СТАНОВИЩЕ

от

доц. д-р Димитър Ангелов Колев

катедра "Математика ХТМУ-София, върху дисертационния труд, озаглавен,

"*Асимптотично сравняване на решения на системи*

обикновени диференциални уравнения: методи и приложения

на гл. ас. Светослав Иванов Ненов,

за придобиване образователната и научна степен "доктор"

по научна специалност "Диференциални уравнения"(шифър 01 01 05)

Основни задачи. Дисертационният труд е посветен на изследване асимптотичното поведение на решенията на системи обикновени диференциални уравнения (ОДУя). Той включва общо 15 параграфа разположени върху 127 страници: Увод, Глава 1, Глава 2 и Библиография - състояща се от 42 цитирани литературни източници.

Изучаването на асимптотичното поведение на решенията на системи ОДУя е една важна задача свързана с различни важни приложения във физиката, химията, биологията, технологиите и др. Различни резултати, свързани с асимптотичното поведение на решенията, могат да бъдат намерени в трудовете на някои известни автори, като Hartman, Marsden, Bogolubov и Mitropolski, Amann, Plis, Nemitsky и Stepanov, Coddington и Levinson и др. цитирани от дисертанта.

Разгледани са две системи ОДУя (62) и (63) (с. 32), със зададени начални условия,

$$(62) \qquad \dot{x} = f_1(t,x), \quad x_1(t_0;t_0,x_0) = x_0$$

и

$$(63) \qquad \dot{x} = f_2(t,x), \quad x_2(t_0;t_0,x_0) = x_0,$$

където: $f_i : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow D$, $i = 1,2$; D е област в $\mathbb{R}^n$, $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$. Решенията на задачите (62) и (63) са съответно $x_1(t;t_0,x_0)$ и $x_2(t;t_0,x_0)$. Ако $t_0 = 0$, то полагаме $x_i(t;x_0) = x_i(t;0,x_0)$, $i = 1,2$. За задачите (62) и (63) са валидни условията (H 1.1) (с. 32):

(H 1.1.1) За всяка начална точка $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$ съществуват единствени решения, съответно, на задачите (62) и (63), дефинирани $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

(H 1.1.2) D е положително инвариантно множество на двете системи (62) и (63), т.е. за $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times D$ имаме $x_i(t;t_0,x_0) \in D$, $t \geq t_0$, $i = 1,2$.

(H 1.1.3) Съществува точка $(t_0,x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times D$ такава, че $x_1(t;t_0,x_0^*) = x_2(t;t_0,x_0^*) \in D, \forall t \geq t_0$.

В дисертацията е приложен метод за определяне асимптотичните свойства на решенията на системата (62) посредством сравняване с моделната система (63). Оказва се, че изследването на частното $\frac{\|x_1(t,x_0)\|}{\|x_2(t,x_0)\|}$ на решенията на двете системи (62) и (63) ни дава ясна информация за асимптотичните свойства на решенията.

Основните задачи, разгледани в настоящия дисертационен труд, са следните:

А) Формулиране и доказване на критерии за сравнимост на системите (62) и (63) в околност на общото им решение $x_1(t;x_0^*) = x_2(t;x_0^*)$. Направена е подходяща смяна на координатната система така, че $x_0^* = x_1(t;x_0^*) = x_2(t;x_0^*) = 0$.

Б) Получени са някои асимптотични свойства на решенията на системата (62), като е използван метода на сравнение с подходящо избрана моделна система (63).

В) Получаване на необходими и достатъчни условия за устойчивост на нулевото решение на системата от (62). Методът за получаване на такива условия се базира върху сравняването (относно въведените релации) на решенията на системата (62) с решенията на моделната система (63) (предварително е известно поведението на решенията на системата (63)).

Г) Сравнения на решенията на системата (62) с решенията на смутената (63), където функцията $f_2(t,x)$ е дефинирана чрез едно "малко" смущение на векторното поле $f_1(t,x)$.

Д) Сравнения на решенията на системите (62) и (63) в околност на общо периодично решение.

