# С Т А Н О В И Щ Е

от доц. д-р Маргарита Димитрова, ТУ-София

върху дисертационен труд на тема:
**"Върху качествената теория на импулсни диференциални уравнения и приложения"**
с автор гл. ас. Катя Георгиева Дишлиева,
за придобиване на образователната и научна степен "доктор"
по научна специалност "Диференциални уравнения"

Научен ръководител на дисертантката е доц. дмн Иванка Стамова от Бургаски Свободен Университет – утвърден учен в областта на качествената теория на импулсните диференциални уравнения, отскоро член на редакционната колегия на едно от най-престижните научни списания по математически анализ и приложения: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* с импакт фактор 1,295. Дисертационният труд се състои от 141 стандартни страници. Библиографията съдържа 241 заглавия. Материалът е разпределен в увод, пет глави и заключение.

По темата на дисертационния труд кандидатката участва с три публикации. Двете са публикувани в международното списание *International Journal of Pure and Applied Mathematics* в съавторство с А. Дишлиев, а третата статия е самостоятелна и е публикувана в списанието *Acta Mathematica Scientia* от издателството *Elsevier*. Последното списание има импакт фактор 0,328. Считам, че представените публикации напълно удовлетворяват изискванията за придобиване на образователната и научна степен "доктор". На базата на тези научни статии са изследванията в първа, трета и четвърта глава. Резултатите в останалите две глави се публикуват за първи път тук.

В дисертационния труд се въвеждат някои нови класове диференциални уравнения с импулси. Изследвани са специфични, характерни само за въведените класове уравнения, степени на гладкост на решенията им в ограничени дефиниционни интервали. Изследвани са аналогични специфични устойчивости на решенията на същите уравнения. Като правило, получените резултати са пренесени върху примери от популационната динамика и фармакокинетиката. Уникалността на изследванията на авторката се състои във факта, че "малките" смущения са съответно:

- в началното условие и импулсните моменти (глава 1);
- в началното условие и импулсните функции (глава 2 и глава 5);
- в началното условие и импулсните множества (глава 3 и глава 4).

Както е добре известно, импулсните моменти, импулсните функции и импулсните множества са характерни само за импулсните диференциални уравнения. Поради тази причина, резултатите, постигнати в дисертацията, не предизвикват съмнение в тяхната оригиналност.

Основният математически апарат на изследване са средствата на реалния математически анализ и някои основни интегрални и диференциални неравенства. Авторката следва класическия подход при описание и изследване на процесите, изменящи "рязко" своето състояние. Началото на този подход е поставено от В. Мильман и А. Мышкис. В България понастоящем тези изследвания се развиват от ученици на проф. Д. Байнов, към които можем да причислим и гл. ас. Катя Дишлиева. Другият основен математически апарат за описание и изучаване на импулсните въздействия върху "плавно" развиващи се процеси са обобщените функции (от типа на Дирак). При задачите, които се изучават в това направление от теорията на импулсните диференциални уравнения, моментите на импулсно въздействие са предварително фиксирани. В този случай използваният подход за описание на „скокообразни" процеси не е подходящ за моделиращите системи, при които импулсните моменти се определят динамично, в зависимост от стойностите на решението във всеки момент от дефиниционното му множество. Точно такива са и моделните примери, с които се “проверява и илюстрира” теорията, развита в дисертацията. По-нататък по-подробно ще се спра на съществените модели в изследванията на дисертантката.

