РЕЦЕНЗИЯ

от

доцент д-р Димитър Ангелов Колев

върху дисертационния труд

на

Катя Георгиева Дишлиева

за придобиване на образователна и научна степен „доктор”

по научна специалност диференциални уравнения

Настоящият дисертационен труд е посветен на Качествена теория на импулсни ОДУ. Написани са 141 страници, които са включени в 13 броя параграфи, разпределени в 5 глави. Използвани са 241 броя литературни източници и 3 броя публикации на автора, свързани с дисертационния труд.

1. Актуалност на темата. Разглежданите въпроси в дисертационния труд се отнасят към качествената теория на някои видове импулсни диференциални уравнения (ИДУ) и приложенията им в различни математически модели от популационната динамика и фармакокинетиката. Този клас уравнения е подходящ за моделиране на процеси и явления, които по време на своето еволюционно развитие са подложени на кратковременни външни въздействия. Предполага се, че времетраенето на въздействията е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процесите или явленията, които импулсните уравнения описват. Поради това може да се приеме, че въздействията са „мигновени” и се извършват под формата на импулси. Изучаването на „скокообразно” развиващи се динамични състояния е предмет и на други науки, като механика, икономика, теория на управлението и др.

Най-общо, ИУя имат формата

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

където функцията f е непрекъсната в някаква област на променливите t, x. Освен това, съществува условие за импулсно въздействие върху решението. В най-простия случай импулсните моменти са предварително фиксирани. В по-сложния и по-общ случай импулсните моменти са последователни решения на уравнение (система уравнения) от вида

$$g(t, x(t)) = 0 \tag{2}$$

където функцията g е дефинирана и непрекъсната в разширеното фазово (или само във фазовото) пространство на системата ДУ, а $x=x(t)$ е решение на същата система. Обикновено съществува импулсна функция, която определя големината и посоката на импулсното въздействие

$$x(t_{imp}+0) = I(x(t_{imp})) \tag{3}$$

където функцията I е дефинирана и непрекъсната във фазовото пространство на разглежданата импулсна система, а t_{imp} е решение на уравнението (2).

Този раздел от качествената теория на ДУя се развива сравнително бързо през последните десетилетия. Основополагащи са трудовете на В. Мильман, А. Мышкис, А. Самойленко, Н. Перестюк, Друми Байнов, В. Плотников, М. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas и т. н.

Импулсните диференциални уравнения ИДУ се разделят на следните класове: 1) с фиксирани моменти на импулсно въздействие ([36], [37], [38], [94], [131] и др.); 2) с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които интегралната крива на уравнението среща предварително зададени множества, разположени в разширеното фазово пространство. Най-често тези множества са непресичащи се хиперповърхнини ([64], [71], [93], [95], [97], [129], [130]); 3) с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които траекторията на уравнението среща предварително зададени множества, разположени във фазово пространство [48]; 4) с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които решението минимизира даден функционал [67]; 5) с импулсни моменти, които имат случаен характер и удовлетворяват определен закон на разпределение. Решенията на съответните начални задачи за ИДУ са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род, в които решенията са непрекъснати отляво. Трябва да отбележим, че голяма част от известните класически резултати, отнасящи се за диференциални уравнения без импулси ([4], [26], [140] и [231]), са преформулирани и обобщени за някои от споменатите по-горе класове ИДУя.

2. Основни цели на дисертационния труд:

- Въвеждането на нови класове ИДУ, описващи процеси и явления от физиката, химията, екологията, биологията, популационната динамика, фармакокинетиката, технологиите, финансите и икономиката.
- Изучаването на специфични и характерни само за тях непрекъснати зависимости, диференцируемост и устойчивост на решенията. Във всички разглеждани импулсни уравнения, смущенията са в импулсните множества (в частност импулсните моменти) или в самите импулсни функции (големините на импулсните „скокове”).
- Приложение на получените резултати върху известни математически модели от популационната динамика и фармакокинетиката.

