},$$

се вижда лесно ([70]), че уравнението (P1.1) се трансформира до уравнението

$$\frac{d}{dt} \left[y(t) - \frac{\rho}{K} (e^{y(t-h)} - 1) \right] + r(e^{y(t-\sigma)} - 1) = 0, t \neq \tau_k.$$

Понеже е естествено да се приеме съществуването на някакъв момент време t_0 , за който да се счита, че $x(t) > 0$, за $t > t_0 - \max\{\sigma, h\}$, то може да се положи

$$c(t) = \frac{\rho(e^{y(t-h)} - 1)}{Ky(t-h)} \quad q(t) = \frac{r(e^{y(t-\sigma)} - 1)}{y(t-\sigma)} = 0, \quad t \neq \tau_k, \quad t \geq t_0,$$

с което, от последното уравнение се получава уравнението

$$[y(t) - c(t)y(t-h)]' + q(t)y(t-\sigma) = 0, \quad t \neq \tau_k, \quad t \geq t_0.$$

При предположение, че популацията изпитва чести „смущения в своята численост”, което може да се моделира с импулсни неутрални условия, то от последното уравнение се получава Функционално-Диференциалното от Неутрален тип Уравнение с Импулси от първи ред

$$\begin{cases} [y(t) - c(t)y(t-h)]' + q(t)y(t-\sigma) = 0, & t \neq \tau_k, \quad t \geq t, k \in N \\ \Delta[y(\tau_k) - c_{\tau_k}y(\tau_k-h)] + q_{\tau_k}y(\tau_k-\sigma) = 0, & k \in N, \end{cases}$$

което моделира популационната динамика на разглеждания биологичен вид. Това уравнение е конкретен представител на типа квазилинейни ФДНУИ от първи ред с непостоянни коефициенти, от клас **(L2L-1)** с две закъснения на аргумента, от вида (2.3.1), които са разгледани в Глава Втора, параграф 2.3. Ако коефициентите $c(t)$, $q(t)$ са константни, то се получават квазилинейни ФДНУИ от първи ред с постоянни коефициенти, от клас **(L2L-1)** с две закъснения на аргумента, от вида (2.4.10). Да отбележим, че за такива уравнения могат да се прилагат резултатите за осцилиране на решенията от Глава Втора, параграф 2.2 или параграф 2.4.

Друг пример, при който могат да се прилагат резултати от дисертационния труд е ПРИМЕР 3 от увода. В него е разгледана техника за тестване на реактивността на сложна инженерна система при условия на земетръсна активност. Системата представлява авто-параметрично махало, закачено за масов-пружинен-успокоител (МПУ). В тази система на махалото е отредено да бъде реална физическа структура, повесено вертикално и поставена да се люлее в лабораторни условия, докато самият МПУ не е реален, а се симулира от числово-програмна схема. Разбира се, числовата и физичната подструктури са свързани посредством задвижващо устройство - електрически задвижван активатор (напр. VCA). (виж фиг. 2 на стр. 8 от увода). Понеже задвижващото устройство произвежда закъснение, обратно индуцираната сила по веригата също закъснява. Разсъжденията в тази посока, без да повтаряме казаното в увода, ни водят до следното Функционално-Диференциално от Неутрален тип Уравнение без импулси от втори ред

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) + m_p\ddot{y}(t-h) = 0, \quad (P3.1)$$

моделиращо динамиката на системата махало-успокоител (демпфер). От гледна точка на теорията на управлението, на Масовия Пружинен Успокоител, може да се помогне да „поеме“ ударите на земетръсната активност, с което да се осигури стабилност на аташиран към него физически обект (да кажем жилищна сграда). Помощта може да се изразява в целево въздействие, чрез специални механизми, върху положението на МПУ с дозирана сила и посока. Това от своя страна може да се моделира с импулсни неутрални условия. Така, (P3.1) придружено от импулсни условия от неутрален характер, ни води до Функционално-Диференциалното от Неутрален тип Уравнение с Импулси от втори ред от вида

$$\begin{cases} [y(t) - cy(t-h)]'' + r_0 y(t) + r_1 y'(t) = 0, & t \neq \tau_k, k \in N, \quad c = -\frac{m_p}{M}, r_0 = \frac{K}{M}, r_1 = \frac{C}{M} \\ \Delta \left[(y(\tau_k) - cy(\tau_k - h))' \right] + s_1 y'(\tau_k) = 0, & k \in N. \\ \Delta [y(\tau_k) - cy(\tau_k - h)] + s_0 y(\tau_k) + u_0 y(\tau_k - h_1) = 0, & k \in N, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

