



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛТЕТ ПО ХИМИЧНО И СИСТЕМНО ИНЖЕНЕРСТВО

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА”

инж. Ангел Ангелов Дишлиев

МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ ЧРЕЗ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛСИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

за придобиване на образователната и научна степен „доктор”

по научна специалност 4.5. Математика

(Математическо моделиране и приложение на математиката)

Научни ръководители: проф. д-р Ангел Борисов Дишлиев
доц. д-р Светослав Иванов Ненов

Научно жури:

1. проф. д-р Александър Стоянов Александров - председател
2. доц. д-р Светослав Иванов Ненов
2. проф. д-мн Гани Трендафилов Стамов - рецензент
3. проф. д-р Ганчо Тачев Тачев - рецензент
5. доц. д-р Николай Методиев Китанов

София, 2017

Дисертационният труд е написан на 159 страници и съдържа 9 фигури. Цитирани са 283 източника.

Представеният дисертационен труд е обсъден и приет за защита на заседание на катедра „Математика“, състояло се на 01.03. 2017 г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 15.05. 2017 г. от 14 часа в зала 439, сграда „А“ на ХТМУ.

Материалите са на разположение на интересуващите се на интернет страницата на ХТМУ и в отдел „Научни дейности“, стая 406, етаж 4, сграда „А“ на ХТМУ.

За удобство означенията и номерацията в автореферата и дисертационния труд съвпадат.

С помощта на диференциалните уравнения с импулсни въздействия се описват и изследват „скокообразни“ динамични процеси. Този тип процеси са подложени на многократни дискретни външни въздействия. Въздействията се осъществяват последователно за сравнително „малки“ времеви интервали, които са пренебрежими в сравнение с общата продължителност на изучавания динамичен процес. Това е основание да се приеме, че въздействията се извършват мигновено под формата на импулси. Диференциалните уравнения с импулси са въведени от В. Мильман и А. Мышкис в първата половина на шестдесетте години на миналия век (виж [22] и [23]). В тези работи са дадени някои общи съображения за необходимостта от изучаване на системите с импулсно въздействие. Получени са първите резултати за устойчивост на техните решения.

Ще отбележим, че по начина на определяне и математическото описание на импулсните въздействия този тип уравнения се делят на два основни класа:

- Клас А: Импулсните въздействия се дефинират с помощта на обобщени функции (от типа на функцията на Р. Дирак, виж [39] и [235]);
- Клас Б: Импулсните въздействия се определят с помощта на нарастването на търсената функция в моментите на въздействие (виж [32] и [199]).

В дисертацията се изследват уравнения с импулси от втория тип (клас Б). По начина на определяне на моментите на импулсни въздействия този тип диференциални уравнения (от клас Б) се разделят на различни подкласове, от които тук ще посочим следните:

Б1. С фиксирани моменти на импулсно въздействие (виж изследванията: [6], [7], [9], [10], [15], [32], [35], [42], [43], [44], [60], [63], [99], [100], [101], [102], [103], [155], [167], [173], [175], [179], [182], [204] и [223]);

Б2. С импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които интегралната крива на диференциалното уравнение среща предварително зададени множества, които са разположени в разширеното фазово пространство. Най-често тези множества са непресичащи се хиперповърхнини (виж работите: [32], [66], [67], [68], [69], [70], [79], [81], [82], [97], [134], [135], [138], [139] и [253]);

Б3. С импулсни моменти, които съвпадат с моментите, в които траекторията на диференциалното уравнение среща предварително зададени множества, разположени във фазово пространство (на този тип уравнения са посветени изследванията: [97], [107], [108], [109], [121], [122], [124], [142], [144], [145], [147], [149], [160], [161], [162], [226] и [264]);

Б4. С импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които решението минимизира предварително зададен функционал (виж: [56], [57], [58], [59], [61], [75], [76], [145], [150], [206], [207], [262] и [282]);

Б5. С импулсни моменти, които са произволни (качествата на решенията на такъв клас уравнения се изучават в: [148], [150] и [152]);

Б6. С импулсни моменти, които имат случаен характер и удовлетворяват определен закон на разпределение (виж: [32], [241] и [268]) и др.

Диференциалните уравнения, които се изследват тук са от класовете Б3, Б4 и Б5. Ще се спрем по-подробно на тези класове:

Клас Б3: Този клас се състои от следните елементи:

Б31. Съвкупност от няколко (възможно е и безбройно много) системи обикновени диференциални уравнения, които описват непрекъснатите части на решението. Съвкупността от споменатите системи най-общо има вида:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots;$$

където:

- функциите $f_1, f_2, \dots \in C[R \times G, R^n]$, т.е. дясната страна на всяка една от горните системи е непрекъснатата функция в дефиниционното си множество;
- Фазовото пространство G е непразна област от R^n ;

Б32. Условия за последователно определяне на превключващите моменти $t_1, t_2, \dots$, в които се извършват както импулсните въздействия върху решението, така и смяната на структурата на системата от диференциални уравнения. Тези превключващи моменти са последователни решения на системи от алгебрични уравнения от вида:

$$\varphi_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където функциите $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ се наричат превключващи функции. Тези функции са съответни за всяка една дясна страна и са дефинирани и непрекъснати във фазовото пространство на изучаваните системи от обикновени диференциални уравнения, т.е. $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C[G, R]$;

Б33. Импулсни функции $I_1, I_2, \dots$, които определят големината (и посоката) на импулсните въздействия. Тези въздействия математически се описват както следва:

$$x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots.$$

Импулсните функции $I_1, I_2, \dots$ са непрекъснати във фазовото пространство G на разглежданите системи с променлива структура и импулси, т.е. $I_1, I_2, \dots \in C[G, R^n]$.

Клас Б4: Този клас се състои от следните елементи:

Б41. Система диференциални уравнения, която описва непрекъснатите части на решението

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

където $f \in C[R \times G, R^n]$;

Б42. Множество T от всички допустими импулсни моменти $t_1, t_2, \dots$ и множество I от всички допустими импулсни въздействия $I_1, I_2, \dots$;

Б43. Функционал F , където $F = F((t_1, t_2, \dots), (I_1, I_2, \dots))$ и $F : T \times I \rightarrow R^+$. Импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$ и импулсните въздействия $I_1, I_2, \dots$ се определят така, че функционалът F достига глобален минимум в тях. С други думи изпълнени са релациите:

$$(t_1 = t_1^{opt}, t_2 = t_2^{opt}, \dots), (I_1 = I_1^{opt}, I_2 = I_2^{opt}, \dots) \Leftrightarrow (t_1^{opt}, t_2^{opt}, \dots) \in T, (I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots) \in I$$

и

$$F((t_1^{opt}, t_2^{opt}, \dots), (I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots)) = \min \{ F((t_1, t_2, \dots), (I_1, I_2, \dots)); (t_1, t_2, \dots) \in T, (I_1, I_2, \dots) \in I \}.$$

Клас Б5: Този клас се състои от следните елементи:

Б51. Съвкупност от няколко или безбройно много системи диференциални уравнения, които описват непрекъснатите части на решението:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots;$$

Б52. Произволни импулсни (превключващи) моменти $t_1, t_2, \dots$, които са последователни, т.е. удовлетворяват неравенствата $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$;

Б53. Импулсни функции $I_1, I_2, \dots, I_1, I_2, \dots \in C[G, R^n]$.

Изследванията на системите диференциални уравнения с импулси условно можем да разпределим в три обобщени направления:

1. Изследвания на сравнително общи качества на решенията, които са характерни както за решенията на уравненията без импулси, така и за решенията на уравненията с импулсни въздействия (виж публикациите: [8], [9], [10], [15], [16], [25], [26], [27], [31], [33], [45], [46], [52], [63], [64], [66], [71], [72], [74], [77], [78], [82], [86], [87], [88], [91], [92], [94], [95], [106], [113], [114], [133], [157], [159], [160], [162], [163], [167], [168], [172], [178], [180], [181], [183], [187], [194], [195], [196], [197], [198], [200], [201], [202], [205], [215],

- [220], [230], [231], [232], [239], [242], [245], [247], [250], [252], [256], [257], [258], [260], [263], [270], [275], [276] и [283]);
2. Изследвания на специфични качества, които са типични само за решенията на уравненията с импулсни въздействия. Тук ще разпределим резултатите в две групи:
 - 2.1. Виж публикациите, които се отнасят за диференциални уравнения с импулсни въздействия във фиксирани моменти: [57], [58], [84], [85], [90], [96], [115], [116], [143], [145], [150], [184], [190], [203], [206], [225], [236], [246], [248] и [274];
 - 2.2. Отделно ще цитираме резултатите за диференциални уравнения с импулсни въздействия в променливи моменти (виж публикациите: [34], [54], [55], [56], [81], [82], [117], [121], [122], [134], [135], [140], [141], [142], [144], [146], [147], [149] и [236]);
 3. Моделиране и оптимизиране на процеси от науката и практиката с помощта на диференциални уравнения с импулси. Тук ще посочим изследванията, в които изучаваните процеси могат да се опишат адекватно само чрез такъв тип уравнения (виж публикациите: [11], [35], [49], [50], [51], [53], [61], [62], [80], [104], [110], [111], [112], [118], [120], [124], [126], [127], [128], [131], [145], [151], [153], [154], [155], [156], [164], [165], [171], [174], [176], [186], [188], [189], [190], [191], [192], [193], [206], [207], [208], [209], [211], [212], [213], [214], [216], [217], [218], [219], [224], [229], [240], [243], [244], [249], [251], [254], [255], [259], [261], [265], [266], [269], [271], [272], [273], [277], [278], [279] и [281]).

Диференциалните уравнения с променлива структура (без импулсни въздействия) или както още се наричат с прекъсната дясна част са полезен математически апарат в теорията на управлението. Тук ще посочим следните резултати: [1], [18], [19], [20], [21], [30], [47], [119], [120], [130], [158], [169], [170], [210] и [234]. В следните монографии се изучават различни аспекти от теорията на системите диференциални уравнения с променлива структура: А. Филиппов [38]; А. Андронов, А. Витт и С. Хайкин [2]; В. Бабицкий и В. Крупенин [4]; Н. Ахиезер [3]; Н. Перестюк, В. Плотников, А. Самойленко и Н. Скрипник [24] и др.

Следващите работи са посветени на фундаменталната и качествена теория на системите диференциални уравнения с променлива структура и импулсни въздействия: [48], [73], [121], [122], [123], [124], [145], [136], [137], [185], [221], [222], [238], [267] и [280].

Изучаването на „скокообразно“ изменящи се динамични процеси е предмет на няколко науки, от които ще посочим: математика, механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. При изучаването на тези прекъснати процеси използването на математически апарат под формата на моделиращи диференциални уравнения с импулсни въздействия, като правило, е задължително.

Актуалността на този тип уравнения (в частност това означава и актуалност на изследванията, проведени в настоящия дисертационен труд) се дължи основно на многобройните техни приложения. Така например, скокообразни изменения в развитието се наблюдават и изучават при следните динамични процеси:

- изменението на скоростта на затвора на клапан при преминаването му от отворено в затворено състояние ([124] и [145]);
- действието на амортизатор, подложен на ударни въздействия ([41]);
- колебанията на системи от махала при наличие на външни импулсни смущения ([12], [13] и [14]);
- ударен модел на часовников механизъм ([5]);
- виброударни системи ([11] и [17]);
- релаксионни колебания на електромеханични системи ([2]);
- електронни схеми ([11] и [28]);
- затихващ осцилатор, подложен на импулсни въздействия ([102]);
- динамиката на системи за автоматично регулиране ([28], [40] и [41]);
- смущения в клетъчни неврони мрежи ([49], [51], [115], [119], [120], [224], [251], [272] и [273]);
- импулсни пертурбации в скоростта на развитие на кълбовидни бактерии, подчинени на закона на Schmalhausen ([143]);

- регулирана импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на изолирани популации ([58], [59], [75], [76], [153], [156], [212], [227], [244], [261] и [282]);
- регулирана импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на съобщества от тип жертва-хищник ([53], [56], [57], [128], [188], [190], [192], [193], [208], [211], [213], [216], [218], [228], [229], [243], [267] и [279]);
- екологични задачи ([281]);
- динамични процеси от фармакокинетиката ([29], [62], [145] и [229]);
- задачи от епидемиологията ([127], [164], [165], [209] и [280]);
- „шокови“ изменения на цените на затворените пазари ([258]) и др.

Повече подробности и по-широк кръг от проблеми, които се моделират с помощта на диференциални уравнения с импулсни въздействия, може да се намерят в монографията [145].

Основните цели и постигнатите резултати в дисертационния труд са свързани с адекватното описание с помощта на този клас уравнения на динамиката на няколко типа процеси, които са подложени на дискретни външни интервенции и смяна на скоростта на развитие. Във всички предложени модели са спазени следните изисквания:

1. Представените и изучаваните в дисертацията математически модели са обобщения на съществуващи, известни в литературата модели на реални обекти и свързаните с тях процеси. Представените примери са теоретични, а не числови реализации;
2. Обобщенията на изучаваните модели са свързани с допускането на външни импулсни въздействия, които се отразяват в „скокообразно“ изменение както на количествата на описвания обект, така и на скоростта на неговото изменение. Като пример ще посочим, че изучаваните обекти са количество на биомасата на популация, концентрация на лекарство средство в кръвта на пациент и др.;
3. Намерени са достатъчни условия, които гарантират определени качества на динамиката на количествата на моделирания обект. Разглежданите качества не са изучавани от други автори;
4. Изследванията на качествата на изменение на моделираните обекти са възможни да се реализират успешно чрез диференциални уравнения с променлива структура и импулсни въздействия;
5. Разглежданията, свързани със съществуването на изучаваните качества на динамиката на обектите, не е възможно да се осъществят без въвеждане на нови понятия и доказване на съответни теореми. Тези понятия и теореми са въведени и получени с участието на автора;
6. Както казахме по-горе, теоретичните резултати в дисертационния труд са приложени при изучаването на динамиката на модели. Качествата на решенията на моделите се гарантират чрез добавяне на допълнителни ограничения върху техните параметри;
7. Като правило, ограниченията са естествени и лесно проверяеми.

Посочените по-горе основни цели можем условно да разделим на няколко части:

1. Въвеждат се и се изследват нови класове диференциални уравнения с променливи структура и импулси, които представляват адекватен математически апарат при моделирането на прекъснати динамични процеси с променлива скорост на развитие;
2. Въведени са и са изучени специфични свойства на посочения по-горе клас диференциални уравнения. Тук ще акцентираме върху ключовите понятия при тези изследвания:
 - отсъствие на феномена "загиване" на решенията на системи уравнения с променлива структура и импулсни въздействия, като следствие на кондензация на моментите на външна интервенция;
 - равномерна устойчивост на решенията на системи уравнения с импулсни въздействия относно началното условие при произволни импулсни моменти;
 - локално равномерна Липшицова устойчивост на решенията на системи уравнения с импулсни въздействия в произволни импулсни моменти;
 - асимптотическа устойчивост на ненулевите решения на системи уравнения с променлива структура и импулсни въздействия;

- оптимални решения (в определен смисъл) на решенията на уравнения с импулсни въздействия.
- 3. Създадени са обобщени импулсни модели на динамиката на развитие на популации:
 - математически модел на Gompertz с променлива скорост на развитие и импулсни въздействия;
 - математически модел на Verhulst с импулсни въздействия;
 - математически модел от фармакокинетиката, описващ динамиката на лекарствената концентрация в кръвта на пациент при променлива скорост на разграждане и импулсно внасяне на лекарствено средство;
- 4. Прилагане на получените теоретични резултати върху посочените обобщени импулсни модели;
- 5. Тълкуване на резултатите в термините на моделите.

