СТАНОВИЩЕ

от доц. д-р Валентина Пройчева, ТУ-София, Филиал Пловдив

по дисертационен труд за придобиване на образователната и научна степен "доктор", озаглавен "Асимптотично сравняване на решения на системи обикновени диференциални уравнения: методи и приложения",
с автор гл. ас. Светослав Иванов Ненов, ХТМУ-София,
в област: 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление : 4.5 - Математика,
научна специалност: 01 01 05 – Диференциални уравнения,
научен ръководител доц. д-р Ангел Дишлиев, ХТМУ-София

Представеният дисертационен труд е поместен на 127 страници и съдържа: увод, две глави, библиография, заключение с декларация за оригиналност на резултатите и публикации по дисертационния труд.

1. Актуалност на дисертационния труд. Най-общо казано, в дисертационния труд се изследват асимптотичните свойства на решенията на системи обикновени диференциални уравнения. По-точно, изследвани са въпроси, свързани със:
- сравняване на решения на системи диференциални уравнения;
- сравняване на решения в околност на периодични орбити;
- асимптотични свойства (устойчивост, асимптотична устойчивост, монотонност, ограниченост и др.) на решенията на нелинейни системи диференциални уравнения;
- дислоциране на областите за сравнимост на решенията на две системи и др.

Класическият период на развитието на теорията на диференциалните уравнения, започващ с фундаменталните изследвания на Нютон, Лайбниц и Коши и завършващ през шестдесетте години на 19 век с работите на Софус Ли, има като основна задача намирането на решенията на определени класове диференциални уравнения в явен вид чрез елементарни функции или с помощта на квадратури от елементарни функции. Още тогава беше установено, че поставената задача много често е неразрешима, при това за уравнения, моделиращи важни процеси от механиката, небесната механика и биологията. По този начин, желанието на класиците да "затворят теорията на диференциалните уравнения" се оказа непостижима цел. Естествено, вторият етап от развитието на теорията на диференциалните уравнения (който продължава и до днес) можем да свържем с численото (приближено) пресмятане на решенията. Съществен дефект на този подход се явява факта, че при последователните алгоритмични пресмятания се получава приближение само на едно конкретно решение на дадена фиксирана начална или гранична задача. Намирането на приближението на друго решение по принцип повтаря изчислителната процедура отначало. Затова числените методи не могат да служат като база за създаване на обща теория на диференциалните уравнения. Важно място в тази теория заема качествената теория, основател на която е бележития френски математик Поанкаре. В своите трудове Поанкаре разработи качествените методи във връзка с въпроси от небесната механика и космологията. Качествените методи са свързани с поведението на решението при неограничено нарастване на свободната променлива, която най-често се интерпретира като времето. Първоначално са изучени системи диференциални уравнения, десните части на които не зависят явно от независимата променлива, т.е. от времето t. Впоследствие, Биркоф ги нарича динамични системи. Още веднъж ще отбележим заслугите на Поанкаре, като припомним, че той направи достатъчно пълна качествена картина на поведението на интегралните криви на динамичните системи от втори ред. Едновременно с Поанкаре, Ляпунов също изследва динамични системи, както и системи, чиито десни страни зависят от времето. Основните му резултати се отнасят за устойчивост на решенията на нелинейни диференциални уравнения. Тази теория, макар и отдавна създадена, не е загубила своята актуалност до наши дни. Вероятно, този факт се дължи на многобройните приложения както в математиката (устойчивост на диференчни схеми и всякакъв род изчислителни процедури, итерационни схеми и т.н.), така и в почти всички области на човешкото познание. В дискутирания дисертационен труд са разгледани въпроси от теорията на устойчивостта, ограничеността, монотонноста и др. Определено считам, че резултатите, постигнати от автора, са интересни от гледна точка на съвременното състояние на теорията на диференциалните уравнения. Представените съществени приложения, доказват необходимостта от подобен род изследвания.

2. Научни и научноприложни приноси. В първата глава на дисертацията е разработен метод за определяне на асимптотични свойства на решенията на дадена система чрез тяхното сравняване с асимптотичните качества на решенията на фиксирана моделна система от обикновени диференциални уравнения. За целта е въведена така наречената от автора функция на сравняване

$$F\left(t,t_0,x_0\right)=\frac{\left\|x_1\left(t,t_0,x_0\right)-x_1\left(t,t_0,x_0^*\right)\right\|}{\left\|x_2\left(t,t_0,x_0\right)-x_2\left(t,t_0,x_0^*\right)\right\|},$$