което моделира динамиката на системата махало-успокоител. Това уравнение е конкретен представител на типа квазилинейни ФДНУИ от втори ред с постоянни коефициенти, от клас **(LIL-2)** с едно закъснение на аргумента, от вида (4.2.1), които са разгледани в Глава Четвърта, параграф 4.2. За такива уравнения могат да се прилагат резултатите за осцилиране на решенията от Глава Четвърта, параграф 4.3.

СПИСЪК НА ПУБЛИКАЦИИТЕ

по дисертационния труд

1^A. Donev V.I., *Existence and asymptotic behaviour of positive solutions of a class of neutral impulsive differential equations in special cases*, in: *Proc. 28-th ISS. "Application of Mathematics in Engineering and Economics"*, editors: M.Marinov and G. Venkov, Sozopol, (2002), Bulvest 2000, Sofia, 80-86.

2^A. Grammatikopoulos M.K., Dimitrova M.B., Donev V.I., *Oscillations of first order neutral impulsive differential equations with constant coefficients*, Technical Report, University of Ioannina, Greece, 16 (2007), 183-193.

3^A. Dimitrova M.B., Donev V.I., *Sufficient conditions for oscillation of the solutions of first order neutral delay impulsive differential equations with constant coefficients*, *Nonlinear Oscillations*, 13/1 (2010), 15-29.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Ангелов В., *Неутрални уравнения с полиномни нелинейности, възникващи при предавателни линии*, Годишник на МГУ-София, 46/3 (2003), 1-4.
2. Андронов А., Витт А., Хайкин С., *Теория колебаний*, Москва, ГосФизМатИздЛит, (1959).
3. Анохин А.В., *О линейных импульсных системах для функционально дифференциальных уравнений*, ДАН СССР, 286/5 (1986), 1037–1040.
4. Гургула С.И., Перестюк Н.А., *Прямой метод для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием*, Математ. физика и нелин. механика, 39/5 (1986), 4-9.
5. Ляпунов А.М., *Общая задача об устойчивости движения*, Москва-Ленинград, Гостехиздат, (1935).
6. Мильман В.Д., Мышкис А.Д., *Об устойчивости движения при наличии толчков*, Сиб. Матем. Журнал, 1 (1960), 233-237.
7. Мышкис А.Д., *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Изд. 2-е, Москва, Наука, (1972).
8. Норкин С.Б., *Осциляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, Киев, (1977), 257-263.
9. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Высшая школа, Киев, (1987).
10. Халанай А., Векслер Д., *Качественная теория импульсных систем*, Москва, Мир, (1971).
11. Шевело В.Н., *Осциляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Научная думка, Киев, (1978).
12. Agarwal R., Hristova S., *Strict stability in terms of two measures for impulsive differential equations with “supremum”*, Applicable Analysis, 2011, DOI: 10.1080/00036811.2011.569500, accepted.
13. Ali Z., Taha A., *Bounded oscillations of higher order neutral differential equations with oscillating coefficients*, Appl. Math. e-Notes, 6 (2006), 126-131.
14. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., *I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model*, Comp. Math. With Appl., 43/10-11 (2002), 1203-1218.
15. Anguraj A., Vinodkumar A., *Existence and uniqueness of neutral functional differential equations with random impulses*, Int. J. Nonl. Science, 8/4 (2009), 412-418.
16. Arjunan M., Kavitha V., *Existence results for impulsive neutral functional differential equations with state-dependent delay*, Electr. J. Qualit. Th. Diff. Equations, 26 (2009), 1-13.
17. Bainov D., Dimitrova M., *Oscillatory properties of the solutions of impulsive differential equations with advanced argument*, Tamkang J. Math., 26/4 (1995).
18. Bainov D.D, Dimitrova M.B., *Sufficient conditions for oscillation of the solutions of a class of impulsive differential equations with deviating arguments*, J. Appl. Math., Stochastic Analysis, 9/1 (1996), 33-42.
19. Bainov D.D, Dimitrova M.B., Dishliev A., *Oscillationg solutions of nonlinear impulsive differential equations with deviating argument*, Note di Matematica, 15/1 (1995), 45-54.
20. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillation of the solutions of nonlinear impulsive differential equations of first order with advanced argument*, J. Appl. Anal., 5/2(1999), 261-275.