3. Структура и съдържание на дисертацията.

Глава 1 е посветена на непрекъснатата зависимост на решенията на ДУ с фиксирани импулси относно началното условие и импулсните моменти. Освен това е разгледана и устойчивост на ИДУя. Основен обект на изследване в тази глава са нелинейни системи ОДУя с фиксирани моменти на импулсни въздействия. За този тип уравнения са изучени понятията непрекъсната зависимост и устойчивост относно началното условие и импулсните моменти. Показани са достатъчните условия, при които решенията на тези системи притежават споменатите свойства. Резултатите са приложени върху импулсен математически модел от фармакокинетиката.

Разгледана е следната начална задача за ИДУя:

(1.1)

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), \quad t \quad t_i,$$

(1.2)

$$x\left(t_i + 0\right) = x\left(t_i\right) + I_i\left(x\left(t_i\right)\right), \; i=1, 2, \ldots,$$

(1.3)

$$x\left(t_0\right) = x_0,$$

Предполага се, че са удовлетворени условията H1.1 – H1.6, т. е. за $f(t,x)$ имаме непрекъснатост, равномерна ограниченост, хьолдеровост по x, редицата от моментите на импулсно въздействие е разходяща, а импулсните функции I_i са непрекъснати.

Основният резултат тук е Теорема 1.2, в която се твърди, че ако условията H1.1 – H1.6 са изпълнени, тогава решението на задачата *(1.1) - (1.3)* зависи непрекъснато от началното условие и импулсните моменти

$$t_1, t_2, \ldots$$

Въведена е интересната дефиниция за гравитираща система (без импулси) - Дефиниция 1.3. Към условията H1.1 - H1.5 е добавено условието H1.7 и че системата 1.1 е гравитираща. Тогава е доказано, че решението на *(1.1), (1.2), (1.3)* е устойчиво по отношение на началната точка (t_0,x_0) и импулсните моменти t_i (Теорема 1.3). Аналогичен резултат имаме и в Теорема 1.4.

Тези резултати, се оказва, че имат интересно приложение в медицината и фармакокинетиката. Редица болестни състояния се лекуват чрез осъществяване и поддържане на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта (плазмата) на пациента. Поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта чрез дискретно във времето импулсно подаване на лекарството е интересен пример от медицината. Естествено е да се предполага, че обемът на дискретно подаденото лекарствено средство е ограничен отдолу, т.е. съществува минимално количество от лекарството, което може да се приеме еднократно. При този тип лечение лекуващият лекар може да манипулира с два фармакокинетични параметъра: размер на еднократната доза на лекарството D_i и дължина на дозовия интервал. В случаите, когато дозовите интервали са по-кратки от времето, необходимо за пълното елиминиране на лекарството от организма, лекарственото средство започва да се натрупва (кумулира). Тази кумулация е полезна за лечението на пациента, ако се поддържа в интервал, определен от минимална и максимална плазмени граници, наричани още терапевтични граници (терапевтичен прозорец) на концентрацията на лекарството. Фармакокинетичният модел на този тип лечение се състои в избора на подходяща дозова схема на лечението, гарантираща поддържането на концентрацията на лекарството в рамките на терапевтичния прозорец. По-нататък са направени перфектни разсъждения относно ефектите при лекуване на заболявания, умело използвайки получените резултати.

В **Глава 2** е разгледан въпроса за непрекъсната зависимост и диференцируемост на решенията на ДУя с фиксирани моменти на импулсите относно началното условие и импулсните смущения зависещи от реални параметри.