Още веднъж изрично ще подчертаем, че проведените изследвания на някои свойства на моделите са възможни само благодарение на предходните теоретични резултати в дисертационния труд.

Една от второстепенните цели на дисертационния труд е още веднъж да се обоснове необходимостта от задълбочено изучаване на диференциалните уравнения с променлива структура и импулсни въздействия.

Дисертационният труд се състои от увод и четири глави. Всяка от главите съдържа по два параграфа.

Глава 1. Неограничени моменти на превключване за диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Приложение

Резюме: Основен обект на изследване в тази глава са системи нелинейни автономни диференциални уравнения с променлива структура (променлива дясна страна) и импулсни въздействия. Решенията на такъв клас системи диференциални уравнения са частично непрекъснати функции. Моментите на прекъсване на решенията съвпадат с моментите на смяна на дясната страна на системата. Моментите се наричат превключващи. В тези моменти траекторията на съответната начална задача анулира последователно всяка една от предварително зададени превключващи функции. Тези функции са дефинирани във фазовото пространство на системата и приемат реални стойности. Превключващите моменти $t_1, t_2, \dots$ са специфични за решението на всяка начална задача. С други думи можем да считаме, че $t_1 = t_1(x_0), t_2 = t_2(x_0), \dots$, където x_0 е началната точка на задачата. Ако за някое начално условие превключващите моменти притежават точка на съгъстяване, то съответното решение не е продължимо надясно от тази точка. При наличие на такава ситуация ще казваме, че решението "загива" поради импулсните въздействия. Различни качества на решенията, при условие, че е налице феномена "загиване", са разгледани подробно в [238]. Ще обърнем внимание, че в този случай (при наличие на феномена загиване) редица важни свойства на решенията на разглежданите системи диференциални уравнения с променлива структура и импулсни въздействия не може да се изучават. Нещо повече, тези свойства не може да се дефинират коректно. Към споменатите качества на решенията причисляваме: устойчивост, дихотомия, монотонност, осцилиране, периодичност, асимптотическа еквивалентност и т.н.

В първия параграф на главата са намерени достатъчни условия, гарантиращи отсъствие на феномена загиване на решение поради импулсните въздействия. С други думи, при посочените условия моментите на превключване за всяко решение не притежават точка на съгъстяване. Това означава, че

$$(\forall x_0 \in G) \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} t_i(x_0) = \infty.$$

Получените резултати са приложени върху математически модел на изолирана популация, подложена на мигновени външни въздействия, които се състоят или в отнемане или в добавяне на биомаса към разглежданата популация. Въздействията се извършват за сравнително кратък период от време, поради което може да считаме, че се осъществяват скокообразно под формата на импулси. По конкретно, разгледан е импулсен аналог на уравнението на Gompertz.

Приложенията на диференциалните уравнения с променлива структура (без импулсни въздействия) са предимно в теорията на управлението: [111], [130], [158], [166], и [185].

Импулсните уравнения (с постоянна структура) се използват най-често при описание и изучаване на развитието на динамични процеси, подложени на дискретни във времето външни въздействия: [56], [75], [132], [135], [171], [184], [189], [199], [227], [229] и [237].

Ще припомним, че диференциалните уравнения с променлива структура и импулси са въведени в [222]. Някои качества на техните решения са изучени в [123], [122], [136] и [238].

Накрая на това резюме, ще посочим работите: [121], [124] и [145], в които се моделират и изследват прекъснати динамични процеси от практиката с помощта на описания по-горе клас уравнения (с променлива структура и импулси). Това обстоятелство потвърждава необходимостта от задълбоченото изучаване на качествата на решенията на тези диференциални уравнения.

Теоретични резултати: По-нататък със символите $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ще означаваме съответно Евклидовата норма и скаларното произведение в R^n . За точките $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ от R^n имаме

$$\langle x, y \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n, \quad \|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2} = \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 \right)^{1/2}.$$

Евклидовото разстояние между непразните множества $X, Y \subset R^n$ бележим както следва

$$\rho(X, Y) = \inf \{ \|x - y\|; x \in X, y \in Y \}.$$

Основният обект на изследване е следната начална задача за системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \text{ m.e. } t_{i-1} < t < t_i; \quad (1.1)$$

$$x(t_i + 0) = J_i(x(t_i)), \quad \varphi_i(x(t_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.3)$$

където:

- Фазовото пространство G на разглежданата система (1.1), (1.2) е непразна област от R^n ;
- Функциите $f_i: G \rightarrow R^n$;
- Функциите $\varphi_i: G \rightarrow R$;
- Функциите $J_i: G \rightarrow G$;
- Началната точка $x_0 \in G$.

Ще отбележим, че множествата

$$\Phi_i = \{x \in G; \varphi_i(x) = 0\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

се наричат превключващи. Решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3) ще означаваме с $x(t; x_0)$. Изпълнено е:

1.1. При $0 = t_0 \leq t < t_1$ решението на разглежданата задача съвпада с решението $x_1(t; t_0, x_0)$ на задачата

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x), \quad x(t_0) = x_0 = x_0^+;$$

1.2. При $t_0 \leq t < t_1$ е изпълнено

$$\varphi_1(x(t; x_0)) = \varphi_1(x_1(t; t_0, x_0)) > 0;$$

1.3. При $t = t_1$ имаме

$$\varphi_1(x(t_1; x_0)) = \varphi_1(x_1(t_1; t_0, x_0)) = 0;$$

1.4. Валидно е равенството

$$x(t_1 + 0; x_0) = J_1(x(t_1; x_0)) = J_1(x_1(t_1; t_0, x_0)) = x_1^+;$$

2.1. При $t_1 < t < t_2$ решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3) съвпада с решението $x_2(t; t_1, x_1^+)$ на задачата

$$\frac{dx}{dt} = f_2(x), \quad x(t_1) = x_1^+;$$

2.2. При $t_1 < t < t_2$ е изпълнено

$$\varphi_2(x(t; x_0)) = \varphi_2(x_2(t; t_1, x_1^+)) > 0;$$

2.3. При $t = t_2$ имаме

$$\varphi_2(x(t_2; x_0)) = \varphi_2(x_2(t_2; t_1, x_1^+)) = 0;$$

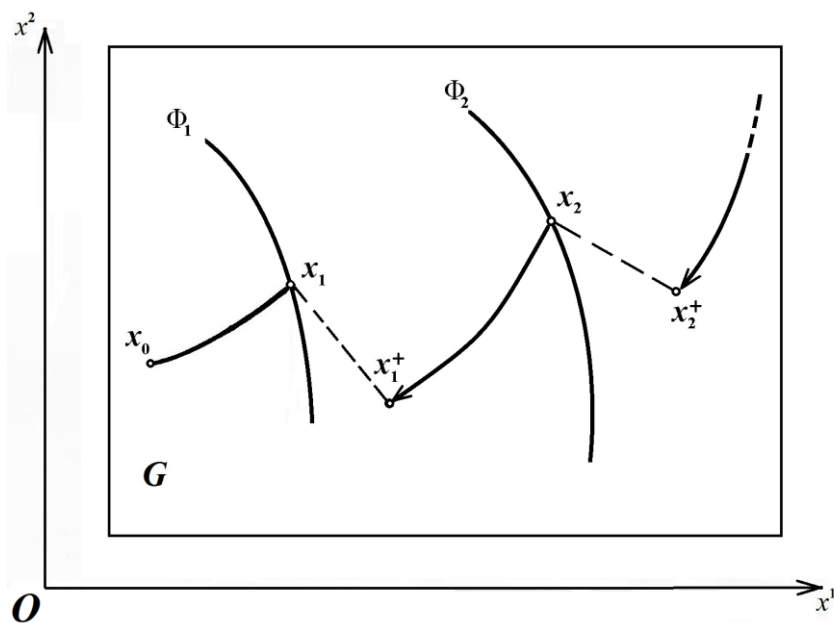
2.4. При $t = t_2$ е валидно импулсното равенство

$$x(t_2 + 0; x_0) = J_2(x(t_2; x_0)) = J_2(x_2(t_2; t_1, x_1^+)) = x_2^+$$

и т.н. (виж фиг. 1.1, показваща траекторията на разглежданата задача при $x \in R^2$).

Времеви константи t_i , $i = 1, 2, \dots$, се наричат превключващи моменти. Въвеждаме означенията

$$x_i = x(t_i; x_0) \text{ и } x_i^+ = J_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots$$



Фиг. 1.1.

В произволен интервал на непрекъснатост от вида $t_{i-1} < t < t_i$ решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3) стартира от точката $x_{i-1}^+ \in G$. В този интервал дясната страна на системата съвпада с функцията $f_i(x)$. В момента t_i , решението на разглежданата начална задача достига до превключващото множество Φ_i . В същия този момент t_i решението е подложено на импулсно въздействие. Това означава, че t_i е точка на

прекъсване от първи род за функцията $x(t; x_0)$. Освен това, точно тогава се сменя дясната страна на системата. В следващия интервал на непрекъснатост на решението дясната страна на системата съвпада с функцията $f_{i+1}(x)$.

Въвеждаме условията:

H1.1. Функциите $f_i \in C[G, R^n]$, $i = 1, 2, \dots$

H1.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in G) \Rightarrow \|f_i(x)\| \leq C_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.3. За всяка точка $x_0 \in G$ и за всяко $i = 1, 2, \dots$ решението $x_i(t; x_0)$ на началната задача

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x), \quad x(0) = x_0;$$

съществува и е единствено за $t \geq 0$.

H1.4. Съществуват константи $C_{Lip\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow |\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')| \leq C_{Lip\varphi_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.5. Съществуват константи $C_{J_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow |\varphi_{i+1}(J_i(x))| \geq C_{J_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Теорема 1.1. Нека са изпълнени условията H1.1-H1.5.

Тогава, ако редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{J_i}}{C_{f_{i+1}} C_{Lip\varphi_{i+1}}}$ е разходящ, то за всяка начална точка $x_0 \in G$

моментите на превключване за началната задача (1.1), (1.2), (1.3) не притежават точка на съгъстяване.

В следващата теорема условието H1.4 ще заменим със следното условие.

H1.6. Съществуват константи $C_{\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in G) \Rightarrow |\varphi_i(x)| \leq C_{\varphi_i} \rho(x, \Phi_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Теорема 1.2. Нека са изпълнени условията H1.1, H1.2, H1.3, H1.5 и H1.6.

Тогава, ако редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{J_i}}{C_{f_i} C_{\varphi_i}}$ е разходящ, то за всяка начална точка $x_0 \in G$

моментите на превключване за началната задача (1.1), (1.2), (1.3) не притежават точка на съгъстяване.

Забележка 1.1. Ще отбележим, че условие H1.4 е съществено различно от условие H1.6. Така например, от H1.4 следва, че функциите $\varphi_i, i = 1, 2, \dots$, са непрекъснати. От друга страна, може да се покаже, че условието H1.6 се удовлетворява от прекъснати функции.

В следващата теорема ще използваме допълнително следните две условия.

H1.7. Съществуват константи $C_{D_i} > 0$ и области $D_i, \Phi_i \subset D_i \subset G$, такива, че

$$(\forall x \in \partial D_i \cap G) \Rightarrow |\varphi_i(x)| \geq C_{D_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.8. Изпълнено е

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow J_i(x) \in G \setminus D_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Теорема 1.3. Нека са изпълнени условията H1.1, H1.2, H1.3, H1.6, H1.7 и H1.8.

Тогава, ако редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{D_i}}{C_{f_i} C_{\varphi_i}}$ е разходящ, то за всяка начална точка $x_0 \in G$

моментите на превключване за началната задача (1.1), (1.2), (1.3) не притежават точка на съгъстяване.

Модел на Gompertz с променлива структура и импулсни въздействия: Редица изолирани популации се развиват оптимално - например, техният растеж е сравнително по-интензивен, ако количеството на биомасата им се поддържа в определени граници. Обикновено тези количествени ограничения са в тясна зависимост от хранителните запаси, жизнената среда, вътрешновидовата конкуренция и др. За да се поддържа биомасата на популацията в тези „оптимални“ граници е възможно да се осъществяват външни, дискретни въздействия, които се състоят в мигновено отнемане или прибавяне на биомаса към нея. Един често изследван адекватен математически модел на такива процеси е уравнението на Gompertz с импулсни въздействия (виж [153], [188] и [267]). Ще обърнем внимание, че тук съвместно с импулсните въздействия се допуска и смяна на параметрите на системата (в частност това се отнася и за дясната страна на диференциалното уравнение). Съответната начална задача има вида:

$$\frac{dm}{dt} = m(r_i - \gamma_i \ln m), \quad \varphi_i(m(t)) = m_{\max i} - m(t) > 0, \quad t_{i-1} < t < t_i; \quad (1.9)$$

$$m(t_i + 0) = m(t_i) + I_i(m(t_i)) = J_i(m(t_i)), \quad \varphi_i(m(t_i)) = m_{\max i} - m(t_i) = 0; \quad (1.10)$$

$$m(0) = m_0, \quad (1.11)$$

където:

- $m = m(t)$ е количеството биомаса в момента $t \geq 0$. При $t_{i-1} < t < t_i$ е изпълнено

$$m(t) \in \left(0, \exp\left(\frac{r_i}{\gamma_i}\right)\right) = G_i, \quad i = 1, 2, \dots;$$

- Дясната страна на уравнението не се променя в различните интервали на непрекъснатост на решението на задачата (1.9), (1.10), (1.11). За $i = 1, 2, \dots$ имаме

$$f_i(m) = m(r_i - \gamma_i \ln m), \quad f_i: G_i \rightarrow R^+;$$

- $r_i = \text{const} > 0$ е репродуктивният потенциал на популацията в интервала $t_{i-1} < t < t_i$, $i = 1, 2, \dots$;

- $\gamma_i = \text{const} > 0$ е специфичен за вида коефициент на вътрешновидовата конкуренция (коефициент на вътрешновидово равновесие) в интервала $t_{i-1} < t < t_i$, $i = 1, 2, \dots$;

- $m_{\max i} > 0$, $i = 1, 2, \dots$, са горни бариерни константи, определящи оптималните горни гранични стойности на количеството на биомасата. Тези константи са специфични за всеки интервал на непрекъснатост на решението. Имаме

$$0 < m_{\max i} < \exp\left(\frac{r_i}{\gamma_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots;$$

- Превключващите функции

$$\varphi_i(m) = m_{\max i} - m, \quad \varphi_i: G_i \rightarrow R, \quad i = 1, 2, \dots;$$

- Всяко от превключващите множества се състои от една точка. Имаме

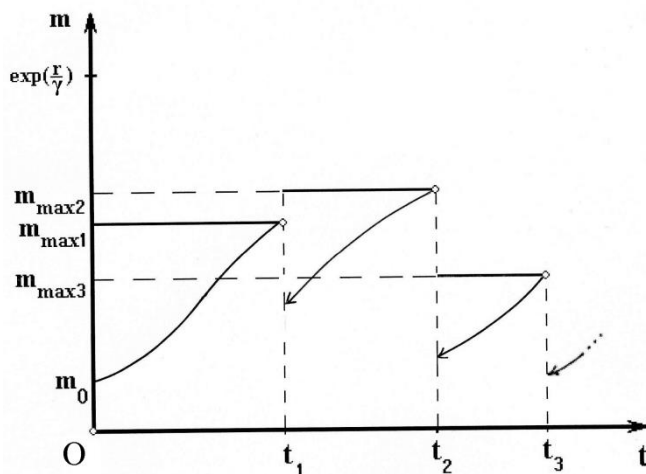
$$\Phi_i = \{m_{\max i}\}, \quad i = 1, 2, \dots;$$

- Функциите $I_i: G_i \rightarrow (-m_{\max i}, m_{\max(i+1)} - m_{\max i})$, $i = 1, 2, \dots$, отразяват големините на импулсните отнемания от биомасата при достигане на горната бариерна константа. Ако стойността на импулсната функция I_i е отрицателна в момента t_i , то в този момент се отнема биомаса от популацията. В противоположния случай – се добавя биомаса към популацията;

- m_0 е количеството на биомасата в началния момент $t = 0$. Валидни са неравенствата $0 < m_0 < m_{\max 1}$ (виж фиг. 1.3).