21. Bainov D.D, Dimitrova M.B., Dishliev A., *Necessary and sufficient conditions for existence of non-oscillatory solutions of a class of impulsive differential equations of second order with retarded argument*, Applicable Analysis, 63 (1996), 287-297.
22. Bainov D.D, Dimitrova M.B., Simeonov P.S., *Sufficient conditions for the oscillation of the solutions of a class of impulsive differential equations with advanced arguments*, Publ. Inst. Math.(Beograd), 59/73 (1996), 39-48.
23. Bainov D.D., Domshlak Yu., Simeonov P.S., *Sturmian comparison theory for impulsive differential inequalities and equations*, Arhiv der Mathematik, 67(1) (1996), 35-49.
24. Bainov D., Hristova S., *Practical Stability in terms of two measures for impulsive differential equations with "supremum"*, Communications in Applied Analysis, 15/1 (2011), 69–88.
25. Bainov D.D. Mishev D.P., *Oscillation theory for neutral differential equations with delay*, Adam Hilger, New York, (1991).
26. Bainov D.D., Myshkis A.D., Zachariev A.I., *Oscillatory properties of the solutions of a class of neutral type integro-differential equations*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 12/4 (1984), 337-342.
27. Bainov D.D., Petrov V., Projcheva V., *Oscillations of neutral differential equations with maxima*, Revista Math., 8/1 (1995), 171-180.
28. Bainov D.D., Simeonov P.S., *Systems with impulse effect: Stability, Theory and Applications*, Ellis Horwood Ltd, Chichester, (1989).
29. Bainov D.D., Simeonov P.S., *Impulsive Differential Equations: Periodic solutions and Applications*, Longman, Harlow, (1993).
30. Bainov D.D., Simeonov P.S., *Oscillation Theory of Impulsive Differential Equations: Periodic solutions and Applications*, International Publications, Orlando, Florida, (1998).
31. Bainov D., Stamova I., *Uniform asymptotic stability of impulsive differential-difference equations of neutral type by Lyapunov's direct method*, J. Comp.Appl.Math., 62(1995), 359-369.
32. Barton D. A. W., Krauskopf B., Wilson R.E., *Homoclinic snaking in a neutral delay model of a transmission line oscillator*, Nonlinearity, 20/4 (2006), 809-830.
33. Benchohra M., Ouahab A., *Impulsive neutral functional differential inclusions with variable times*, , Electronic J. Diff. Equat., 67 (2003), 1-12.
34. Berezansky L., Braverman E., *Oscillation criteria for a linear neutral differential equation*, Math. Anal. Appl., 286 (2003), 601-617.
35. Berezansky L., Braverman E., *Exponential boundedness of solutions for impulsive delay differential equations*, Appl. Math. Letters, 9/6 (1996), 91-95.
36. Berezansky L., Braverman E., *Linearized oscillation theory for a nonlinear delay impulsive equations*, J. Comp. Appl. Math., 161 (2003), 477-495.
37. Blakely J.N., Corron N.J., *Experimental observation of delay-induced radio frequency chaos in a transmission line oscillator*, Chaos, 14/4 (2004), 1035–1041.
38. Brayton R., *Nonlinear oscillation in a distributed network*, Quart. Appl. Math., 24/4 (1967), 289-301.
39. Brayton R.K. , Willoughby R.A. , *On the numerical integration of a symmetric system of difference-differential equations of neutral type*, J. Math.Anal. Appl., 18 (1967), 182-189.
40. Candan T., Dahiya R., *Oscillation of mixed neutral differential equations with forcing term*, Proc. 4-th Int.Conf. dynam. systems and diff. equat., Wilmington,USA, (2002) 167-172.