където $x_1\left(t,t_0,x_0\right)$ и $x_1\left(t,t_0,x_0^*\right)$ са решения на изследваната система, а $x_2\left(t,t_0,x_0\right)$ и $x_2\left(t,t_0,x_0^*\right)$ - на моделната. На базата на граничните стойности при $t\to\infty$ на функцията $F\left(t,t_0,x_0\right)$ са въведени понятията: предхожда $(\prec)$, следва $(\succ)$, еквивалентност $(\square)$, сравнимост и несравнимост на две системи обикновени диференциални уравнения. Установено е, че релацията “$\prec$” индуцира частична наредба в множеството от всички системи диференциални уравнения, притежаващи общо решение. Също така е показано, че “$\square$” е релация на еквивалентност. Разгледани са опростени варианти на функцията на сравняване $F\left(t,t_0,x_0\right)$ в случая, когато изходната и моделната системи имат общо нулево решение. Силен резултат е теорема 1.4, където са намерени достатъчни условия за сравняване на системи, които притежават линейна и нелинейна част. Така например е установено, че ако собствените стойности на матрицата от коефициентите на линейната част на първата система са реални и са по-малки от собствените стойности на матрицата от коефициентите на линейната част на втората система, и ако нелинейните части на двете системи са “о-малко” от фазовата променлива в околност на нулата, то първата система предхожда втората. Споменатият резултат се базират на топологичния принцип на Важевски и няколко нови диференциални неравенства, свързани с производната на нормата на решението на класове нелинейни диференциални уравнения. Получаването на въпросните неравенства не е тривиална задача и според мен от тук следват два основни извода: Първо, г-н С. Ненов разполага с широки познания в областта на геометричната теория на диференциалните уравнения и второ, той показва завидни технически умения при установяването на специфични диференциални неравенства, с участието на решението на нелинейни системи диференциални уравнения. Важен пример, разгледан от автора, е уравнението на Lienard, описващо сърдечно-съдовата дейност и циркулация на кръвта в човешкия организъм. Първоначално е извършена линеаризация. Намерена е връзка между параметрите на две линеаризирани системи на Lienard (различаващи се по няколко параметри), при които имаме сравнимост на решенията. Намерени са областите на сравнимост на такива системи и в частност - областите на следване и предхождане. В параграф 5 на първа глава при изследвания за сравнимост на нулевите решения на нелинейни системи, кандидатът умело използва понятието логаритмичен индекс на функция и прилага успешно известни достатъчни условия за съществуване на този индекс. Резултатите, получени в този параграф, са приложени при изучаване на поведението (в частност асимптотическата устойчивост) на решенията на система диференциални уравнения, моделираща динамиката на развитие на цикли в теорията на графите и на невронните мрежи. Такъв вид системи (системи на Turing) се използват и при моделиране на преносни процеси в биологични клетки. С помощта на функциите:

$$l(t_1,t_2,x_1,x_2)=\liminf_{t\to\infty}\frac{\|x_1(t;t_1,x_1)\|}{\|x_2(t;t_2,x_2)\|},\quad L(t_1,t_2,x_1,x_2)=\limsup_{t\to\infty}\frac{\|x_1(t;t_1,x_1)\|}{\|x_2(t;t_2,x_2)\|},$$

където $x_1(t;t_1,x_1)$ и $x_2(t;t_2,x_2)$ са решения съответно на изследваната и моделната системи диференциални уравнения се дефинират понятията: слабо предхождане, слабо следване, слаба еквивалентност и слаба сравнимост. С помощта на въведените релации и при предположения, свързани с решенията на моделната система, се установяват, подобни асимптотични свойства (ограниченост, устойчивост, асимптотична устойчивост, монотонност и др.) на решенията на изследваната система.

Във втората глава на дисертационния труд в светлината на техниката, разработена от автора, са разгледани и доказани по нов начин въпроси от устойчивост, неустойчивост, притегляне и отблъскване на периодични решения на системи обикновени диференциални уравнения. Високата ерудиция и научна осведоменост на дисертанта най-ясно проличава в един от последните параграфи на дисертацията, където се изследва задачата за сравнимост на решенията на две автономни системи диференциални уравнения в околност на общо привличащо периодично решение. За целта авторът е използвал един от брилянтните подходи на Поанкаре (неговото изображение) при изследване на периодични орбити и техните сечения с трансферзални секции на съответното векторно поле. Получени са интересни резултати за сравнимост на системи в околност на периодични орбити. Дисертационният труд изобилства от примери, които показват приложимостта на условията в доказаните твърдения.

3. Публикации по дисертацията. По темата на дисертацията кандидатът е представил 3 научни статии. В тях са публикувани съществени части от представения дисертационен труд. Една от статиите е самостоятелна. Две от публикациите са в списания с импакт фактор:

- Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications – IF: 1,487;
- International J. of Theoretical Physics – IF: 0,688.

Авторефератът обективно отразява дисертационния труд.

4. Заключение. Становището ми, относно придобиването на образователната и научна степен "доктор" по научната специалност "Диференциални уравнения" от гл. ас. Светослав Иванов Ненов, е **положително.**

Основателно считам, че представената дисертация напълно отговаря на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за приложение на този закон и Правилника за придобиване на научни степени и научни звания в ХТМУ и предлагам на научното жури да присъди на гл. ас. Светослав Иванов Ненов образователната и научна степен "доктор".

28. 06. 2011 г.

Член на научното жури:

доц. д-р В. Пройчева