Основен обект на изследване в тази глава е начална задача за нелинейни системи диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие. В първия параграф на главата са намерени достатъчни условия, при които решенията на разглежданата система са непрекъснато зависими по отношение на импулсните смущения. Резултатите, които се отнасят за непрекъсната зависимост относно големините на импулсните пертурбации, са нови. Върху диференцируемост на решенията на импулсни диференциални уравнения относно началното условие и параметър са посветени работите [114] и [203]. В следващия параграф е разгледан въпросът за диференцируемост на решенията на описаната по-горе задача относно импулсните пертурбации. Непрекъснатата зависимост и диференцируемост са от първостепенна важност за решенията на системите ДУя с импулси и затова се отделя специално внимание на тези проблеми. Получените резултати са приложени върху импулсен логистичен модел от популационната динамика. Импулсният логистичени модел от третия параграф на същата глава е обект на редица научни интереси, списъкът на които (освен споменатите резултати в увода) можем да допълним още с работите [98], [125], [128], [140], [172], [218] и [238]. Тук са намерени интересни критерии за диференцируемост на решението на началната задача (2.1), (2.2), (2.3) по отношение на началната точка $I_0(\mu_0)$ и импулсните функции $I_j,\ j=1,2,...$

По-нататък (Теорема 2.2), е показано, че ако имаме условия, подобни на H1.1 — H1.5 то тогава решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) зависи непрекъснато от началната точка $I_0(\mu_0)$ и импулсните функции I_j, $j = 1, 2, \ldots$

Намерени са достатъчни условия за диференцируемост на решението на началната задача (2.1), (2.2), (2.3) по отношение на началната точка $I_0(\mu_0)$ и импулсните функции I_j, $j = 1, 2, \ldots$

От особен интерес е резултата в Теорема 2.3, където при гладкост на f, началната функция I_0, функциите генериращи импулсите I_i (спрямо независимата x и реалните параметри), т. е. условията *H2.1÷ H2.8*, то тогава решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е непрекъснато диференцируемо относно началната точка $I_0(\mu_0)$ (т.е. по параметъра μ_0), а също така решението е непрекъснато диференцируемо относно импулсните функции I_j (т.е. по параметъра μ_j), $j = 1, 2, \ldots$. Производните на решенията удовлетворяват съответните начални задачи.

Като илюстриращ пример в последния параграф на Глава 2 се разглежда динамичното развитие на изолирана популация, подложена на външно импулсно въздействие. Направени са полезни изводи относно количеството биомаса в регулярна и смутена популация на една биологична система.

В **Глава 3** е направено изследване на непрекъснатата зависимост на решенията на ДУя с нефиксирани моменти на импулси относно началното условие и бариерните криви. Разгледана е регулярната начална задача (3.1) – (3.4) и смутената (3.7) – (3.10). Отново е доказан резултат за непрекъсната зависимост на решението от началните данни. Като приложение на получените резултати е разгледан и изследван модела на Gompertz.

В **Глава 4** е дискутирана орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост на решенията на автономни ДУя с нефиксирани моменти на импулсите относно началното условие и импулсните смущения. Това е една актуална задача, която е изследвана от множество автори (B. Ahmad и S. Sivasundaram [41] и [39]). Разгледан е също и модела на Лотка-Волтера ([45], [102], [109], [121], [123], [138], [142] и т. н.).

Разгледана е начална импулсна задача *(4.1), (4.2), (4.3)* и при определени условия е показано, че решението на тази задача зависи орбитално Хаусдорфово непрекъснато относно началната точка x_0 и импулсната функция I.

В последната **Глава 5** е разгледана орбитална Хаусдорфова устойчивост на решенията на автономни ДУя с нефиксирани моменти на импулси относно началното условие. Основен обект на изследване в тази глава е начална задача за автономни системи диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия. Импулсите се реализират в моментите, в които траекторията на изучаваната задача среща така нареченото „импулсно множество”, разположено във фазовото пространство на системата. Предполага се, че импулсното множество съвпада с част от хиперравнина. За описаната по-горе задача, тук за първи път са въведени термините орбитална гравитация и орбитална Хаусдорфова устойчивост по отношение на началното условие. Намерени са достатъчни условия, такива че, ако решението на съответната задача без импулси е орбитално гравитиращо, то решението на основната задача с импулси е орбитално Хаусдорфово устойчиво относно началното условие. По-нататък е разгледан класическия (без импулси) модел на Лотка-Волтера от популационната динамика. Намерени са достатъчни условия за орбитално гравитиране и за Хаусдорфова устойчивост относно началната точка.