По-нататък за удобство ще предполагаме, че

$$\inf \left\{ \frac{r_i}{\gamma_i}, i = 1, 2, \dots \right\} = \frac{r}{\gamma} > 0 \text{ и } m_{\max i} < \exp\left(\frac{r}{\gamma}\right), i = 1, 2, \dots$$



Фиг. 1.3.

В горния модел се извършват дискретни въздействия в моментите, в които биомасата на разглежданата изолирана популация се изравни с горната бариерна константа. Моментите на импулсно въздействие означаваме с $t_1, t_2, \dots$. За тях са валидни неравенствата $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Ако в момента t_i е изпълнено $m(t_i) = m_{\max i}$, то се осъществява импулсно отнемане на биомаса с големина

$$-I_i(m(t_i)) = -I_i(m_{\max i}) > 0, i = 1, 2, \dots$$

Както казахме по-горе, целта на тези дискретни интервенции е да се поддържа биомасата в оптимални граници.

Разглежданият модел удовлетворява условията на Теорема 1.1. За конкретност предполагаме, че

$$I_i(m) = \frac{1}{2} m_{\max(i+1)} - m_{\max i}, i = 1, 2, \dots$$

От Теорема 1.1 следва, че ако редът $\sum_{i=1}^{\infty} m_{\max i}$ е разходящ, то независимо от началната точка m_0 , $0 < m_0 < m_{\max 1}$, моментите на превключване (импулсните моменти) за началната задача (1.9), (1.10), (1.11) не притежават точка на съгъстяване, т.е. $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Това (по друг начин казано) означава, че решенията на моделната задача не загиват поради импулсните въздействия.

Заклучение: Получените резултати за изследвания модел можем да разтълкуваме както следва. Да разгледаме изолирана (от присъствието на други видове) популация, развиваща се в среда без ограничение на хранителния ресурс. Нека растежът на биомасата на популацията се определя чрез закона на Gompertz. Нека изолираният вид е подложен на външни смущения, които се изразяват в импулсни отнемания на биомаса от него. Целта на тези външни интервенции е биомасата на популацията да се поддържа в оптимални граници. Отнеманията се осъществяват, когато биомасата на разглежданата популация достигне предварително зададени количества. Нека съвместно с импулсните въздействия се сменя и скоростта на развитие на популацията (променят се някои от параметрите на уравнението). Установено е, че за такъв тип развитие на изолирано общество, при наличието на определени условия, моментите на отнемания нямат точка на съгъстяване. Това означава, че животът на популацията е продължим до

безкрайност и не се наблюдава загиване на популацията поради импулсните въздействия. Освен това, във всеки ограничен времеви интервал се осъществяват краен брой отнемания на биомаса. Това е важна информация за производителя на биомасата (предварително се приема, че биомасата е полезна за производителя), тъй като при този режим на производство, характеризиращ се с отсъствие на кондензация на външните въздействия, се осигурява технологично време за реализиране на продукцията.

Глава 2. Устойчивост на диференциални уравнения с импулси в произволни моменти. Приложение

Резюме: В тази глава обект на изследване са нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения с импулсни въздействия, които се осъществяват в произволни моменти. С други думи, за импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$ (независимо от началната точка x_0) се предполага единствено, че те са последователни, т.е. влидни са неравенствата $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, където t_0 е началният момент.

В първия параграф на главата са намерени достатъчни условия за равномерна устойчивост и локално равномерна Липшицова устойчивост на ненулевите решения на такива системи.

Във втория параграф на главата на базата на получените теоретични резултати са посочени ограничения върху параметрите на обобщения импулсен модел на Verhulst, при които ненулевите решения са локално равномерно Липшицово устойчиви с подходящо избрани константи.

Теорията на устойчивостта на решенията на диференциалните уравнения с импулси можем условно да разделим на две основни части:

- Класическа теория на устойчивостта за тези уравнения: Изучени са редица типове устойчивост относно смущения в: началното условие, дясната страна, параметър, интегрални многообразия и др. Тук ще споменем само няколко монографични труда, посветени на споменатите по-горе видове устойчивост: А. Самойленко и Н. Перестюк [32], И. Стамова [257], V. Lakshmikantham и др. [199] и Д. Байнов и П. Симеонов [103];
- Специфична теория на устойчивостта: Смущенията са свързани с измененията на елементи, характерни само за този тип уравнения. Като пример ще посочим смущения, свързани с: импулсните моменти, импулсните хиперповърхнини, превключващите множества, бариерните криви и др. (виж А. Б. Дишлиев и др. [145], А. Б. Дишлиев и Д. Байнов [141]).

Както казахме в началото на резюмето, в тази глава ще изследваме няколко типа класическа устойчивост относно началното условие на решенията на импулсни системи диференциални уравнения с произволни моменти на импулсни въздействия.

Теоретични резултати: Обект на изследване е следната начална задача:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i; \quad (2.1)$$

$$x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (2.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.3)$$

където:

- Функцията $f: R^+ \times G \rightarrow R^n$;
- Фазовото пространство G е непразна област от R^n ;
- Функциите $I_i: G \rightarrow R^n$; $(Id + I_i): G \rightarrow G$, където Id е идентитетът в R^n ;
- Импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$, $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, са произволни (имат случаен характер);
- Началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times G$.

За удобство въвеждаме означението $T = \{t_1, t_2, \dots\}$. Решението на горната задача ще бележим с $x(t; t_0, x_0, T)$. По-нататък ще използваме означенията:

$$x_i = x(t_i; t_0, x_0, T), \quad x_i^+ = x_i + I_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Ще разгледаме началната задача без импулсни въздействия

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X); \quad (2.4)$$

$$X(t_0) = x_0. \quad (2.5)$$

Тази задача ще наричаме изродена на основната задача. Решението на изродената задача означаваме с $X(t; t_0, x_0)$.

Забележка 2.2 [151]. Валидна е следната връзка между решението $x(t; t_0, x_0, \tau)$ на основната задача с импулси (2.1), (2.2), (2.3) и решенията на съответната изродена система без импулси (2.4):

$$x(t; t_0, x_0, T) = \begin{cases} X(t; t_0, x_0), & t_0 \leq t \leq t_1; \\ X(t; t_1, x_1^+), & t_1 < t \leq t_2; \\ X(t; t_2, x_2^+), & t_2 < t \leq t_3; \\ \dots \end{cases} \quad (2.6)$$

Въвеждаме условията:

H2.1. Функцията $f \in C[R^+ \times G, R^n]$.

H2.2. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times G$ решението на изродената задача (2.4), (2.5) съществува и е единствено за $t \geq t_0$.

H2.3. Функциите $(Id + I_i): G \rightarrow G$.

H2.4. Изпълнено е $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Въвеждаме следните дефиниции.

Дефиниция 2.1.

(i) Ще казваме, че решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е **устойчиво относно началното условие при фиксирани импулсни моменти**, ако

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) \\ & \left(\forall T = \{t_1, t_2, \dots\}; t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty \right) \\ & (\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0, T) > 0): (\forall x_0^* \in G, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0^*, T) - x(t; t_0, x_0, T)\| < \varepsilon, \quad t_0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

(ii) Ако в горното определение δ не зависи от началната точка (t_0, x_0) , т.е.

$\delta = \delta(\varepsilon, T)$, ще казваме, че решенията на основната импулсна система (2.1), (2.2) са **равномерно устойчиви относно началното условие при фиксирани импулсни моменти**.

(iii) Ако в (i) δ не зависи от импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0)$, ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0, T)$ е **устойчиво относно началното условие при произволни импулсни моменти**.

- (iv) Ако в (i) δ не зависи от началната точка (t_0, x_0) и импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon)$, ще казваме, че решенията на системата (2.1), (2.2) са **равномерно устойчиви** относно началното условие при произволни импулсни моменти.

Дефиниция 2.3.

- (i) Ще казваме, че решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е **локално Липшицово устойчиво** при фиксирани импулсни моменти (с константа $L > 0$), ако

$$\begin{aligned} & (\exists L = \text{const} \in R^+): (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) \\ & \left(\forall T = \{t_1, t_2, \dots\}; t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty \right) \\ & (\exists \delta = \delta(t_0, x_0, T) > 0): (\forall x_0^* \in G, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0^*, T) - x(t; t_0, x_0, T)\| < L \|x_0^* - x_0\|, t \geq t_0. \end{aligned}$$

- (ii) Ако в горното определение δ не зависи от началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times G$, т.е. $\delta = \delta(T)$, ще казваме, че решенията на импулсната система (2.1), (2.2) са **локално равномерно Липшицово устойчиви** при фиксирани импулсни моменти с константа $L > 0$. В този случай имаме

$$\begin{aligned} & (\exists L = \text{const} \in R^+): \left(\forall T = \{t_1, t_2, \dots\}; t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty \right) \\ & (\exists \delta = \delta(T) > 0): (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) (\forall x_0^* \in G, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0^*, T) - x(t; t_0, x_0, T)\| < L \|x_0^* - x_0\|, t \geq t_0. \end{aligned}$$

- (iii) Ако в (i) δ не зависи от импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$, т.е. $\delta = \delta(t_0, x_0)$, ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0, T)$ на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е **локално Липшицово устойчиво** при произволни импулсни моменти с константа $L > 0$. По-точно имаме

$$\begin{aligned} & (\exists L = \text{const} \in R^+): (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) \\ & (\exists \delta = \delta(t_0, x_0) > 0): (\forall x_0^* \in G, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & \left(\forall T = \{t_1, t_2, \dots\}; t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty \right) \\ & \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0^*, T) - x(t; t_0, x_0, T)\| < L \|x_0^* - x_0\|, t \geq t_0. \end{aligned}$$

- (iv) Ще казваме, че решенията на основната система (2.1), (2.2) са **локално равномерно Липшицово устойчиви** при произволни импулсни моменти с константа $L > 0$, ако

$$\begin{aligned} & (\exists L = \text{const} \in R^+) (\exists \delta = \text{const} > 0): \\ & ((t_0, x_0) \in R^+ \times G) (\forall x_0^* \in G, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & \left(\forall T = \{t_1, t_2, \dots\}; t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty \right) \\ & \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0^*, T) - x(t; t_0, x_0, T)\| < L \|x_0^* - x_0\|, t \geq t_0. \end{aligned}$$

- (v) Ще казваме, че при зададена начална точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times G$ и зададени импулсни моменти $t_1, t_2, \dots$, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$, решението на задачата (2.1), (2.2),

(2.3) е **глобално Липшицово устойчиво при фиксирани импулсни моменти с константа $L > 0$** , ако

$$(\exists L = \text{const} \in R^+): (\forall x_0^* \in G)$$

$$\Rightarrow \|x(t; t_0, x_0^*, T) - x(t; t_0, x_0, T)\| < L \|x_0^* - x_0\|, \quad t \geq t_0.$$

(vi) Ще казваме, че решенията на системата (2.1), (2.2) при зададени импулсни моменти $t_1, t_2, \dots, t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$, са **глобално равномерно Липшицово устойчиви при фиксирани импулсни моменти с константа L** , ако

$$(\exists L = \text{const} \in R^+): (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) (\forall x_0^* \in G)$$

$$\Rightarrow \|x(t; t_0, x_0^*, T) - x(t; t_0, x_0, T)\| < L \|x_0^* - x_0\|, \quad t \geq t_0.$$

(vii) Ще казваме, че решенията на системата (2.1), (2.2) са **глобално равномерно Липшицово устойчиви при произволни импулсни моменти с константа L** , ако

$$(\exists L = \text{const} \in R^+): (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) (\forall x_0^* \in G)$$

$$(\forall T = \{t_1, t_2, \dots\}; t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty)$$

$$\Rightarrow \|x(t; t_0, x_0^*, T) - x(t; t_0, x_0, T)\| < L \|x_0^* - x_0\|, \quad t \geq t_0.$$

Тези типове устойчивост са изследвани от редица автори, от които тук ще посочим следните: F. Danna и S. Elaydi [129] (Липшицова устойчивост на решенията на уравнения без импулсни въздействия) и А. Б. Дишлиев и Д. Байнов [139] (Липшицова устойчивост на решенията на импулсни уравнения).

Основната цел на изследванията в тази глава е да се намерят достатъчни условия, гарантиращи различни типове устойчивост на решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) при произволни импулсни моменти.

Валидни са следните теореми.

Теорема 2.1. *Предполагаме, че:*

1. Валидни са условията H2.1-H2.4.

2. Съществува функция $C_{Lip} \in C[R^+, R^+]$ такава, че:

2.1. Изпълнено е

$$(\forall t \geq t_0) (\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq C_{Lip}(t) \|x' - x''\|;$$

2.2. $\int_0^\infty C_{Lip}(s) ds < \infty$.

3. Съществуват константи $C_{I_i} > 0$ такива, че:

3.1. Валидно е

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|I_i(x') - I_i(x'')\| \leq C_{I_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots;$$

3.2. $\sum_{i=1,2,\dots} C_{I_i} < \infty$.

Тогава решенията на импулсната система (2.1), (2.2) са **равномерно устойчиви** относно началното условие при произволни импулсни моменти.

Теорема 2.2. *Предполагаме, че:*

1. Валидни са условията H2.1-H2.4.

2. Решенията на системата без импулси (2.4) са **локално равномерно Липшицово устойчиви с константа L** .

3. Съществуват константи $L_i > 0$ такива, че:

3.1. Изпълнено е

$$(\forall x', x'' \in G) \Rightarrow \|(Id + I_i)(x') - (Id + I_i)(x'')\| \leq L_i \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots;$$

3.2. Съществува константа $\Lambda > 0$ такава, че

$$(\forall i = 0, 1, 2, \dots) \Rightarrow L^i \prod_{j=1, \dots, i} L_j \leq \Lambda.$$

Тогава решенията на импулсната система (2.1), (2.2) са локално равномерно Липшицово устойчиви с константа $L\Lambda$ при произволни импулсни моменти.

Логистичен модел на Verhulst с импулсни въздействия: Като илюстриращ пример на получените теоретични резултати, ще разгледаме развитието на изолирана популация, подложена на външни импулсни въздействия. Адекватен математически модел на такива процеси е следната начална задача за импулсния обобщен модел на Verhulst:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r}{K} N(K - N), \quad t \neq t_i; \quad (2.12)$$

$$N(t_i + 0) - N(t_i) = -p_i N(t_i), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (2.13)$$

$$N(0) = N_0, \quad (2.14)$$

където:

- $N = N(t)$ е количеството на биомасата в момента $t \geq 0$;
- $t_1, t_2, \dots$ са моментите, в които се осъществяват импулсните въздействия. Имаме $0 < t_1 < t_2 < \dots$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$;
- $K = \text{const} > 0$ е капацитетът на обкръжаващата среда;
- $r = \text{const} > 0$ е репродуктивният потенциал на популацията;
- $p_1, p_2, \dots$ са коефициентите, чрез които се изразява обемът на съответните отнемания. Изпълнено е $0 < p_i < 1, i = 1, 2, \dots$;
- N_0 е количеството на биомасата в началния момент $t = 0$, където $\kappa K < N_0 < K$ и $0 < \kappa = \text{const} < 1$.