41. Chen M., Xu Z., *Interval oscillation of second-order Emden-Fowler neutral delay differential equations*, Electronic J. of Diff. Equations, 58 (2007), 1-9.
42. Coppel W.A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Boston, Heat and Company, (1965).
43. Covachev V., Covacheva Z., Agca H., Al-Zahrani E., *Almost periodic solutions of neutral impulsive systems with periodic time-dependent perturbed delays*, Cenral Eur. J. Math., 3 (2003), 292-314.
44. Das P., Mishra B., Dash C., *Oscillation theorems for neutral delay differential equations of odd order*, Bull. Inst. Math. Academica Sinica, 4/1 (2006), 557-568.
45. Dimitrova M.B., *Criteria for oscillation of impulsive differential equations of first order with deviating arguments*, Kyungpook Math.J., 40/1 (2000), 29-37.
46. Dimitrova M.B., Donev V.I., *Oscillatory properties of the solutions of impulsive differential equations with deviating arguments*, Announcements of the Union of Scientists - Rousse, 4 (2003), 88-93.
47. Dimitrova M.B., Donev V.I., *Oscillation criteria in first order neutral delay impulsive differential equations with constant coefficient*, in: *Appl. of Math. In Engin. and Econ.*, edited by M.D. Todorov, American Institute of Physics, NY Melville, CP1067, (2008), 361-372
48. Dimitrova M.B., Donev V.I., *Oscillatory properties of first order neutral delay impulsive differential equations with constant coefficients*, in: *Appl.Math. In Techn. and Nat.Stud.*, edited by M.D. Todorov, American Institute of Physics, NY Melville,, CP1186 (2009), 259-270.
49. Dimitrova M.B., Donev V.I., *Sufficient conditions for oscillation of the solutions of first order neutral delay impulsive differential equations with constant coefficients*, Nonlinear Oscillations, 13/1 (2010), 15-29.
50. Dimitrova M.B., Mishev D., *Oscillation of the solutions of neutral impulsive differential-difference equations of first order*, Electronic J. of Diff. Equations, 16 (2005), 1-11.
51. Djurina J., Mihalikova B., *Oscillation criteria for second order neutral differential equations*, Math.Boh., 125/2 (2000), 145-153.
52. Donev V.I., *Existence and asymptotic behaviour of positive solutions of a class of neutral impulsive differential equations in special cases*, in: *Proc. 28 Int. Conf. on Appl. of Math. in Engin. and Econ.*, Sozopol, (2002), Bulvest 2000, Sofia, 2003 .
53. Donev V.I., *On oscillation and asymptotic behaviour of the solutions of first order special case neutral impulsive differential equations with forced and without forced term*, Announcements of the Union of Scientists – Rousse, 4 (2003), 94-99.
54. Elmetwaly M.E., Taher S.H. , Samir H.S., *Oscillation criteria for first-order nonlinear neutral delay differential equations*, Electronic J. of Diff. Equations, 134 (2005), 1-18.
55. Erbe L.H., Kong Q., Zhang B.G., *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*, Marcel Decker Inc., USA, (1995).
56. Fan X., Li Y., *Positive periodic solutions of neutral functional differential equations with a parameter and impulse*, Electronic J. of Diff. Equations, 38 (2008), 1-8.
57. Fite W.B., *Properties of the solutions of certain functional differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 22/3 (1921), 311-319.
58. Fite W.B., *Concerning the zeros of the solution of certain differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 19 (1918), 341-352.
59. Frank T.D., *Stationary distributions of stochastic processes described by a linear neutral delay differential equation*, J. Phys. A: Math. Gen., 38 (2005), L485-L490.