В първа глава се изучава модел от фармакокинетиката. Много често поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта се извършва чрез дискретно във времето импулсно подаване на лекарството. При този тип лечение лекуващият лекар може да манипулира с два фармакокинетични параметъра: размер на еднократните дози на лекарството и дължините на дозовите интервали, т.е.времената между две съседни импулсни лекарствени интервенции. В случаите, когато дозовите интервали са по-кратки от времето, което е необходимо за пълното елиминиране на лекарството от организма, то започва да се натрупва. Тази кумулация е полезна за лечението на пациента, ако се поддържа в интервал, определен от минимална и максимална плазмени граници, наричани още терапевтични граници (терапевтичен прозорец) на концентрацията на лекарството. Фармакокинетичният модел на този тип лечение се състои в избора на подходяща дозова схема на лечението, гарантираща поддържането на концентрацията на лекарството в рамките на терапевтичния прозорец. Моделирането на описания процес на лечение се осъществява чрез диференциални уравнения с импулси. В тази глава е въведена и изучена непрекъсната зависимост на решението на начални задачи за такива уравнения относно началното условие и моментите на импулси. Резултатите са приложени върху модел от фармакокинетиката. Основният извод за приложенията е, че ако дискретната лекарствена интервенция не се различава по обем, а само по моментите на интервенция и освен това, ако дозовите интервали са приблизително равни, то концентрацията на лекарството в кръвта на пациента е приблизително една и съща.

Във втората глава на дисертацията като илюстриращ пример е разгледано динамичното развитие на изолирана популация, подложена на външни импулсни въздействия. Обикновено тези въздействия се изразяват в отнемането или (по-рядко) в прибавянето на определени количества биомаса от изследваната популация. Предполага се, че въздействията се извършват моментно, под формата на импулси. Един от възможните математически модели на такива процеси е импулсното логистично уравнение. Намерени са достатъчни условия, при които решенията на моделиращите импулсни уравнения зависят непрекъснато и са диференцируеми относно големините на импулсите. С други думи решенията притежават първи ред на гладкост относно импулсните въздействия. Преди няколко дни ми беше предоставена информация, че резултатите от тази глава са приети за публикуване в реномираното математическо списание: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* с внушителния импакт фактор 2,381.

Резултатите от трета глава са приложени върху динамиката на развитие на изолирани популации. Оказва се, че те се развиват оптимално (техният растеж е сравнително по-интензивен), ако количеството на биомасата им се поддържа в определени граници. Това е възможно да се осъществи чрез външни, дискретни въздействия, които се състоят в отнемане или прибавяне на биомаса. Естествено е да се предполага, че импулсните въздействия се осъществяват при достигане на количеството на биомасата до предварително фиксирани граници (бариерни криви), ограничаващи оптималните количества на биомасата. Може да се приеме, че в общия случай тези гранични количества не са фиксирани, а зависят от времето. Адекватен математически модел на такива процеси е импулсното уравнение на Gompertz, за което е изследван въпросът за непрекъсната зависимост на решението на разглежданото импулсно уравнение относно така наречените бариерни криви. Тези криви ограничават областта на оптимално развитие на изолираната популация, т.е. чрез импулсните въздействия се цели биомасата на популацията да бъде в оптимални граници. При “незначителни” промени в количеството на биомасата в началния момент и в стойностите на долната и горна бариерни криви се получава нов импулсен модел, който се нарича смутен. Основният резултат в главата (теорема 3.3) може да се преформулира на "езика на разглеждания модел" по следния начин: Количествата на биомасите в регулярния модел и в смутения модел, изчислени за един и същи момент, няма да се различават съществено, ако периодът от време, в който се извършват замерванията, е ограничен. Такава „близост" между количествата на биомасите на двете популации не съществува за сравнително „малки" интервали от време, разположени между съответните за двата модела моменти на импулсни въздействия.