Установено е, че описаният импулсен логистичен модел на Verhulst, описващ динамиката на изолирана популация, удовлетворява условията на Теорема 2.2. Следователно всички решения на импулсния логистичен модел (2.12), (2.13) с начални точки $(0, N_0)$, където $N_0 \in (\kappa K, K)$ и $0 < \kappa < 1$ са равномерно локално Липшицово устойчиви с константа $L\Lambda$ при произволни импулсни моменти.

Заклучение: Получените резултати за разгледания модел можем да изкажем още веднъж по следния начин. Да разгледаме изолирана (от присъствието на други видове) популация, развиваща се в среда без ограничение на хранителния ресурс. Нека растежът на биомасата на популацията се определя чрез класическия логистичен закон. Нека изолираният вид е подложен на външни смущения, които се изразяват в импулсни отнемания или добавяния на биомаса. Отнеманията се осъществяват в произволни моменти. Установено е, че за такъв тип модели биомасата има специфично устойчиво поведение (количеството на биомасата на популацията е равномерно локално Липшицово устойчиво). Това означава, че сравнително „малко“ изменение на началното количество на биомасата води до „малки“ изменения на биомасата във всеки момент след началото. Освен това, ако разликата на биомасите на две популации (развиващи се при едни и същи условия) в началния момент $t = 0$ е ΔN_0 , то разликите на биомасите на същите популации при $t > t_0$ не са по-големи от $L \cdot \Delta N_0$, където L е фиксирана положителна константа. Важно е да се отбележи, че горните оценки не зависят от избора на моментите $t_1, t_2, \dots$, в които се отнема или добавя биомаса към популациите.

Глава 3. Асимптотическа устойчивост на ненулеви решения на диференциални уравнения с променлива структура и нефиксирани моменти на импулсни въздействия. Приложение

Резюме. Основен обект на изследване в тази глава са ненулевите решения на нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения с променлива структура и импулсни въздействия. Десните страни на системата са изброимо много и тяхната смяна се извършва последователно във времето. На всяка една дясна страна съответства така наречената превключваща функция, която е дефинирана във фазовото пространство на системата. Поредната промяна на дясната страна, а също така и импулсното въздействие върху решението се извършва в момента, в който решението анулира съответната превключваща функция. Множеството от фазовото пространство, в което се анулира превключваща функция се нарича превключващо множество. Ясно е, че всяка дясна страна на системата притежава различно превключващо множество.

Тук се изследва асимптотическата устойчивост на ненулевите решения на описаните системи. Ще обърнем внимание, че в общия случай при ненулевите решения моментите на превключване $t_1, t_2, \dots$ на решението на изходната задача от една страна и моментите на превключване $t_1^*, t_2^*, \dots$ на решението на смутената задача от друга страна са различни ($t_1 \neq t_1^*, t_2 \neq t_2^*, \dots$). Това означава, че между всеки два съответни моменти на превключване t_i и $t_i^*, i=1, 2, \dots$, равномерна близост между тези две решения не може да се очаква. Това обстоятелство се отразява съществено на проведените изследвания в главата и значително ги затруднява. Разгледан е случаят, когато превключващите множества са хиперравнини от фазовото пространство на системата с променлива структура и импулси.

Основният резултат се състои в намирането на достатъчни условия, при които, ако ненулевите решения на всяка една от съответните системи без импулси и с фиксирани десни страни, които съвпадат с някоя от десните страни на системата с променлива структура, са експоненциално устойчиви, то решенията на разглежданата система с променлива структура и импулси са асимптотически устойчиви.

Теоретични резултати: Обект на изследване е следната начална задача:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \langle a_i, x(t) \rangle \neq \alpha_i, \quad t_{i-1} < t < t_i; \quad (3.1)$$

$$x(t_i) = x(t_i - 0), \quad \langle a_i, x(t_i) \rangle = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (3.2)$$

$$x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)); \quad (3.3)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.4)$$

където:

- Функциите $f_i : R^+ \times G \rightarrow R^n$;
- Фазовото пространство G на разглежданата система е непразна област от R^n ;
- Векторите $a_i \in R^n$, $\|a_i\| = 1$;
- Константите $\alpha_i \in R$;
- Функциите $I_i : G \rightarrow R^n$;
- $(Id + I_i) : G \rightarrow G$, където Id е идентитетът в R^n ;
- Началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times G$.

Както се вижда от (3.1) и (3.2) превключващите множества:

$$\Phi_i = \{x \in G; \langle a_i, x \rangle = \alpha_i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

представяват части от хиперравнини, разположени във фазовото пространство на системата.

Решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) означаваме с $x(t; t_0, x_0)$.

Заедно с основната задача (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) ще разгледаме и съответната смутена начална задача:

$$\frac{dx^*}{dt} = f_i(t, x^*), \quad \langle a_i, x^*(t) \rangle \neq \alpha_i, \quad t_{i-1}^* < t < t_i^*; \quad (3.5)$$

$$x^*(t_i^*) = x^*(t_i^* - 0), \quad \langle a_i, x^*(t_i^*) \rangle = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (3.6)$$

$$x^*(t_i^* + 0) = x^*(t_i^*) + I_i(x^*(t_i^*)); \quad (3.7)$$

$$x^*(t_0^*) = x_0^*, \quad (3.8)$$

където началната точка $(t_0^*, x_0^*) \in R^+ \times G$. В общия случай е изпълнено $(t_0^*, x_0^*) \neq (t_0, x_0)$.

Решението на горната задача означаваме с $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$.

Въпреки, че разликата между основната и смутената задачи е само в началната точка, то този факт дава отражение при определяне на дефиниционните интервали на решенията им. Съществено е влиянието на различните начални точки при пресмятане на моментите на промяна на десните страни на системата, които разбира се съвпадат с моментите на импулсни въздействия върху съответните им решения. Още веднъж ще подчертаем, че в общия случай са изпълнени неравенствата:

$$t_0^* \neq t_0, \quad t_1^* \neq t_1, \quad t_2^* \neq t_2, \dots, \quad x_0^* \neq x_0, \\ x^*(t; t_0^*, x_0^*) \neq x(t; t_0, x_0) \text{ при } t \geq t_0^{\max} = \max\{t_0^*, t_0\}.$$

Дефиниция 3.2. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) е:

- *устойчиво относно началното условие, ако:*

$$(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) \\ (\exists \delta = \delta(t_0, x_0, \varepsilon, \eta) > 0) : (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in G \cap B_\delta(x_0)) \\ \Rightarrow \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0^{\max} = \max\{t_0^*, t_0\}, \\ |t - t_i| > \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta;$$

- *равномерно устойчиво относно началното условие, ако:*

$$(\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) \\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta) > 0) (\exists \eta_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta) : \\ (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in G \cap B_\delta(x_0)) \\ \Rightarrow \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0^{\max}, |t - t_i| > \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots;$$

- *асимптотически устойчиво относно началното условие, ако решението е устойчиво и освен това*

$$(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G) (\forall \eta = \text{const} > 0) : \\ (\exists \lambda = \lambda(t_0, x_0) > 0) (\exists \eta_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta) : \\ (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \lambda) (\forall x_0^* \in G \cap B_\lambda(x_0)) \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty, |t - t_i| > \eta_i, i=1,2,\dots} \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\| = 0;$$

- *равномерно асимптотически устойчиво относно началното условие, ако то е равномерно устойчиво и още*

$$(\exists \lambda = \text{const} > 0) : (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) \\ (\exists T = T(\varepsilon, \eta) > 0) (\exists \eta_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta) :$$

$$\begin{aligned} & \left(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G \right) \left(\forall t \geq t_0 + T, |t - t_i| > \eta_i, i = 1, 2, \dots \right) \\ & \left(\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \lambda \right) \left(\forall x_0^* \in G \cap B_\lambda(x_0) \right) \Rightarrow \left\| x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0) \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

От горната дефиниция се вижда, че при всички видове устойчивости на произволно ненулево решение на системите диференциални уравнения с променлива структура и импулсно въздействие, за които моментите на превключване са променливи, са налице специфични особености. Така например, “равномерна близост” между решението на изходната задача и решението на съответната ѝ смутена задача (разликите са в началните условия) не се изисква за всяко $t \geq t_0^{\max}$. Равномерната близост е допустимо да се нарушава, когато времето принадлежи на “контролируемо малки” околности на моментите на превключване. Неравенството $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta$ показва, че времетраенето на “неконтролируемостта” между двете решения е с произволно (избрана) малка обща продължителност η .

По-нататък ще използваме следните условия:

НЗ.1. Функциите $f_i \in C[R^+ \times G, R^n]$, $i = 1, 2, \dots$

НЗ.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall (t, x) \in R^+ \times G \right) \Rightarrow \left\| f_i(t, x) \right\| \leq C_{f_i}, i = 1, 2, \dots$$

НЗ.3. Съществуват константи $C_{Id+I_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x', x'' \in \Phi_i \right) \Rightarrow \left\| (Id + I_i)(x') - (Id + I_i)(x'') \right\| \leq C_{Id+I_i} \|x' - x''\|, i = 1, 2, \dots,$$

т.е. функциите $(Id + I_i)$ са Липшицови с константи C_{Id+I_i} ;

НЗ.4. Изпълнени са равенствата $\|a_i\| = 1$ и съществуват константи $C_{\langle a_{i+1}, Id+I_i \rangle} > 0$ такива, че

$$\begin{aligned} & \left(\forall x \in \Phi_i \right) \Rightarrow \left| \langle a_{i+1}, (Id + I_i)(x) \rangle - \alpha_{i+1} \right| = \left| \langle a_{i+1}, x + I_i(x) \rangle - \alpha_{i+1} \right| \geq C_{\langle a_{i+1}, Id+I_i \rangle}, \\ & i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

НЗ.5. Валидни са неравенствата:

$$\left(\forall (t, x) \in R^+ \times G \right) \Rightarrow \left(\langle a_i, (Id + I_{i-1})(x) \rangle - \alpha_i \right) \cdot \langle a_i, f_i(t, x) \rangle < 0, i = 1, 2, \dots,$$

където $I_0 \equiv Id$.

НЗ.6. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{\langle a_i, Id+I_{i-1} \rangle}}{C_{f_i}}$ е разходящ.

НЗ.7. Съществуват константи $C_{\langle a_i, f_i \rangle} > 0$ такива, че

$$\left(\forall (t, x) \in R^+ \times G \right) \Rightarrow \left| \langle a_i, f_i(t, x) \rangle \right| \geq C_{\langle a_i, f_i \rangle}, i = 1, 2, \dots$$

НЗ.8. За всяко $i = 1, 2, \dots$ и за всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times G$ решението на началната задача (с непрекъсната дясна част и без импулси)

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), x(t_0) = x_0$$

съществува и е единствено за $t \geq t_0$.

Дефиниция 3.3. Ще казваме, че решенията $X_i(t; t_0, x_0)$, $i = 1, 2, \dots$, на съответните задачи са равномерно експоненциално устойчиви, ако

$$(\exists \lambda = \text{const} > 0)(\exists \Delta = \text{const} > 0):$$

$$\left(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G \right) \left(\forall i = 1, 2, \dots \right) \left(\forall x_0^* \in G \cap B_\Delta(x_0) \right)$$

$$\Rightarrow \|X_i(t; t_0, x_0^*) - X_i(t; t_0, x_0)\| < \|x_0^* - x_0\| \exp(-\lambda(t - t_0)), \quad t \geq t_0,$$

където $X_i(t; t_0, x_0^*)$ са съответно решенията на смутените начални задачи без импулси

$$\frac{dX}{dt} = f_i(t, X), \quad x(t_0) = x_0^*, \quad i = 1, 2, \dots$$

Следващата теорема е основна в тази глава.

Теорема 3.5. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1 - НЗ.5, НЗ.7 и НЗ.8.
2. Съществуват положителни константи C_f , C_{Id+I} , $C_{\langle a, Id+I \rangle}$, $C_{\langle a, f \rangle}$, такива, че:

$$C_{f_i} \leq C_f, \quad C_{Id+I_i} \leq C_{Id+I}, \quad C_{\langle a_{i+1}, Id+I_i \rangle} \leq C_{\langle a_i, Id+I \rangle}, \quad C_{\langle a_i, f_i \rangle} \geq C_{\langle a, f \rangle} > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

3. Решенията $X_i(t; t_0, x_0)$ на съответните начални задачи

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

са равностепенно експоненциално устойчиви с константа λ .

Тогава, ако е изпълнено неравенството

$$\frac{C_{Id+I} (C_f + C_{\langle a, f \rangle}) + C_f}{C_{\langle a, f \rangle}} < \exp\left(\frac{\lambda C_{\langle a, Id+I \rangle}}{C_f}\right), \quad (3.13)$$

то решението на разглежданата начална задача с променлива структура и импулси (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) е асимптотически устойчиво.

Терапевтичен модел с променлива структура и импулси: Често, лечението на заболявания се осъществява чрез поддържането на оптимална терапевтична лекарствена концентрация в кръвта (плазмата) на пациента. Поддържането на терапевтичната плазмена концентрация може да се осъществи по два основни начина:

- чрез непрекъснато подаване на лекарството;
- чрез прекъснато (импулсно) подаване на лекарството през определени времеви интервали (за повече подробности виж [29], [145] и [220]).

При втория тип лечение лекуващият лекар може да манипулира с два фармакокинетична параметър:

- размер на еднократната доза на лекарството D_i ;
- дължина на дозовия интервал T_{i+1} , $i = 1, 2, \dots$

По-точно D_i е количеството (дозата) при i -тото подаване на лекарството, а T_{i+1} е времето между моментите на i -тото и $(i+1)$ -то подаване на лекарството, $i = 1, 2, \dots$. В случаите, когато дозовите интервали са по-кратки от времето, необходимо за пълното елиминиране на лекарството от организма, то започва да се натрупва (кумулира). Тази кумулация е полезна за лечението на пациента, ако концентрацията на лекарството се поддържа в интервал, определен от минимална и максимална плазмени граници, наричани терапевтични граници на концентрацията на лекарството. Тези граници може да с променливи във времето, а също така е възможно те да зависят от броя на предхождащите вливания. От своя страна, терапевтичните граници обграждат така наречения терапевтичен прозорец. Фармакокинетичният модел на терапевтичното лечение се състои в избора на подходяща дозова схема на лечението, която гарантира поддържането на концентрацията на лекарството в рамките на терапевтичния прозорец.

Въвеждаме следните ограничения и означения:

1. Организмът се представя чрез един компартимент с обем V_d , в който лекарственото средство се разпределя;
2. Началният момент на лечението означаваме с t_0 ;

3. Времетраенето от началния момент на лечение t_0 до първия момент t_1 , в който се внася лекарствено средство с количество D_1 , означаваме с T_1 , т.е. изпълнено е равенството $t_1 = t_0 + T_1$;

4. Поредната доза D_i от лекарственото средство се внася мигновено и директно в компартимента в момента

$$t_i = t_{i-1} + T_i = t_0 + \sum_{j=1,2,\dots,i} T_j, \quad i=1, 2, \dots;$$

5. Елиминирането на лекарството във всеки един интервал $(t_{i-1}, t_i]$, $i=1, 2, \dots$, протича със скорост, която е пропорционална на моментното му количество в организма, т.е. разглежда се като процес от първи порядък, характеризиращ се със скоростна константа K_i ;

6. Означаваме с $A(t)$ количеството лекарствено средство в организма в момента $t \geq t_0$. За математическото моделиране на процеса на лечението е удобно да се въведе обемът, в който се разпределя лекарственото средство. Тази величина, наречена обем на разпределение, означаваме с V_d и е дефинирана така, че е изпълнено равенството

$$C(t) = \frac{A(t)}{V_d}, \quad t \geq t_0,$$

където $C(t)$ е концентрацията на лекарството, измерена в кръвта или по-общо в плазмата;

7. В началния момент t_0 ще предполагаме, че лекарствената концентрация е C_0 . В повечето случаи се приема, че $C_0 = 0$.