60. Gopalsamy K., Zhang B.G., *On delay Differential Equations with impulses*, J. Math. Anal. Appl., 139/1 (1989), 110-122.
61. Grace S.R., Lalli B.S., *On the oscillation of certain neutral differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 36 (1993), 303-310.
62. Graef J., Yang B., Zang B., *Existence of nonoscillatory and oscillatory solutions of neutral differential equations with positive and negative coefficients*, Math. Boh., 124/1(1999), 87-102.
63. Graef J.R., Shen J.H., Stavroulakis I.P., *Oscillation of impulsive neutral differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 268 (2002), 310-333.
64. Grammatikopoulos M.K., Dimitrova M.B., Donev V.I., *Oscillations of first order neutral impulsive differential equations with constant coefficients*, Technical Report, University of Ioannina, Greece, 16 (2007), 183-193.
65. Grammatikopoulos M.K., Grove E.A., Ladas G., *Oscillation and Asymptotic Behaviour of Neutral Differential Equations with Deviating Arguments*, Sc. Publ. Inc., Great Britain, (1986).
66. Grammatikopoulos M.K., Ladas G., Meimaridou A., *Oscillation and asymptotic behaviour of higher order neutral differential equations with variable coefficients*, Chin. Ann. of Math., 9B/3 (1988), 322-338.
67. Grammatikopoulos M.K., Stavroulakis I.P., *Necessary and sufficient conditions for oscillation of neutral differential equations with deviating arguments*, J. London Math. Soc., 41/2 (1990), 244-260.
68. Guan K., Shen J., *Oscillation criteria for a first-order impulsive neutral differential equation of Euler form*, Comp. and Math. with Appl., 58 (2009), 670-677.
69. Gourley S., Kuang Y., *Dynamics of a neutral delay equation for an insect population with long larval and short adult phases*, J. Diff. Equations, 246 (2009), 4653-4669.
70. Gyori I., Ladas G., *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
71. Hristova S.G., *Integral stability in terms of two measures for impulsive functional differential equations*, Math. Comput. Modelling, 51/1-2 (2010), 100-108.
72. Hristova S., *Razumikhin method and cone valued Lyapunov functions for impulsive differential equations with 'supremum'*, Intern. J. Dynam. Syst. Diff. Eq., 2/3-4 (2009), 223 - 236.
73. Hristova S., *Stability on a cone in terms of two measures for impulsive differential equations with "supremum"*, Applied Mathematics Letters, 23 (2010) 508-511.
74. Hristova S., *Stability in terms of two measures for impulsive differential equations with "supremum"*, Nonlinear Studies, 17(4) (2010).
75. Kneser A., *Untersuchungen uber die reelen nullstellen der integrale linearer differentialgleichungen*, Math. Ann., 42 (1893), 409-435.
76. Krasovskii N.N., *On the Application of The Second Method of Lyapunov for Equations with Time Delays*, Prikl. Mat. Mekh., 20 (1956), 315-327.
77. Kuang Y., *On neutral-delay two species Lotka-Volterra competitive systems*, J. Austr. Math. Sosc., B32 (1991), 311-326.
78. Kusano T. Onose H., *Oscillations of functional differential equations with deviating arguments*, Springer Verlag, Pasific J. Math., 63 (1976), 185-192.
79. Kyrychko Y.N., Blyuss K.B., Gonzales-Buelga A., Hogan S.J., Wag D.J., *Stability switches in a neutral delay differential equation with application to real-time dynamic substructuring*,

- Appl. Mech. and Materials, 5-6 (2006), 79-84.
80. Ladde G.S., Lakshmikantham V., Zhang B.G., *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating arguments*, Marcel Decker Inc. , USA, (1987).
 81. Lakrib M., *Existence of solutions for impulsive neutral functional differential equations with multiple delays*, Electronic J. of Diff. Equations, 36 (2008), 1-7.
 82. Li W., Yan J., *Oscillation of first-order neutral differential equations with positive and negative coefficients*, Collect. Math., 50/2 (1999), 199-209.
 83. Li Y., *Periodic solution of a neutral delay competition model* , Acta Math. Appl. Sin., 15/3 (1999), 112-125.
 84. Liu X., Shen J., *Asymptotic behaviour of solutions of impulsive neutral differential equations*, Appl. Math. Letters, 12 (1999), 51-58.
 85. Lotka A.J., *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins, Baltimore, 1925.
 86. Lu S., *New result on the existence of positive periodic solutions to neutral population model with multiple delays*, Int. J. Cont. Math. Sc., 16/2 (2007), 773-782.
 87. Luo Z., Shen J., *Oscillation for solutions of nonlinear neutral differential equations with impulses*, Comp.&Math with Appl., 42 (2001), 1285-1292.
 88. Milne W.E., *A theorem on oscillation*, Bull. Amer. Math., Soc., 28 (1922), 102-104.
 89. Minorsky N., *Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions*, J. Appl. Mech., 9 (1942), 65-71.
 90. Osgood W.F., *On a theorem of oscillation*, Bull. Amer. Math. Soc., 25 (1919), 216-221.
 91. Padhi S., *Oscillation and asymptotic behaviour of solutions of second order neutral differential equations with positive and negative coefficients*, Fasc.Math., 38(2007), 105-114.
 92. Pandit S.G., Deo S.G., *Differential systems involving impulses*, Springer Verlag, Berlin-New York, (1982).
 93. Parhi N., Rath R., *On oscillation and asymptotic behavior of solutions of forced first-order neutral differential equations*, Proc. Indian Acad. Sci., 111/3 (2001), 337-350.
 94. Peng M., Agarval R.P., *Oscillation theorems of second order nonlinear neutral differential equations under impulsive perturbations*, Indian J. Pure Appl. Math., 33/7, 2002, 1017-1029.
 95. Philos C., Purnaras I., *On periodic linear neutral delay differential and difference equations*, Electronic J. of Diff. Equations, 110 (2006), 1-25.
 96. Pielou E.C., *Mathematical ecology*, Wiley Interscience, New York, (1977).
 97. Rab M., *Kriterien fur die Oscillation der Losungen der Differentialgleichungen*, Casop. Pestov. Mat., 84/3 (1959), 335-370.
 98. Raffoul Y., *Periodic solutions for neutral nonlinear differential equations with functional delay*, Electronic J. of Diff. Equations, 102 (2003), 1-7.
 99. Rakkiappan R., Balasubramaniam P., *New global exponential stability results for neutral type neural networks with distributed time delays*, Neurocomputing, 71 (2008), 1039-1045.
 100. Rath R., Misra N., Mishra P., Padhy L., *Non-oscillatory behaviour of higher order functional differential equations of neutral type*, Electronic J. Diff. Equat., 163 (2007), 1-14.
 101. Shen J., Liu Y., Li J., *Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear neutral differential equations with impulses*, J. Math. Anal. Appl., 332 (2007), 179-189.