4. Приноси на дисертанта.

1. Получени са достатъчни условия за:

- Орбитална гравитация на решенията на диференциални уравнения без импулси;
- Непрекъсната зависимост на решенията на импулсни системи ДУя с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и импулсните моменти и началното условие и импулсните смущения;
- Непрекъсната зависимост на решенията на импулсни системи ДУя с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и бариерните криви;
- Орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост на решенията на импулсни системи ДУя с променливи моменти на импулси относно началното условие и импулсните смущения;
- Устойчивост на решенията на импулсни системи ДУя с фиксирани моменти на импулсите относно началното условие и импулсните моменти;
- Орбитална Хаусдорфова устойчивост на решенията на импулсни системи ДУя с променливи моменти на импулсите относно началното условие;
- Диференцируемост на решенията на импулсни системи ДУя с фиксирани моменти на импулси относно импулсните моменти.

2. Получените резултати са приложени за изследване на:

- Непрекъсната зависимост и устойчивост на решенията на модел от фармакокинетиката;
- Непрекъсната зависимост и диференцируемост на решенията на логистичен модел с фиксирани моменти на импулси относно началното условие и импулсните смущения;
- Непрекъсната зависимост на решенията на модел на Gompertz с променливи моменти на импулси относно началното условие и бариерните криви;
- Орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост на решенията на модел на Лотка-Волтера с променливи моменти на импулси относно началното условие и импулсните смущения;
- Орбитална Хаусдорфова устойчивост на решенията на модел на Лотка-Волтера без импулси.

5. За резултатите в дисертацията са използвани 3 публикации, с участие на дисертанта, в престижни международни журнали:

1. *Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments, International Journal of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 70, № 1, 39-64.*
2. *Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves, Acta Mathematica Scientia, (2011), (to appear).*
3. *Dishliev A., Dishlieva K., Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations, International Journal of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 70, № 2, 167-187.*

6. Автореферат.

Съпътстващият дисертацията автореферат вярно и точно представя в съкратен вариант разработените идеи и проблеми в труда. Като недостатък посочваме много подробното описание на някои от определенията и резултатите, което увеличава обема на автореферата значително.

7. Критични бележки и препоръки.

1. Дисертационният труд е добре написан, с изключение на някои правописни грешки, които са неизбежни при дългите текстове.

2. Има повтаряемост на някои от означенията на условията преди формулировката на теоремите. Например, хипотезата H1.1 в Глава 1 се повтаря в Глава 2 с означение H2.1, същото се отнася за H1.3 и H2.4 и също на други места в дисертацията срещаме излишество в означенията, което обаче не влияе на получените резултати.

Направените бележки, повечето от които имат формален, редакционен или доуточняващ характер, не намаляват позитивната ни оценка, както и достойнствата на дисертацията.

8. Заключение.

На основание изложеното в настоящата рецензия и преди всичко на база на положителните констатации и оценки може да се формулира категорично позитивно отношение към дисертационния труд озаглавен "ВЪРХУ КАЧЕСТВЕНАТА ТЕОРИЯ НА ИМПУЛСНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ" с автор Катя Георгиева Дишлиева.

В този труд са реализирани съществени приноси при изследване на нелинейни импулсни ДУя и са получени научни резултати в актуална тематика. Считам, че представената дисертация отговаря напълно на изискванията на Закона за развитието на академичния състав в Република България и на действащия в момента Правилник на ХТМУ. Това ми дава основание **да предложа на членовете на уважаемото Жури да дадат своя положителен вот за присъждане на образователната и научна степен *„доктор”* по научната специалност 01.01.05 – *Диференциални уравнения*, на докторанта Катя Георгиева Дишлиева.**

20.06.2011 г.
София

Рецензент:

(доц. д-р Димитър Колев)