Математическият модел на идеализирания по-горе процес се описва с помощта на следната начална задача за диференциално уравнение с променлива структура и импулсни въздействия:

$$\frac{dC}{dt} = -K_i C, \quad C(t) > C^{\min}, \quad t_{i-1} < t \leq t_i; \quad (3.26)$$

$$C(t_i) = C(t_i - 0) = C^{\min}, \quad i=1, 2, \dots; \quad (3.27)$$

$$C(t_i + 0) = C(t_i) + \frac{D_i}{V_d} = C^{\min} + \frac{D_i}{V_d}; \quad (3.28)$$

$$C(t_0) = C_0, \quad (3.29)$$

където $C^{\min}$ и $C^{\max}$, $0 < C^{\min} < C^{\max}$, са съответно долната и горната граници на терапевтичната концентрация на лекарството. С други думи, ако концентрацията е между $C^{\min}$ и $C^{\max}$, то провежданото лечение (концентрацията на лекарственото средство) има полезно въздействие върху пациента;

Предполагаме:

- Валидни са неравенствата

$$C^{\min} < C_0 < C^{\max}.$$

Това означава, че началната концентрация на лекарството е в терапевтичните граници;

- Изпълнено е

$$C^{\min} + \frac{D_i}{V_d} \leq C^{\max} \Leftrightarrow D_i \leq V_d (C^{\max} - C^{\min}), \quad i=1, 2, \dots.$$

Следователно, всяка една дискретно въведена доза на лекарството привежда концентрацията отново в терапевтичните граници;

- Имаме

$$(\exists D^{\min} = \text{const} > 0): D_i \geq D^{\min}, \quad i=1, 2, \dots,$$

т.е. всяка лекарствена доза е ограничена отдолу;

- Вливането на лекарствено средство се извършва в моментите $t_1, t_2, \dots, t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, когато концентрацията $C(t)$ достига долната терапевтична граница $C^{\min}$.

За решението $C(t)$ на началната задача (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) и импулсните моменти получаваме равенствата:

$$C(t) = \left(C^{\min} + \frac{D_i}{V_d} \right) \exp(-K_{i+1}(t - t_i)), \quad t_i < t \leq t_{i+1};$$

$$t_{i+1} = t_i + \frac{1}{K_{i+1}} \ln \left(1 + \frac{D_i}{V_d \cdot C^{\min}} \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

- По-нататък ще предполагаме, че

$$(\exists K^{\min} = \text{const}, K^{\max} = \text{const}, 0 < K^{\min} < K^{\max}): (\forall i = 1, 2, \dots) \Rightarrow (K^{\min} \leq K_i \leq K^{\max}).$$

Означаваме:

$$C_f = K^{\max} C^{\max}; \quad C_{Id+I} = \mu; \quad C_{\langle a, Id+I \rangle} = \frac{D^{\min}}{V_d}; \quad C_{\langle a, f \rangle} = K^{\min} C^{\min}.$$

където μ е произволна положителна константа. Лесно се вижда, че са валидни неравенствата:

$$C_{f_1} \leq C_f, \quad C_{f_2} \leq C_f, \dots ; ;$$

$$C_{\langle a_2, Id+I_1 \rangle} \geq C_{\langle a, Id+I \rangle}, \quad C_{\langle a_3, Id+I_2 \rangle} \geq C_{\langle a, Id+I \rangle}, \dots,$$

Това означава, че условие Н3.6 е в сила. Предполагаме, че е изпълнено неравенството

$$\frac{K^{\max} C^{\max}}{K^{\min} C^{\min}} < \exp \left(\frac{K^{\min} D^{\min}}{V_d K^{\max} C^{\max}} \right), \quad (3.30)$$

което е еквивалентно на (3.13).

Условията на Теорема 3.5 се удовлетворяват от въведения терапевтичен модел с променлива структура и импулсни въздействия и посочените по-горе ограничения, наложени върху неговите параметри. Следователно, решението на началната задача (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) е асимптотически устойчиво.

Заклучение: Получените резултати за разгледания модел можем да преформулираме в термините на фармакокинетиката както следва. Разглеждаме пациент, лечението на когото се състои в поддържането на концентрацията на лекарствено средство $C = C(t)$ в кръвта му във фиксирани терапевтични граници, т.е.

за всеки момент t от неговото лечение е изпълнено $C^{\min} \leq C(t) \leq C^{\max}$. Вливането на лекарството се осъществява за пренебрежимо малък период от време (в сравнение с общата продължителност на лечението), поради което можем да считаме, че изменението на концентрацията е мигновено под формата на импулси. Вливанията се осъществяват в моментите, когато концентрацията достигне долната терапевтична граница. Освен това е допустимо константите на метаболизиране и на екстрекция на непромененото лекарство да се изменят поради различни съображения след всяко приемане на лекарството.

Тогава при посочените по-горе органичния (виж неравенство (3.30)) изменението на концентрацията на лекарството е асимптотически устойчиво. Това по друг начин казано означава, че ако разгледаме две лечения от разгледания метод, които:

1. Имат лекарствени концентрации съответно $C^1(t)$ и $C^2(t)$;
2. Провеждат се при едни и същи вътрешни и външни условия;
3. Различават се незначително само в началните концентрации C_0^1 и C_0^2 на лекарствено средство,

то в течение на времето концентрациите $C^1(t)$ и $C^2(t)$ на двете лечения ще се изравнят, т.е. влидно е асимптотичното равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (C^1(t) - C^2(t)) = 0.$$

Глава 4. Оптимални импулсни въздействия и максимални интервали на съществуване на решения на диференциални уравнения с импулси. Приложение

Резюме: Основен обект на изследване в последната глава е клас нелинейни, автономни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива на съответната начална задача среща така нареченото "барьерно множество". Това множество е разположено в разширеното фазово пространство. В разглежданата глава то съвпада с "барьерна права", която е успоредна на оста на времето. Същевременно тази права съвпада с контура на полуравнината, в която лежат интегралните криви на съответните начални задачи.

За описания тип уравнения са намерени: броят на импулсните въздействия; импулсните моменти и големините на импулсни въздействия, които са оптимални в следния смисъл.

Нека:

1. Полуравнината, определена с помощта на барьерната права, която съдържа интегралните криви на диференциалното уравнение, да наречем разширена фазова полуравнина;
2. Интегралните криви на уравненията от посочения клас (при всеки избор на началната точка от разширената фазова полуравнина) задължително пресичат барьерното множество, което съвпада с барьерната права. С други думи интегралната крива винаги достига контура на разширената фазова полуравнина;
3. В моментите, в които интегралната крива пресича барьерното множество чрез подходящи импулсни въздействия интегралната крива се премества мигновено отново в разширената фазова полуравнина.

В първия параграф на главата е намерен набор от импулсни въздействия, които сумарно са ограничени и при които съответната интегралната крива има максимален интервал на съществуване в разширената фазова полуравнина.

Във втория параграф на тази глава получените резултати са приложени върху импулсен математически модел за лечение с оптимално (максимално по продължителност) поддържане на терапевтичната концентрация на лекарството при наличието на ограничен обем от него.

В последните години диференциалните уравнения с променливи моменти на импулсно въздействие и приложенията им при решаване на различни практически оптимизационни задачи предизвикват сериозен научен интерес. Тук ще посочим следните резултати: [54], [55], [56], [57], [58], [59], [61], [62], [76], [77], [79], [124], [135], [140], [145], [146], [153], [164], [165], [176], [184], [192] и [193].

Понятията: барьерни множества (в частност барьерни криви или прави); разширена фазова полуравнина; импулсни въздействия, за които моментите на осъществяване се определят с помощта на барьерните множества; както и понятието непрекъсната зависимост на решенията по отношение на тези множества и др. подобни се въвеждат и изследват за първи път в [145] и [146].

Теоретични резултати: Основен обект на изследване е следната начална задача за нелинейни автономни диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \text{ ако } x(t) > X^{\min}, \text{ м.е. } t_{i-1} < t \leq t_i; \quad (4.1)$$

$$x(t_i) = X^{\min}, i = 1, 2, \dots; \quad (4.2)$$

$$x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i = X^{\min} + I_i; \quad (4.3)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (4.4)$$

където:

- Функцията $f: R^+ \rightarrow R$;
- Константата $X^{\min} \in R^+$;
- Импулсните въздействия $I_i \in R^+$, $i = 1, 2, \dots$. Означаваме $I = \{I_1, I_2, \dots\}$;
- Началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times (X^{\min}, \infty)$.

По-нататък множеството

$$\Phi^{\min} = \{(t, x); t \in R^+, x = X^{\min}\}$$

ще наричаме бариерно (в случая бариерна права). Ще отбележим, че при $t \in R^+$ е възможно интегралната крива на задачата (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) да срещне многократно бариерното множество $\Phi^{\min}$. Нека тези срещи се реализират последователно в моментите $t_1, t_2, \dots$, за които са валидни неравенствата $0 < t_0 < t_1 < t_2, \dots$. Тези моменти ще наричаме превключващи или импулсни моменти. Решението на разглежданата задача е по части непрекъсната функция с точки на прекъсване, съвпадащи с импулсните моменти. Точките на прекъсване са от първи род и в тях решението е непрекъснато отляво. По-точно имаме:

1. При $t_0 \leq t \leq t_1$ решението на задачата (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) е идентично с решението на задачата (без импулси)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0; \quad (4.5)$$

2. Ако интегралната крива среща в момента t_i бариерното множество, т.е. ако е изпълнено $x(t_i) = X^{\min}$, то при $t_i < t \leq t_{i+1}$, решението на задачата (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) съвпада с решението на задачата (без импулсни въздействия):

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i = X^{\min} + I_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Решенията на задачите (4.5) и (4.6) ще означаваме съответно с $x(t; t_0, x_0)$ и $x(t; t_i, X^{\min} + I_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Решението на изследваната задача с импулси (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) означаваме с

$$x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1, I_2, \dots) = x_{imp}(t; t_0, x_0, I).$$

Ако положим

$$I_0 = x_0 - X^{\min},$$

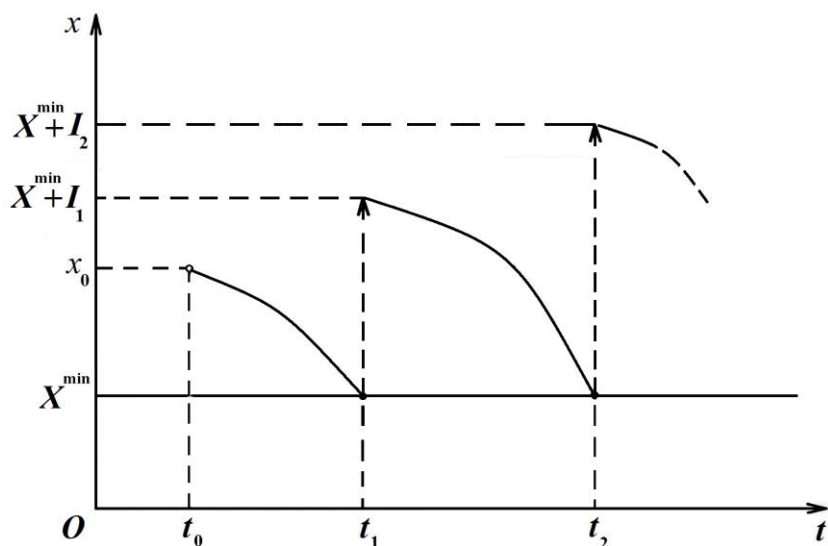
ще получим

$$x_{imp}(t; t_0, x_0, I) = x(t; t_i, X^{\min} + I_i), \quad t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Накрая, като преценим влиянието на импулсните въздействия, можем да запишем

$$x_{imp}(t; t_0, x_0, I) = \begin{cases} x_{imp}(t; t_0, x_0), & t_0 \leq t \leq t_1; \\ x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1, I_2, \dots, I_i), & t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.8)$$

Казано по друг начин, във всеки момент решението зависи само от импулсните въздействия, които са се реализирали преди този момент. Решението не зависи от предстоящите въздействия (фиг. 4.1).



Фиг. 4.1.

Освен основната задача ще разгледаме и съответната ѝ смутената задача

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \text{ ако } x(t) > X^{\min}, \text{ т.е. } t_{i-1}^* < t \leq t_i^*; \quad (4.9)$$

$$x(t_i^*) = X^{\min}, i = 1, 2, \dots; \quad (4.10)$$

$$x(t_i^* + 0) = x(t_i^*) + I_i^* = X^{\min} + I_i^*; \quad (4.11)$$

$$x(t_0^*) = x_0^*, \quad (4.12)$$

където:

- Импулсните въздействия $I_i^* \in R^+, i = 1, 2, \dots$. В общия случай е възможно $I_i \neq I_i^*, i = 1, 2, \dots$.

Ще използваме означението $I^* = \{I_1^*, I_2^*, \dots\}$;

- Импулсните въздействия се осъществяват в моментите $t_1^*, t_2^*, \dots$, за които са валидни неравенствата $t_0^* < t_1^* < t_2^* < \dots$;

- Началната точка $(t_0^*, x_0^*) \in R^+ \times (X^{\min}, \infty)$.

Решението на смутената начална задача (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) означаваме с

$$x_{imp}(t; t_0^*, x_0^*, I_1^*, I_2^*, \dots) = x_{imp}(t; t_0^*, x_0^*, I^*).$$

За решението на смутената задача са валидни равенства, аналогични на (4.7) и (4.8).

Забележка 4.1. Както се вижда смущенията в последната задача са свързани с промени в големините на импулсните въздействия и началното условие. В следващите разглеждания ще предполагаме, че $(t_0^*, x_0^*) = (t_0, x_0)$, т.е. ще изследваме пертурбациите, които са свързани само с импулсните въздействия.

Ясно е, че смущенията се отразяват върху импулсните моменти. В общия случай имаме $\{t_1^*, t_2^*, \dots\} \neq \{t_1, t_2, \dots\}$.

Също така е ясно, че при съвпадение на началните точки имаме съвпадение и на първите импулсни моменти на решението на изходната задача и решението на нейната смутена задача, т.е. $t_1^* = t_1$.

Въвеждаме следните условия:

H4.1. Функцията $f \in C[R^+, R^-]$.

H4.2. Функцията f е монотонно намаляваща при $x \geq X^{\min}$.

Н4.3. Съществува положителна константа $I^{\min}$ такава, че всички импулсни въздействия са не по-малки от нея.

Н4.4. За всяка начална точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times (X^{\min}, \infty)$ решението на началната задача (4.5) съществува и е единствено за $t \geq t_0$.

Дефиниция 4.1. Нека константите $I^{\min}, I_{\Sigma} \in R^+$ и $I^{\min} \leq I_{\Sigma}$. (Константата $I^{\min}$ е фиксираната долна граница на големините на импулсните въздействия. Константата I_{Σ} е максималната допустима сума от големините на импулсните въздействия).

Ще казваме, че импулсните въздействия $I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*$ са допустими, ако са валидни неравенствата:

1. $I_1^* \geq I^{\min}, I_2^* \geq I^{\min}, \dots, I_k^* \geq I^{\min}$;
2. $I_1^* + I_2^* + \dots + I_k^* \leq I_{\Sigma}$.