102. Shevyelo V.N., *Problems, methods and fundamental results in the theory of oscillation of solutions of nonlinear non-autonomous ordinary differential equations*, Proceedings of 2-nd all-union conference on theoretical and applied mechanics, Moskow, (1965), 142-157.
103. Slemrod M., Infante E.F., *Asymptotic stability criteria for linear system of difference-differential equations of neutral type and their discrete analogues*, J. Math. Anal. Appl., 38 (1972), 388-415.
104. Smith F.E., *Population dynamics in Daphnia magna*, Ecology, 44 (1963), 651-653.
105. Snezhana Hristova, Kremena Stefanova, *Practical stability of impulsive differential equations with „supremum“ by integral inequalities*, European Journal of pure and applied mathematics (to appear)
106. Stamova I.M., Stamov G.T., *Lyapunov–Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics*, J. Comp. Appl. Math., 130 (2001), 163-171.
107. Stamov G.T., Stamova I.M., *Integral Manifold for Impulsive Differential - Difference Equations*, Electronic Modeling, 27/4 (2005), 115-121.
108. Stamov G.T., Stamova I.M., *Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations*, JMAA, 258 (2001), 371-379.
109. Stamova I.M., *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, Walter de Gruyter, (2009).
110. Stamov, G.T., *Lyapunov's function and existence of integral manifolds for impulsive differential systems with time varying delay*, MAA, 16/3 (2009), 291-298.
111. Sturm C., *Sur les equations differentielles lineares du second ordre*, J. Math. Pures Appl., 1 (1836), 106-186.
112. Tang X. , *Asymptotic behaviour of solutions of second-order nonlinear delay differential equations with impulses*, J. Comput. Appl. Math., 233/9 (2010), 2105-2111.
113. Verhulst, P., *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Correspondance mathématique et physique, 10 (1838), 113–121.
114. Volterra V., *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* , Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei, 2 (1926), 31-113.
115. Wang Q., Dai B., *Existence of a positive periodic solutions for a neutral population model with delays and impulse*, Nonlin. Analysis, 69 (2008), 3919-3930.
116. Willett D., *Classification on second order linear differential equations with respect to oscillation*, Adv. Math., 3 (1969), 594-623.
117. Wong J.S.W., *Second order nonlinear oscillation with retarded arguments*, Proc. Conf., Ordinary differential equations, New York, (1972), 581-596.
118. Xu R., Xia Y., *A note on the oscillation of second-order nonlinear neutral functional differential equations*, Int. J. Contemp. Math. Sc., 29/3 (2008), 1441-1450.
119. Yilmaz Y., Zafer A., *Bounded oscillations of nonlinear neutral differential equations of arbitrary order*, Czech. Math. J., 126/51 (2001), 185-195.
120. Zhang Y., Zhao A., Yan J., *Oscillation criteria for Impulsive Delay Differential Equations*, J.Math.Anal.Appl. 205 (1997), 461-470.