Резултати в предлагания дисертационен труд.

Основната цел на Глава 1 е формулирането и доказването на резултати върху сравнимост на решенията на системите (62) и (63).

В Параграф 1.1 е приведено подробно описание на поставената задача. За така въведените релации $\preceq$ и $\sim$ е показано, че са валидни Теорема 1.1 и Теорема 1.2 (с. 33-34). Приведени са дефиниции на понятията, свързани с устойчивост, атрактивност, неустойчивост и др. (Дефиниция 1.2, стр. 35; Дефиниция 1.3, стр. 35; Дефиниция 1.4, стр. 36).

В Параграф 1.2 е разгледана теоремата на T. Wazewski (Teorema 1.3, с. 40), известна като топологичен принцип в теорията на ОДУя, използвана по-нататък при решаване на основните задачи. За целта са въведени определенията за точка на изход, точка на строг изход, отворено $[U, V]$-множество относно системата (70), $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ и др.

В Параграф 1.3 са доказани някои диференциални неравенства.

В Параграф 1.4 е формулиран и доказан резултат за сравнимост на устойчиви нулеви решения на двете системи (62) и (63), със съответни начални условия, в зависимост от собствените стойности на съответните линейни части. Направена е интересна илюстрация на разгледаната теория, чрез примерите 1.6 - 1.11 (с. 51-57). Чрез Теорема 1.5 (с. 58) е показано едно достатъчно условие за сравнимост на нулевото решение на системата (105), $\dot{x} = Ax + f(t, x)$ (A е $n \times n$-матрица), с нулевото решение на диференциалното уравнение (97) (с. 55), $\dot{y} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{1j} y^j \equiv g_1(y)$.

В Параграф 1.5 са получени твърдения за сравнимост на нулевите решения на системите (62) и (63), които се базират на понятието логаритмичен индекс на функция. Теорема 1.6 (с. 60) е използвана за получаване сравнимост на нулевите решения на линейни системи ОДУя с променливи коефициенти. С помощта на Лема 1.7 (с. 63) са получени две неравенства, които дават връзка между понятията горна (долна) диференциална характеристика на функцията $f_1(t, x)$ и логаритмичните индекси на решенията на системата (62). С помощта на известната теорема на Красовски (Теорема 1.8) (с. 69) е показано, че началната точка $(0, 0)$ е асимптотически устойчива стационарна точка.

В Параграф 1.6 са получени критерии за сравнимост на решения базиращи се на диференциални неравенства, Теорема 1.9 (с. 71), Следствие 1.3 (с.74) и Теорема 1.10 (с. 75), Следствие 1.4 (с.75).

В Параграф 1.7 са въведени бинарните релации слабо предхождане, слабо следване, слаба еквивалентност на решенията на две системи. Въведено е понятието монотонен поток. Формулирани са някои необходими и достатъчни условия за слаба сравнимост на разглежданите системи в дадена област.

В Параграф 1.8 е въведено понятието адитивна сравнимост на решенията на две системи диференциални уравнения, (148) и (149) (с. 85). Формулирано е едно достатъчно условие за асимптотична еквивалентност на разглежданите системи (Теорема 1.15, с. 85). Идеята за доказателството се базира върху топологичния принцип в теорията на ОДУя (теоремата на T. Wazewski). Показано е достатъчното условие за устойчивост на нулевото решение на системата (148).

В Параграф 1.9 са разгледани системите (166) и (167) с наложени условия H 1.6.1 - H 1.6.3 (с. 91) и са формулирани и доказани два резултата, които са аналогични на резултатите за адитивна сравнимост от Параграф 1.8 (Теорема 1.18 и Теорема 1.19).