Дефиниция 4.2. Нека константите $I^{\min}, I_{\Sigma} \in R^+$ и $I^{\min} \leq I_{\Sigma}$.

Ще казваме, че импулсните въздействия $I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt}$ са оптимални, ако:

1. $I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt}$ са допустими импулсни въздействия;
2. $t_{k_{opt}+1}^{opt}$ е моментът, в който интегралната крива $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt}))$ среща бариерното множество за $(k_{opt} + 1)$ -ви път;
3. $I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*$ са произволни допустими импулсни въздействия;
4. t_{k+1}^* е моментът, в който интегралната крива $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*, \dots, I_k^*))$ среща бариерното множество за $(k + 1)$ -ви път, тогава е изпълнено $t_{k_{opt}+1}^{opt} \geq t_{k+1}^*$.

Освен това броят на импулсните въздействия k_{opt} , решението $x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt})$ и съответната интегрална крива също ще наричаме оптимални.

Дефиниция 4.3. Нека $x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*)$ е решение на началната задача (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), подложено на k на брой импулсни въздействия.

Тогава интервалът $J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) = [t_0, t_{k+1}^*]$ се нарича максимален интервал на съществуване на интегралната крива в разширената фазова полуравнина, ако:

1. $(\forall t \in J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*)) \Rightarrow x(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) \geq X^{\min}$;
2. $(\forall t > t_{k+1}^*) \Rightarrow x(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) < X^{\min}$.

Важни резултати резултати в тази глава (със самостоятелно значение) се съдържат в следните теореми:

Теорема 4.5. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н4.1, Н4.2 и Н4.4.
2. $I_1, I_2 \in R^+, I_1^* = I_2$ и $I_2^* = I_1$.

Тогава

$$J(I_1^*, I_2^*) = J(I_1, I_2).$$

Теорема 4.6. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н4.1, Н4.2 и Н4.4.

2. $I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*, I_1, I_2, \dots, I_n \in R^+$;
3. $I_1^* = I_1, \dots, I_{i-1}^* = I_{i-1}, I_i^* = I_{i+1}, I_{i+1}^* = I_i, I_{i+2}^* = I_{i+2}, \dots, I_n^* = I_n$.

Тогава

$$J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*) = J(I_1, I_2, \dots, I_n).$$

Теорема 4.7. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н4.1, Н4.2 и Н4.4.
2. $I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*, I_1, I_2, \dots, I_n \in R^+$;
3. $\{I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*\} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$.

Тогава

$$J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*) = J(I_1, I_2, \dots, I_n).$$

Теорема 4.8. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н4.1, Н4.2 и Н4.4.
2. $I_1^*, I_1, I_2 \in R^+$ и $I_1^* = I_1 + I_2$.

Тогава

$$J(I_1^*) \subset J(I_1, I_2).$$

Теорема 4.9. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н4.1, Н4.2 и Н4.4.
2. $I_1^*, I_2^*, I_1, I_2 \in R^+$, $I_1^* + I_2^* = I_1 + I_2$ и $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}(I_1^* + I_2^*)$.

Тогава

$$J(I_1^*, I_2^*) \subset J(I_1, I_2).$$

Основният резултат е следната теорема:

Теорема 4.10. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н4.1 - Н4.4.
2. Сумата от всички импулсни въздействия е равна на $I_\Sigma \in R^+$.
3. Константата $n \in N$ удовлетворява неравенствата

$$\frac{1}{n+1} I_\Sigma < I^{\min} \leq \frac{1}{n} I_\Sigma.$$

4. Импулсните въздействия $I_1, I_2, \dots, I_n$ са допустими и $I_1 = I_2 = \dots = I_n = \frac{1}{n} I_\Sigma$.
5. Импулсните въздействия $I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*$ са допустими, т.е. $I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^* \in R^+$, $I_1^* \geq I^{\min}$, $I_2^* \geq I^{\min}, \dots, I_k^* \geq I^{\min}$ и $I_1^* + I_2^* + \dots + I_k^* = I_\Sigma$.

Тогава

$$J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) \subset J(I_1, I_2, \dots, I_n).$$

Оптимален терапевтичен модел с импулсни въздействия: Поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта чрез дискретно във времето импулсно подаване на лекарството се описва (за повече подробности виж примера от глава 3) с помощта на системата:

$$\frac{dC}{dt} = -KC, \quad C(t) > C^{\min}, \quad t_{i-1} < t \leq t_i; \quad (4.37)$$

$$C(t_i) = C^{\min}, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (4.38)$$

$$C(t_i + 0) = C(t_i) + \frac{D_i}{V_d} = C^{\min} + \frac{D_i}{V_d}; \quad (4.39)$$

$$C(t_0) = C_0, \quad (4.40)$$

където:

- $A(t)$ е количеството лекарствено средство в организма на пациента в момента $t \geq t_0$;
- V_d е обемът на разпределение на лекарството;
- $C(t)$ е концентрацията на лекарството, измерена в кръвта,

$$C(t) = \frac{A(t)}{V_d}, \quad t \geq t_0;$$

- $K = K_m + K_e$, тук K_m е константата на метаболизиране, а K_e е константата на екстрекция на непромененото лекарство;
- D_i е дозата (обемът или количеството на лекарственото средство) при i -тото подаване на лекарството;
- $C^{\min}$ и $C^{\max}$, $C^{\min} < C^{\max}$, са съответно долната и горната граници на терапевтичната концентрация на лекарството. С други думи, ако концентрацията на лекарството е между $C^{\min}$ и $C^{\max}$, то провежданото лечение има полезно въздействие върху пациента;
- t_0 е началният момент на лечението;
- C_0 е началната концентрация на лекарството.

Предполагаме:

- Валидни са неравенствата $C^{\min} < C_0 < C^{\max}$. Това означава, че началната концентрация на лекарството е в терапевтичните граници;
- Изпълнено е

$$C^{\min} + \frac{D_i}{V_d} \leq C^{\max} \Leftrightarrow D_i \leq V_d (C^{\max} - C^{\min}), \quad i=1, 2, \dots$$

Следователно, всяка еднократна доза на лекарството довежда концентрацията в терапевтичните граници;

- Имаме

$$(\exists D^{\min} = \text{const} > 0): D_i \geq D^{\min}, \quad i=1, 2, \dots,$$

т.е. всяка лекарствена доза е ограничена отдолу;

- Запасите от лекарство са фиксирани и са в обем D_Σ . Изпълнено е

$$D_\Sigma \geq V_d (C^{\max} - C^{\min}).$$

Целта е да се оптимизира схемата на лечение. Схемата на лечение се състои в определяне на последователните дози на лекарството, а също така и моментите, в които се осъществяват дискретните лекарствени интервенции. Оптимална схема на лечение е тази, при която терапевтичната концентрация се поддържа максимално дълъг период от време с ограничен ресурс от лекарството.

Условията Н4.1 - Н4.4 се проверяват тривиално. Теоретичните резултати са валидни за разглеждания математически модел. Ще посочим оптималната схема на лечение (базираща се на Теорема 4.10):

1. Броят на дозите получаваме по формулата $n_{opt} = \left\lceil \frac{D_\Sigma}{D^{\min}} \right\rceil$;
2. Оптималните дози са в обем: $D_1 = D_2 = \dots = D_{n_{opt}} = D^{opt} = \frac{D_\Sigma}{n_{opt}}$.

Оптималното решение $C^{opt}(t)$ на горната начална задача (4.37), (4.38), (4.39), (4.40) се получава както следва:

$$C^{opt}(t) = \left(C^{\min} + \frac{D^{opt}}{V_d} \right) \exp(-K(t - t_i)), \quad t_i < t \leq t_{i+1};$$

$$t_{i+1} = t_i + \frac{1}{K} \ln \left(1 + \frac{D^{opt}}{V_d C^{\min}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n_{opt}.$$

Накрая, установяваме, че максималното време $t^{\max}$ за поддържане на терапевтичната концентрация при наличен лекарствен ресурс в обем D_Σ е

$$t^{\max} = t_0 + \frac{1}{K} \ln \frac{C_0}{C^{\min}} + \frac{1}{K} \left[\frac{D_\Sigma}{D^{\min}} \right] \ln \left(1 + \frac{D_\Sigma}{\left[\frac{D_\Sigma}{D^{\min}} \right] V_d C^{\min}} \right).$$

Заклучение: Получените резултати за модела можем да преформулираме както следва. Разглеждаме пациент, лечението на когото се състои в поддържането на концентрацията на лекарственото средство $C = C(t)$ в кръвта му във фиксирани терапевтични граници, т.е. $C^{\min} \leq C(t) \leq C^{\max}$. Вливането на лекарството се осъществява за пренебрежимо малък период от време (в сравнение с общата продължителност на лечението), поради което можем да считаме, че изменението на концентрацията е мигновено под формата на импулси. Предполагаме, че еднократната доза D_i , $i = 1, 2, \dots$, е ограничена от долу, с други думи в кръвта може да се влее количество лекарство, което е ограничено отдолу. Изпълнени са неравенствата $D_i \geq D^{\min}$, $i = 1, 2, \dots$. Предполагаме, че лекарственото средство, с което разполагаме, е ограничено. Нека в началния момент на лечението използваното лекарство е в обем D_Σ . Задачата, която е решена по-горе, се състои в следното:

1. Определен е броят n_{opt} на вливания на лекарствено средство;
2. Намерени са моментите $t_1, t_2, \dots$ на вливане;
3. Пресметнати са обемите на всяко вливане D_i , $i = 1, 2, \dots$;
4. Намерени са стойностите на концентрацията $C = C^{opt}(t)$ във всеки момент от интервала $t_0 \leq t \leq t^{\max}$

така, че концентрацията на лекарството в кръвта на пациента да е в терапевтични граници за максимално дълъг период от време $\Delta t = t^{\max} - t_0$ (до пълно изразходване на лекарството).

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Алимов Ю., О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями, Автоматика и телемеханика, (1961), Том 22, № 7, 817-830.
2. Андронов А., Витт А., Хайкин С., Теория колебаний, Наука, Москва, (1981).
3. Ахиезер Н., Лекции по теории аппроксимации, Москва, (1965).
4. Бабицкий В., Крупенин В., Колебания в сильно нелинейных системах, Наука, Москва, (1985).
5. Баутин Н., Теория точечных преобразований и динамическая теория часов, Труды ICNO V, АН УССР, Киев, (1963), Том 2, 29-54.
6. Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях, Научова думка, Москва, (1988).
7. Борисенко С., Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсным воздействием, Укр. Математический журнал, (1983), Том 35, № 2, 144-150.
8. Борисенко С., Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсным воздействием, Дифференциальные уравнения, (1986), Том 22, № 5, 884-886.
9. Гургула С., Перестюк Н., Об второго метода Ляпунова для систем с импульсными воздействием, Доклады АН Укр. ССР, (1982), Сер. А, Том 10, 11-14.
10. Завалишин С., Сесекин А., Дрозденко С., Динамические системы с импульсной структурой, Средне Урал. кн. изд-во, Свердловск, (1983).
11. Завалишин С., Сесекин А., Импульсные процессы: Модели и приложения, Наука, Москва, (1991).

12. Калитин Б., О колебаниях маятника с ударным импульсом, *Дифференциальные уравнения*, (1969), Том 5, № 7, 1267-1274.
13. Калитин Б., О колебаниях маятника с ударным импульсом, часть 2, *Дифференциальные уравнения*, (1970), Том 6, № 12, 2174-2181.
14. Калитин Б., О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением, *Дифференциальные уравнения*, (1971), Том 7, № 3, 540-542.
15. Каранджулов Л., Стоянова Я., Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, *Весті НАН Беларусі*, (2003), Том 2, 59-61.
16. Каранджулов Л., Стоянова Я., Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, *Дифференциальные уравнения*, (2004), Том 40, № 3, 310-323.
17. Кобринский А. Е., Кобринский А. А., *Выброударные системы*, Наука, Москва, (1973).
18. Козлов Р., К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, *Дифференциальные уравнения*, (1974), Том 10, № 7, 1264-1271.
19. Крылов Н., Боголюбов Н., *Введение в нелинейную механику*, Изд. УССР, Киев, (1937).
20. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, *Дифференциальные уравнения*, (1967), Том 3, № 3, 395-409.
21. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями II, *Дифференциальные уравнения*, (1967), Том 3, № 5, 869-878.
22. Мильман В., Мышкис А., Об устойчивости движения при наличии толчков, *Сиб. Математический журнал*, (1960), Том 1, № 2, 233-237.
23. Мильман В., Мышкис А., Случайные толчки в линейных динамических системах, *Приближенные методы решения дифференциальных уравнений*, Киев, Изд-во АН УССР, (1963), 64-81.
24. Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью, *Институт математики НАН Украины, Киев*, (2007).
25. Плотников В., Китанов Н., Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления, *Кибернетика и системный анализ*, (2002), Том 5, 71-81.
26. Плотников В., Китанов П., Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами, *Укр. Математический журнал*, (1997), Том 49, № 11, 1504-1511.
27. Плотников В., Плотникова Л., Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами, *Укр. Математический журнал*, (1995), Том 47, № 11, 1526-1532.
28. Попов Е., *Динамика систем автоматического регулирования*, Гостехиздат, Москва, (1964).
29. Радева В., Орбитална Хаусдорфова зависимость и устойчивость на дифференциальных уравнениях с променливой структурой и импульсами, *Автореферат на диссертация за придобиване на образователна и научна степен „доктор“*, 2015.
30. Рожко В., Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах, *Дифференциальные уравнения*, (1975), Том 11, № 6, 1005-1012.
31. Самойленко А., Перестюк Н., Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Дифференциальные уравнения*, (1974), Том 10, № 11, 2001-2010.
32. Самойленко А., Перестюк Н., *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев, (1987).
33. Самойленко А., Перестюк Н., О методе усреднения в системах с импульсным воздействием, *Укр. Математический журнал*, (1974), Том 24, № 3, 411-418.
34. Самойленко А., Перестюк Н., Трофимчук С., Проблема “биений” в импульсных системах, *Институт математики АН УССР, Киев*, (1990).
35. Самойленко А., Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, *Укр. Математический журнал*, (1961), Том 13, № 3, 85-94.
36. Филатов А., Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, “ФАН”, Узбекской ССР, Ташкент, (1971).
37. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях, *Дифференциальные уравнения*, (1979), Том 15, № 10, 1814-1823.
38. Филиппов А., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, Москва, (1985).
39. Халанай А., Векслер Д., *Качественная теория импульсных систем*, Мир, Москва, (1971).
40. Цыпкин Я., Критерии абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента, *ДАН СССР*, (1964), Том 155, № 5, 1029-1032.
41. Черноусько Ф., Акуленко Л., Соколов Б., *Управление колебаниями*, Наука, Москва, (1980).
42. Agarwal R., Franco D., O'Regan D., Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations, *Equations Mathematicae*, (2005), Vol. 69, № 1-2, 83-96.
43. Agarwal R., O'Regan D., A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem, *Applied Mathematics and Computation*, (2003), Vol. 161, № 2, 433-419.
44. Agarwal R., O'Regan D., Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, (2000), Vol. 114, № 1, 51-59.