В следващата глава е изследвано Хаусдорфовото разстояние между траекториите на регулярния и смутения импулсни модели на съобщество от тип жертва-хищник. Изучен е импулсен аналог на опростения класически нелинеен автономен модел на Лотка-Волтера. Импулсните моменти са нефиксирани. Те се осъществяват, когато траекторията на разглежданата начална задача пресича така нареченото „импулсно множество", разположено във фазовото пространство на системата. Предполага се, че импулсното множество е гладка повърхнина. В &4.1 за този тип задачи е въведено понятието орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост по отношение на началната точка и импулсните смущения. Намерени са достатъчни условия, при които решенията притежават това свойство. В &4.2 получените теоретични резултати са приложени за импулсен математически модел на Лотка-Волтера. Тук трябва да се обоснове необходимостта от използването на Хаусдорфовата метрика, въпрос, който не е изяснен в дисертацията. При импулсните диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсно въздействие, като правило, моментите на импулси при изходната (регулярна) задача и при смутената задача (независимо върху кои параметри се осъществяват смущенията) се различават макар и "незначително". Това означава, че равномерното разтояние между интегралните им криви (или траектории) не е "малко" в интервалите, разположени между моментите на съответните им импулси. Разстоянието между тези интегрални криви (или траектории) е от порядъка на големините на импулсните въздействия, които може да са сравнително "големи". С други думи, като цяло равномерното разстояние е сравнително голямо при сравнително малки смущения на параметрите на изходната система. Това означава, че равномерното разстояние не е подходящо при изследване на въпросите за непрекъсната зависимост и устойчивост на решенията на импулсни системи диференциални уравнения с нефиксирани моменти на въздействия. В почти всички изследвания до сега за споменатия тип уравнения допълнително се уточняват интервалите на "близост" между решенията на изходната и смутената задача. Това обстоятелство усложнява значително описанието на множествата на валидност на равномерната метрика. Тъкмо обратното, по-грубото (в сравнение с равномерното) Хаусдорфово разстояние е подходящо за установяване на близост между решенията на изходната и смутената системи в целия дефиниционен интервал на решенията, нещо повече, дефиниционните интервали на сравняваните решения е възможно да не съвпадат напълно. Възниква и въпроса: защо само в две работи до сега (с автори B. Ahmad и S. Sivasundaram) се разглежда въпросната Хаусдорфова метрика. Според мен този факт се дължи на изключително сложната техника на изследванията при тази метрика, която авторката е усвоила, а в по-голямата си част и въвела.

Последната глава 5 е интересна с това, че в нея е намерена връзка между качествата на решенията на система без импулси и качествата на решенията на съответната смутена система в термините на Хаусдорфовата метрика. Въведено е понятието гравитираща система диференциални уравнения, което най-опростено означава, че Хаусдорфовото разстояние между траекториите на решенията на тази система (с различни начални точки) не надвишава с коефициент на пропорционалност Евклидовото разстояние между тези траектории. Този коефициент на пропорционалност се нарича гравитиращ коефициент и е не по-малък от единица. Основният резултат в главата е свързан с намирането на достатъчни условия, при които ако системата е гравитираща, то съответната система с импулси е Хаусдорфово устойчива относно смущенията в импулсните множества, разположени във фазовото пространство на системата. Ще отбележа, че в дисертационния труд е разгледан случаят, когато импулсните множества са части от хиперравнини. Възможно е получените твърдения да са валидни и за импулсни множества, съвпадащи с части от повърхнини с гладкост от по-висок ред. Вероятно, съответните резултати ще са доста комплицирани. Надявам се това да се постигне в по-нататъшни изследвания на авторката.

Несъмнено, постигнатото в дисертационния труд и переспективите за по-нататъшни изследвания представляват сериозен интерес за учените в областта на импулсните диференциални уравнения. Препоръчвам на гл. ас. К. Дишлиева да добави към рецензирания труд една или две въвеждащи глави от фундаментална теория на импулсните уравнения, включващи основополагащи изследвания върху ефекта ”биене”, съществуване, продължимост и единственост на решенията на диференциалните уравнения с променливи (нефиксирани) моменти на импулсни въздействия. Новополучената работа би удовлетворявала изискванията за монографичен труд на голяма част от сериозните издателства на научна литература у нас и в чужбина.

В заключение категорично ще заявя, че становището ми, относно придобиването на образователната и научна степен “доктор” по научната специалност “Диференциални уравнения” от гл. ас. Катя Георгиева Дишлиева, е **положително**.

26. 06. 2011 г.

Член на научното жури:
доц. д-р М. Димитрова