В Глава 2 е изследвана задачата за структурна устойчивост на решения на системи ОДУя. Поставената задача обобщава класическия проблем за структурна устойчивост. Дадена е системата (212) (с. 105) и смутения ѝ аналог (213). Дефинирано е понятието -структурна устойчивост на периодични решения. В Параграф 2.1 са получени условия за съществуване и единственост на решение на едно уравнение $F(x, y) = 0$, където $F : X \times Y \to Z$ е гладко изображение, а X, Y, Z са Банахови пространства. В Параграф 2.2 е разгледана задачата за запазване периодичността на решението при смущаване на дясната страна (векторното поле) на системата. Получени са резултати за съществуване на периодични решения. В Параграф 2.3 са дадени достатъчни условия за т. н. (g, d)-структурна устойчивост на периодично решение. Параграф 2.4 е посветен на доказателството на твърдения от теорията на структурно устойчиви динамични системи. В Параграф 2.5 е решена задачата за сравнимост на решенията на две автономни системи ОДУя в околност на общо привличащо периодично решение. За съжаление комплицираната структура на "максималното" множество с указаното по-горе свойство не позволява формулирането на достатъчно конкретни резултати. Ето защо е разгледан един конкретен и едновременно с това достатъчно общ случай, при който множеството има "линейна структура".

Резюмираме получените резултати:

1. Въведен е критерий за сравняване на устойчиви нулеви решения на две системи ОДУя. За такива решения са въведени бинарните релации предхождане, еквивалентност, и т.н. получени са необходими и достатъчни условия за съществуване на частична наредба на устойчивите нулеви решения на системи ОДУя. Част от резултатите представляват нови доказателства на известни факти от теорията на устойчивостта.

2. Изучено е асимптотичното поведение на решенията на системите $M\ddot{x} + \dot{x} = f(t, x)$ и $\dot{x} = f(t, x)$. Намерени са достатъчни условия, при които тяхната разлика асимптотично клони към 0.

3. Въведено е понятието M-структурна устойчивост на орбити на система диференциални уравнения. За широк клас системи са получени достатъчни условия за M-структурна устойчивост. Получени са нови доказателства на някои класически теореми за структурна устойчивост на стационарни точки и периодични орбити.

4. Получен е критерий за сравняване на две периодични орбити на автономни системи диференциални уравнения. Критерият се базира на оценка на частното от нормите на съответните изображения на Poincaré. Изучен е въпроса за сравнимост на периодични орбити на двумерни автономни системи диференциални уравнения.

5. Получените в дисертацията резултати са приложени за по-пълното изследване на някои класически математически модели, като модел на човешка сърдечно-съдова дейност, модел на цикли в невронни системи, модели на P.F. Verhulst и Lotka-Volterra от популационната динамика. Изучено е асимптотичното поведение на решенията на тези модели.

Основните идеи от дисертационния труд могат да се видят в трите публикации, цитирани на с. 125 (с участие на дисертанта), [ADN97], [ADN98], [Nen96]. Тези публикации са в съответствие с критериите посочени в Правилника за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в ХТМУ

Критични бележки към дисертацията:

1. Допуснати са някои синтактични, а също и стилни грешки.

2. Допуснати са някои неточности в номерацията на формулите: например, с. 86, 16-ти ред, отгоре и 8-ми ред, отдолу; също на с. 87 и др.

3. Липсва страница 76 или номерацията е грешна.

Критични бележки към автореферата:

1. Възприета е друга номерация на получените резултати, различна от тази в самата дисертация, което затруднява читателя.

2. Изпусната е номерацията на някои формули и дефиниции (например, на с. 6 и др.).

Внимателното проследяване на текста показва, че направените критични бележки не влияят на доказателствата на основните резултати, а авторефератът отразява вярно материала от дисертационния труд.

В заключение считам, че въпреки посочените критични бележки, дисертационният труд представлява едно задълбочено научно изследване в областта на качествената теория на ОДУя, с получени полезни резултати, приложими в различни области на човешкото познание. Следователно моето становище спрямо качествата на дисертационния труд на гл. ас. Светослав Иванов Ненов е позитивно и предлагам на уважаемото Научно Жури (НЖ) да присъди образователната и научна степен "доктор" по научната специалност Диференциални уравнения (шифър 01 01 05).

23.06.2011 г.

Член на НЖ:

(доц. д-р Д. Колев)