45. Ahmad B., Sivasundaram S., Dynamics and stability of impulsive hybrid setvalued integro-differential equations with delay, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2289-2293.
46. Ahmad B., Sivasundaram S., Instability criteria for impulsive hybrid state dependent delay integrodifferential systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2010), Vol. 11, № 2, 750-758.
47. Ahmad B., Sivasundaram S., Setvalued perturbed hybrid integro-differential equations and stability in terms of two measures, *Dynamic Systems and Applications*, (2007), Vol. 16, 299-310.
48. Ahmad B., Sivasundaram S., The monotone iterative technique for impulsive hybrid set valued integro-differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 12, 2260-2276.
49. Ahmad S., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E., Continuous-time additive Hopfield-type neural networks, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.
50. Ahmad S., Stamov G., Almost periodic solutions of N-dimensional impulsive competitive systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.
51. Ahmad S., Stamova I., Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 3, 786-791.
52. Akhmet M., Alzabut J., Zafer A., Perron's theorem for linear impulsive differential equations with distributed delay, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2006), Vol. 193, № 1, 204-218.
53. Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2006), Vol. 7, № 5, 1255-1267.
54. Akhmet M., On the smoothness of solutions of impulsive autonomous systems, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 60, № 2, 311-324.
55. Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., Control over linear pulse systems, *Ukrainian Mathematical J.*, (1995), Vol. 47, № 3, 360-368.
56. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, *Computers & Mathematics with Applications*, (2002), Vol. 43, № 10-11, 1203-1218.
57. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2000), Vol. 3, № 4, 7-18.
58. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 39, № 4, (2000), 483-497.
59. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems in population dynamics, *Applicable Analysis*, (1999), Vol. 69, № 3&4, 207-221.
60. Anokhin A., Berezansky L., Braverman E., Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1995), Vol. 193, 923-941.
61. Baek H., Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008), Article ID 752403, 18 p.
62. Bailey J., Shafer S., A simple analytical solution to the three-compartment pharmacokinetic model suitable for computer-controlled infusion pumps, *Biomedical Engineering*, (1991), Vol. 38, № 6, 522-525.
63. Bainov D., Covachev V., *Impulsive differential equations with a small parameter*, World Scientific, Singapore, (1994).
64. Bainov D., Covachev V., Stamova I., Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, (1991), Vol. 12, № 2, 149-161.
65. Bainov D., Covachev V., Stamova I., Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1994), Vol. 187, № 3, 790-808.
66. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument, *Kodai Mathematical J.*, (1997), Vol. 20, № 2, 120-126.
67. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument, *Applicable Analysis*, (1996), Vol. 63, № 3&4, 287-297.
68. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument, *J. of Applied Analysis*, (1998), Vol. 4, № 2, 215-230.
69. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillating solutions of nonlinear impulsive differential equations with a deviating argument, *Note di Matematica*, (1995), Vol. 15, № 1, 45-54.
70. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument, *J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, (1998), Vol. 11, № 1, 95-102.
71. Bainov D., Dimitrova M., Petrov V., Oscillatory properties of solutions of impulsive differential equations with several retarded argument, *Georgian Mathematical J.*, (1998), Vol. 5, № 3, 201-212.
72. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., An application of the method of quasilinearization for a periodic problem for systems of nonlinear differential equations, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, (1997), Tome 50, № 11-12, 21-22.
73. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations, *Multivariate Approximation and Splines*, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.
74. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations, *Indian J. of Pure and Applied Mathematics*, (1999), Vol. 30, № 9, 893-910.

75. Bainov D., Dishliev A., Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, *Applied Mathematics and Computation*, (1990), Vol. 39, № 1, 37-48.
76. Bainov D., Dishliev A., Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences*, (1989), Vol. 42, № 12, 29- 32.
77. Bainov D., Dishliev A., Stamov G., Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations, *Kumamoto J. of Mathematics*, (1997), Vol. 10, 1-10.
78. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations, *Annali dell'Università di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche*, (1995), Vol. 41, 45-54.
79. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Lipschitz quasistability of impulsive differential–difference equations with variable impulsive perturbations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1996), Vol. 70, № 2, 267-277.
80. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics, *ANZIAM J.*, (2002), Vol. 43, 525-539.
81. Bainov D., Dishliev A., The phenomenon beating of the solutions of impulsive functional differential equations, *Communications in Applied Analysis*, (1997), Vol. 1, № 4, 435-442.
82. Bainov D., Dishliev A., Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, *International J. Systems Science*, (1990), Vol. 21, № 12, 2637-2643.
83. Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., Partial averaging for impulsive differential equations with supremum, *Georgian Mathematical J.*, (1996), Vol. 3, № 1, 11-26.
84. Bainov D., Hristova S., *Differential equations with maxima*, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, New York, (2011).
85. Bainov D., Kolev D., Nakagawa K., The control of the blowing-up time for the solution of the semilinear parabolic equation with impulsive effect, *J. Korean Mathematical Society*, (2000), Vol. 37, № 5, 793-802.
86. Bainov D., Kostadinov S., Minh N., *Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations*, Science Culture Technology Publishing, (1994).
87. Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 36, № 2, 383-393.
88. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., L_p -equivalence of linear and nonlinear impulsive differential equations in a Banach space, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (1992), Vol. 36, 17-33.
89. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space, *International J. of Theoretical Physics*, (1989), Vol. 28, № 7, 797-814.
90. Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1995), Vol. 194, № 3, 612-639.
91. Bainov D., Kulev G., Stamova I., Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations, *SUT J. of Mathematics*, (1995), Vol. 1, 55-71.
92. Bainov D., Kulev G., Stamova I., Instability of solutions of impulsive systems of differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 35, № 8, 1799-1804.
93. Bainov D., Markova N., Simeonov P., Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown functions, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1998), Vol. 91, № 1, 87-96.
94. Bainov D., Milusheva S., Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses, *J. of Mathical Analysis and Applications*, (1983), Vol. 95, № 1, 85-101.
95. Bainov D., Milusheva S., Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses, *Zeitschrift fur Angawandte Mathematik und Physik*, (1981), Vol. 32, 237-254.
96. Bainov D., Minchev E., Trends in the theory of impulsive partial differential equations, *Nonlinear Word*, (1996), Vol. 3, 357-384.
97. Bainov D., Nenov S., Limit sets of impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations*, (1994), 31-34.
98. Bainov D., Petrov V., Proytcheva V., Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with “maxima”, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1997), Vol. 83, № 2, 237-249.
99. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1995).
100. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications*, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1993).
101. Bainov D., Simeonov P., *Integral inequalities and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
102. Bainov D., Simeonov P., *Oscillation theory of impulsive differential equations*, International Publications, FL, (1998).

103. Bainov D., Simeonov P., *System with impulse effect: Stability theory and applications*, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
104. Ballinger G., Liu X., *Permanence of population growth model with impulsive effects*, *Mathematics and Computer Modeling*, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.
105. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive differential equations and inclusions*, *Contemporary Mathematics and its Applications*, Hindawi Publishing Corporations, Vol. 2, (2006).
106. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces*, *Applicable Analysis*, (2001), Vol. 80, № 3, 353-361.
107. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 47, № 10-11, 1659-1661.
108. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay*, *International J. of Applied Mathical Sciences*, (2005), Vol. 2, № 1, 130-148.
109. Benchohra M., Ouahab A., *Impulsive neutral functional differential equations with variable times*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2003), Vol. 55, № 6, 679-693.
110. Berezansky L., Braverman E., *On Impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications*, *J. of Differential Equations and Applications*, (2004), Vol. 10, № 9, 851-868.
111. Branicky M., *Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, (1998), Vol. 43, № 4, 475-482.
112. Braverman E., Mamdani R., *Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment*, *J. of Mathematical Biology*, (2008), Vol. 57, № 3, 413-434.
113. Chellaboina V., Bhat S., Haddad W., *An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems*, *Nonlinear Analysis*, (2003), Vol. 53, № 3-4, 527-550.
114. Chen F., Wen X., *Oscillation of N-order linear differential equations with impulses*, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2006), Vol. 29, № 3, (in Chinese).
115. Chen G., Shen J., *Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks*, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A*, (2007), Vol. 14, 177-188.
116. Chen J., Tisdell C., Yuan R., *On the solvability of periodic boundary value problems with impulse*, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 331, № 2, 902-912.
117. Chen S., Qi J., Jin M., *Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2003), Vol. 46, № 8-9, 1281-1287.
118. Cheng D., Yan J., *Global existence and asymptotic behavior of solution of second-order nonlinear impulsive differential equations*, *International J. of Mathematics and Mathematical Sciences*, (2001), Vol. 25, № 3, 175-182.
119. Chua L., Yang L., *Cellular neural networks: Applications*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), Vol. 35, 1273-1290.
120. Chua L., Yang L., *Cellular neural networks: Theory*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), Vol. 35, 1257-1272.
121. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses in respect of switching functions*, *International J. of Applied Science and Technology*, (2011), Vol. 1, № 5, 46-59.
122. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., *Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions*, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2012), Vol. 11, № 1, 57-80.
123. Chukleva R., Dishliev A., *On the continuous dependence of the switching moments of trajectories*, *Proceedings of the Jubilee Scientific Conference with International Participation Dedicated to the, 50th Anniversary of the Smolyan Branch of Plovdiv University*, (2012), Vol. 2, Part 2, 75-80.
124. Chukleva R., *Modeling using differential equations with variable structure and impulses*, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 72, № 3, 343-364.
125. Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).
126. Cordova-Lepe F., *Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics, Biomat 2006*, *International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
127. D'onofrio A., *Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model*, *Mathematical Biosciences*, (2002), Vol. 179, № 1, 179, 57-72.
128. Dai B., Su H., Hu D., *Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.
129. Dannan F., Elaydi S., *Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations*, *J of Mathematical Analysis and Applications*, (1986), Vol. 113, 562-577.
130. DeCarlo R., Zak S., Matthews G., *Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial*, *Proceedings on the IEEE*, (1988), Vol. 76, № 3, 212-232.
131. Dhage B., Boucherif A., Ntouyas S., *On periodic boundary value problems of first-order perturbed impulsive differential inclusions*, *Electronic J. of Differential Equations*, (2004), Vol. 2004, № 84, 1-9.

132. Dimov H., Nenov S., Petkova S., Continuous dependence of the solutions of impulsive dynamical systems from the initial conditions, *J. of the University of Chemical Technology and Metallurgy*, (2001), Vol. 36, № 1, 103-112.
133. Dimov H., Nenov S., Some features of uncontinuable solutions of impulsive dynamical systems, *Extracta Mathematicae*, (1996), Vol. 11, № 3, 443-456.
134. Dishliev A., Bainov D., Conditions for the absence of the phenomenon "beating" for systems of impulse differential equations, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, (1985), Vol. 13, № 3, 237-256.
135. Dishliev A., Bainov D., Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.
136. Dishliev A., Bainov D., Continuous dependence on the initial condition of the solution of a system of differential equations with variable structure and with impulses, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University*, (1987), Vol. 23, № 6, 923-936.
137. Dishliev A., Bainov D., Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1990), Vol. 29, № 6, 655-671.
138. Dishliev A., Bainov D., Differentiability on a parameter and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses, *Osterreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, (1987), Wien, Band 196, Heft 1-3, 69-96.
139. Dishliev A., Bainov D., Investigation of the Lipschitz stability via limiting equations, *Dynamics and Stability of Systems*, (1990), Vol. 5, № 2, 59-64.
140. Dishliev A., Bainov D., Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with impulses, *Applicable Analysis*, (1984), Vol. 18, № 1&2, 67-73.
141. Dishliev A., Bainov D., Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 363-372.
142. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 1, 39-64.
143. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right-hand side, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, № 2, 149-159.
144. Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications, *Academic Publications, Ltd.* (2012).
145. Dishliev A., Dishlieva K., Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 2, 167-187.
146. Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves, *Acta Mathematica Scientia*, (2012), Vol. 32, № 3, 1035-1052.
147. Dishlieva K., Antonov A., Hausdorff metric and differential equations with variable structure and impulses, *Technical University - Sofia*, (2015).
148. Dishlieva K., Dishliev A. A., Stability of impulsive differential equations with random impulsive moments, *International J. of Science, Technology and Management*, ISSN (online): 2394-1537, (2015), Vol. 4, № 5, 162-172.
149. Dishlieva K., Dishliev A. A., Unlimited Moments of Switching for Differential Equations with Variable Structure and Impulses, *Advances in Mathematics - Scientific Journal*, ISSN 1857-8365, (2015), Vol. 4, № 1, 11-19.
150. Dishlieva K., Dishliev A. B., Dishliev A. A., Optimal impulsive effects and maximum intervals of existence of the solutions of impulsive differential equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B Applications & Algorithms*, ISSN 1492-8760 (print), 1918 2538 (electronic), (2015), Vol. 22, 465-489.
151. Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., A class of integral manifolds for autonomous systems of differential equations, *German J. of Advanced Mathematical Sciences*, (2013), Vol. 1, № 1, 11-19.
152. Dishlieva K., On the qualitative theory of differential equations with random impulsive moments, *International J. of Science, Technology and Management*, (2015), Vol. 4, № 4, 172-180.
153. Dong L., Chen L., Sun L., Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 2, 572-578.
154. Elaydi S., Yakubu A., Global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking, *J. of Differential Equations and Applications*, (2002), Vol. 8, № 6, 537-549.
155. Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth, *The J. of Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, (1991), Vol. 32, 382-400.
156. Feng C., Huang Z., Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
157. Fenner L., Pinto M., On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 38, № 3, 307-321.
158. Filippov A., *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1988).

159. Franco D., Nieto J., Maximum principles for periodic impulsive first order problems, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1998), Vol. 88, № 1, 149-159.
160. Frigon M., O'Regan D., First order impulsive initial and periodic problems with variable moments, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1996), Vol. 233, № 2, 730-739.
161. Frigon M., O'Regan D., Impulsive differential equations with variable times, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (1996), Vol. 26, № 12, 1913-1922.
162. Frigon M., O'Regan D., Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, (2001), Vol. 8, № 2, 149-159.
163. Fu X., Li X., Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time, *Mathematics and Computer Modeling*, (2008), Vol. 48, № 5-6, 776-786.
164. Gao S., Chen L., Nieto J., Torres A., Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, *Vaccine*, (2006), Vol. 24, № 35-36, 6037-6045.
165. Gao S., Teng Z., Nieto J., Torres A., Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay, *J. Biotechnology*, (2007), Article ID 64870.
166. Gao W., Hung J., Variable structure control of nonlinear systems: a new approach, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, (1993), Vol. 40, № 1, 45-55.
167. Georgieva A., Kostadinov S., L_p -equivalence of impulsive differential equations, *SUT J. of Mathematics*, (1997), Vol. 33, № 2, 291-301.
168. Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the L_p -equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, *Turkish J. of Mathematics*, (2008), Vol. 32, 451-466.
169. Georgiou D., Nieto J., Rodríguez-López R., Initial value problems for higher-order fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 63, № 4, 587-600.
170. Ghana T., Lakshmikantham V., Set differential equations and flow invariance, *Applicable Analysis*, (2003), Vol. 82, № 4, 357-368.
171. Girginov C., Petkova S., Zahariev A., Breakdown phenomena during anodization of aluminum in galvanostatic and voltastatic regimes, *Bulletin of Electrochemistry*, (2006), Vol. 22, № 7, 325-328.
172. Gladilina R., Ignatyev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, *International Applied Mechanics*, (2008), Vol. 44, № 2, 228-237.
173. Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, *Rocky Mountain J. of Mathematics*, (1996), Vol. 26, № 1, 165-173.
174. Gopalsamy K., Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
175. Gopalsamy K., Zhang B., On delay differential equations with impulses, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.
176. Guo H., Chen L., Time-limited pest control of a Lotka-Volterra model with impulsive harvest, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 840-848.
177. Hartman F., Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).
178. He Z., Ge W., Oscillation in second order linear delay differential equations with nonlinear impulses, *Mathematica Slovaca*, (2002), Vol. 59, № 3, 331-341.
179. Henderson J., Thompson H., Smoothness of solutions for boundary value problems with impulse effects, II, *Mathematical and Computer Modeling*, (1996), Vol. 223, № 10, 61-69.
180. Hristova S., Bainov D., Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations, *Rocky Mountain J. of Mathematics*, (1993), Vol. 23, № 2, 609-618.
181. Hristova S., Kulev G., Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2001), Vol. 132, № 2, 399-407.
182. Hristova S., Nonlinear delay integral inequalities for piecewise continuous functions and applications, *J. of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, (2004), Vol. 5, № 4, Article 88.
183. Hristova S., Roberts L., Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, (2001), Vol. 34, № 7-8, 839-847.
184. Hristova S., Stefanova K., Practical stability of impulsive differential equations with "supremum" by integral inequalities, *European J. of Pure and Applied Mathematics*, (2012), Vol. 5, № 1, 30-44.
185. Hung J., Gao W., Hung J., Variable structure control: a survey, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, (1993), Vol. 40, № 1, 2-22.
186. Huo H-F., Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 48, № 12, 1833-1846.
187. Ignatyev A., On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 1, 53-72.
188. Jia J., Li C., A Predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195, 15 p.
189. Jiao J., Chen L., Cai S., Dynamical analysis on a single population model with state-dependent impulsively unilateral diffusion between two patches, *Advances in Difference Equations*, (2012), 2012:155 Doi: 10.1186/1687-1847-2012-155.

190. Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey, *Applied Mathematics and Mechanics*, (2008), Vol. 29, № 5, 653-663.
191. Jin Z., Zhiem M., Maoan H., The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competitions system with impulsive, *Chaos Solitons & Fractals*, (2004), Vol. 22, № 1, 181-188.
192. Juang G., Lu Q., Impulsive state feedback control of a predator-prey model, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2007), Vol. 200, № 1, 193-207.
193. Juang G., Lu Q., The dynamics of a prey-predator model with impulsive state feedback control, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B*, (2006), Vol. 6, 1310-1320.
194. Karandjulov L., Stoyanova Y., Problem of Cauchy for linear singularly perturbed impulsive systems, *Miskolc Mathematical Notes*, (2002), Vol. 3, № 1, 25-37.
195. Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator, *Rostocker Mathematisches Kolloquium*, (1999), Vol. 53, 51-59.
196. Kulev G., Bainov D., Global stability of sets for systems with impulses, *Applied Mathematics and Computation*, (1989), Vol. 29, № 3, 255-270.
197. Kulev G., Bainov D., On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct methods, *Dynamics and stability of systems*, (1990), Vol. 110, № 3, 149-162.
198. Kulev G., Bainov D., Stability of sets for systems with impulses, *Tamkang J. of Mathematics*, (1988), Vol. 19, № 2, 13-22.
199. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
200. Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara D., Stability theory for set differential equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, (2004), Vol. 11, 181-189.
201. Lakshmikantham V., Liu X., Stability for impulsive differential systems in terms of two measures, *Applied Mathematics and Computations*, (1989), Vol. 29, № 1, 89-98.
202. Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., Hybrid systems with time scales and impulses, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2147-2152.
203. Lan H.-Y., Nieto J., On initial value problems for first-order implicit impulsive fuzzy differential equations, *Dynamic Systems and Applications*, (2009), Vol. 18, 677-686.
204. Li J., Nieto J., Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 226-236.
205. Li X., Oscillation properties of second order delay differential-difference equations with impulses, *Advances in Applied Mathematical Analysis*, (2008), Vol. 3, № 1, 55-66.
206. Lin D., Hui J., The best dosage scheme on multiple rapid vein injection, *J. of Biological Systems*, (2007), Vol. 15, № 3, 355-364.
207. Liu B., Teng Z., Liu W., Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.
208. Liu B., Zhang Y., Chen L., The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning integrated pest management, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2005), Vol. 6, № 2, 227-243.
209. Liu L., Ye Y., Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses, *International J. of Computational and Mathematical Sciences*, (2011), Vol. 5, № 4, 229-231.
210. Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y., Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2002), Vol. 271, № 1, 124-188.
211. Liu X., Chen L., Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator, *Chaos Solitons & Fractals*, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.
212. Liu X., Chen L., Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.
213. Liu X., Li G., Luo G., Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.
214. Liu X., Stability results for impulsive differential systems with application to population growth models, *Dynamical Stability Systems*, (1994), Vol. 9, № 2, 163-174.
215. Luo Z., Shen J., Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional, *Applied Mathematics Letters*, (2009), Vol. 22, № 2, 163-169.
216. Meng X., Chen L., Li Q., The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, (2008), Vol. 198, № 1, 361-374.
217. Meng X., Chen L., Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 2, 179-196.
218. Meng X., Jiao J., Chen L., The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 2, 1255-1267.
219. Meng X., Li Z., Nieto J., Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment, *J. of Mathematical Chemistry*, (2010), Vol. 47, № 1, 123-144.
220. Mihailova D., Staneva-Stoytcheva D., *The fundamentals of pharmacokinetics*, State Publishing House, (1987).

221. Milev N., Bainov D., Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 353-361.
222. Milev N., Bainov D., Roach G., Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (1989), Vol. 11, № 2, 271-278.
223. Milev N., Bainov D., Stability of linear impulsive differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, (1990), Vol. 20, № 12, 35-41.
224. Mohamad S., Gopalsamy K., Akca H., Exponential stability of artificial neural networks with distributed delays and large impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 3, 872-888.
225. Naulin R., Pinto M., Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 208, № 2, 281-297.
226. Nenov S., Bainov D., Impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations*, (1992), 145-166.
227. Nenov S., Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 36, № 7, 881-890.
228. Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2009), Vol. 224, № 2, 544-551.
229. Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator, *BioSystems*, (2009), Vol. 98, № 2, 67-72.
230. Nieto J., Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 205, № 2, 423-433.
231. Nieto J., O'Regan D., Variational approach to impulsive differential equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 680-690.
232. Nieto J., Rodrigues-Lopez R., Boundary value problems for a class of impulsive functional equations. *Computers & Mathematics with Applications*, (2008), Vol. 55, № 12, 2715-2731.
233. Nieto J., Rodríguez-López R., Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.
234. Paden B., Sastry S., A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators, *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, (1987), Vol. 34, № 1, 73-82.
235. Pandit S., Deo S., Differential systems involving impulses, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
236. Perestyuk M., Chernikova O., Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations, *Ukrainian Mathematical J.*, (2008), Vol. 60, № 1, 91-107.
237. Petkova S., Antonov A., Chukleva R., Reachable sets for homogenous systems of differential equations and their topological properties, *American J. of Applied Mathematics*, (2013), Vol. 1, № 4, 49-54.
238. Petkova S., On the fundamental theory of impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2013), Vol. 12, № 2, 121-129.
239. Plotnikov V., Ivanov R., Kitanov N., Method of averaging for impulsive differential inclusions, *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, (1998), Vol. 12, 43-51.
240. Rogovchenko Y., Nonlinear Impulse evolution systems and applications to population models, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 207, № 2, 300-311.
241. Samoilenko A., Stanzhytskyi O., Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations, *World scientific series on nonlinear science*, (2011).
242. Samojlenko A., Perestyuk N., *Impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, (1995).
243. Shen J., Li J., Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.
244. Shuai Z., Bai L., Wang K., Optimization problems for general simple population with n-impulsive harvest, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 329, № 1, 634-646.
245. Simeonov P., Bainov D., Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations, *Tamkang J. of Mathematics*, (1991), Vol. 22, № 3, 275-284.
246. Simeonov P., Bainov D., Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (1988), Vol. 31, № 2, 353-368.
247. Simeonov P., Bainov D., Estimates for Cauchy matrix of perturbed linear impulsive equations, *Chinese J. of Mathematics*, (1993), Vol. 1, 73-80.
248. Skripnik N., Averaging of impulsive differential inclusions with Hukuhara derivative, *Nonlinear Oscillations*, (2007), Vol. 10, № 3, 422-432.
249. Smith L., Wahl L., Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects, *Bulletin of Mathematical Biology*, (2005), Vol. 67, № 4, 783-813.
250. Stamov G., *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, (2012).
251. Stamov G., Stamova I., Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay, *Applied Mathematical Modeling*, (2007), Vol. 31, № 7, 1263-1270.

252. Stamov G., Stamova I., Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2001), Vol. 258, № 2, 371-379.
253. Stamova I., Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations, (2008), *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, (2008), Vol. 77, 331-341.
254. Stamova I., Emmenegger G.-F., Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets, *International J. of Applied Mathematics*, (2004), Vol. 15, № 3, 271-290.
255. Stamova I., On the stability of an impulsive differential-difference population model, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, 285-291.
256. Stamova I., Parametric stability of impulsive functional differential equations, *J. of Dynamical and Control Systems*, (2008), Vol. 14, № 2, 235-250.
257. Stamova I., *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2009).
258. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations, *Electronic J. of Differential Equations*, (2008), Vol. 48, 1-10.
259. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2001), Vol. 130, № 1-2, 163-171.
260. Stamova I., Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 612-623.
261. Sun S., Chen L., Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, *Applied Mathematics and Computation*, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.
262. Tang S., Cheke R., Xiao Y., Optimal impulsive harvesting on non-autonomous Beverton-Holt difference equations, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 12, 2311-2341.
263. Vasundhara D., Basic results in impulsive set differential equations, *Nonlinear Studies*, (2003), Vol. 10, № 3, 259-271.
264. Wang F., Pang G., Shen L., Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.
265. Wang H., Feng E., Xiu Z., Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.
266. Wang W., Shen J., Luo Z., Partial survival and extinction in two competing species with impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.
267. Wang X., Song Q., Song X., Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay, *Applied Mathematical Modeling*, (2009), Vol. 33, № 11, 4231-4240.
268. Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.
269. Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.
270. Xian X., O'Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, *Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems*, (2008), Vol. 2008, Article ID 197201.
271. Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, *Mathematics and Computer Modeling*, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.
272. Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.
273. Yang Z., Xu D., Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, (2005), Vol. 52, 517-521.
274. Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential p -stability of impulsive stochastic differential equations with delays, *Physics Letters A*, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.
275. Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.
276. Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.
277. Zavalishchin S., Sesekin A., *Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
278. Zeeman E., Zeeman M., From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems, *Transactions of the American Mathematical Society*, (2002), Vol. 355, № 2, 713-734.
279. Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Advances in Complex Systems*, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.
280. Zhang H., Chen L., Nieto J., A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 4, 1714-1726.
281. Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, *Mathematical and Computer Modelling*, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.

282. Zhang X., Shuai Z., Wang K., *Optimal impulsive harvesting policy for single population, Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651.
283. Zhao A., Lakshmikantham V., *Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, J. of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд е посветен на:

- Фундаменталната теория на диференциалните уравнения с импулси;
- Качествената теория на диференциалните уравнения с импулси;
- Приложенията на диференциалните уравнения с импулси.

Получени са следните по-важни резултати:

1. Изследвани са широк клас нелинейни автономни системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Намерени са лесно проверяеми условия, при които моментите на превключване за тези системи не притежават точка на съгъстяване;
2. Изучени са качествата на решенията на нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения с импулси, които се осъществяват в произволни моменти. Намерени са достатъчни условия, които гарантират няколко типа устойчивост на ненулевите решения на такива системи;
3. Изучен е въпросът за устойчивост на ненулевите решения на клас нелинейни, автономни диференциални уравнения с променлива структура и нефиксирани моменти на импулсно въздействие.
4. Изследвани са оптимални свойства на решенията на клас нелинейни, автономни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсно въздействие. За разглеждания клас уравнения при зададена сума на импулсните въздействия са намерени:
 - Броят на импулсните въздействия;
 - Големините на импулсните въздействия;
 - Моментите, в които те се реализират,така, че решение на дадена начална задача да е максимално продължимо.
5. Получените теоретични резултати са приложени върху конкретни обобщени динамични математически модели от популационната динамика, подложени на импулсни външни въздействия:
 - Математически модел на изолирана популация (модел на Gompertz), подложена на външни въздействия, които се състоят в отнемане или в добавяне на биомаса към разглежданата популация. Посочени са ограничения, при които моментите на интервенция нямат точка на съгъстяване;
 - Математически модел на изолирана популация (модел на Gompertz), подложена на външни въздействия, които се състоят в отнемане или в добавяне на биомаса към разглежданата популация. Посочени са ограничения, при които моментите на интервенция нямат точка на съгъстяване;
 - Математически модел на изолирана популация (логистичен модел на Verhulst), подложена на външни импулсни въздействия от посочения по-горе тип. Получени са условия за устойчивост на решенията, независимо от разположението на моментите на външно въздействие;
 - Математически модел на терапевтична лекарствена концентрация чрез дискретно импулсно подаване на лекарство. Получени са условия за асимптотична устойчивост на ненулевите решения. При лимитиран обем на лекарственото средство са намерени импулсните моменти и големините на въздействията, при които лекарствената концентрация в организма на пациента е в терапевтични граници за максимално дълъг период.

ДЕКЛАРАЦИЯ

относно авторските права на представените в дисертацията резултати

1. Резултатите и сведенията от увода са получени предварително от други изследователи. Представеният материал се базира на различни литературни източници, които са надлежно посочени.
2. Резултатите от глава 1 са публикувани в статията:
Dishlieva K., Dishliev A. A., Unlimited Moments of Switching for Differential Equations with Variable Structure and Impulses, Advances in Mathematics - Scientific Journal, ISSN 1857-8365, (2015), Vol. 4, № 1, 11-19.

3. Резултатите от глава 2 са публикувани в статията:

Dishlieva K., Dishliev A. A., Stability of Impulsive Differential Equations with Random Impulsive Moments, International J. of Science, Technology and Management, ISSN (online): 2394-1537, (2015), Vol. 4, № 5, 162-172, IDIIF: 1.011.

4. Резултатите в глава 3 са нови и са получени съвместно с доц. К. Дишлиева.

5. Резултатите от глава 4 са публикувани в статията:

Dishlieva K., Dishliev A. B., Dishliev A. A., Optimal Impulsive Effects and Maximum Intervals of Existence of the Solutions of Impulsive Differential Equations, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B Applications & Algorithms, ISSN 1492-8760 (print), 1918 2538 (electronic), (2015), Vol. 22, 465-489.

СПИСЪК

на публикации с автор Ангел Ангелов Дишлиев,
на които се основава дисертационния труд

1. *Dishlieva K., Dishliev A. A., Unlimited Moments of Switching for Differential Equations with Variable Structure and Impulses, Advances in Mathematics - Scientific Journal, ISSN 1857-8365, (2015), Vol. 4, № 1, 11-19.*
2. *Dishlieva K., Dishliev A. A., Stability of Impulsive Differential Equations with Random Impulsive Moments, International J. of Science, Technology and Management, ISSN (online): 2394-1537, (2015), Vol. 4, № 5, 162-172, IDIIF: 1.011.*
3. *Dishlieva K., Dishliev A. B., Dishliev A. A., Optimal Impulsive Effects and Maximum Intervals of Existence of the Solutions of Impulsive Differential Equations, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B Applications & Algorithms, ISSN 1492-8760 (print), 1918 2538 (electronic), (2015), Vol. 22, 465-489.*

БЛАГОДАРНОСТИ

1. Изказвам благодарности на моите научни ръководители проф. Ангел Дишлиев и доц. Светослав Ненов за постановката на дисертационната тема и за проявената помощ и загриженост при реализиране на изследванията;
2. Благодаря на д-р Андрей Антонов за оказаното съдействие при изготвянето на чертежите, свързани с дисертацията, както и за внимателното прочитане на целия ръкопис на дисертацията и отстраняването на редица неточности.

инж. Ангел Ангелов Дишлиев