

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. д-р Ангел Борисов Дишлиев, ХТМУ

върху дисертационен труд на тема:

“Устойчивост на решенията на еволюционни функционално-диференциални уравнения”;

с автор: Адем Ибушев Зейнев;

за придобиване на образователната и научна степен “доктор”;

научна област: 4. Природни науки, математика и информатика;

професионално направление: 4.5 Математика;

научна специалност: Диференциални уравнения

В представената рецензия ще се придържам стриктно към изискванията и препоръките на Правилника за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности (ППНСЗД) в ХТМУ.

1. Кратки биографични данни и характеристика на научните интереси на кандидата.

Г-н Адем Зейнев е роден през 1970 г. в село Абланица, Софийска област. Завършил е през 1994 г. ЮЗУ „Неофит Рилски“ (Благоевград) и е придобил квалификацията „Учител по математика“. По късно, отново в същия университет, придобива квалификацията „Учител по информатика и информационни технологии“. Непосредствено след завършване на висшето си образование е работил като оператор в предприятието „Кабелна телевизия“ в Благоевград, а също така и като сервизен техник. От 2000 г. до сега е учител в СОУ „Паисий Хилендарски“, село Абланица.

Научните му интереси са разнообразни, ще акцентирам на:

- качествена теория на диференциалните уравнения;
- математическо моделиране;
- обучение по математика.

Автор е на десетина публикации извън дисертационния труд. Участвал е в работата на няколко научни проекта, част от които имат отношение към темата на дисертацията.

2. Преглед на дисертационния труд и анализ на резултатите.

Дисертационният труд е поместен на 145 стандартни страници. Състои се от увод, три глави, заключение и библиография от 127 източника. Първата глава съдържа четири параграфа, втората – пет параграфа и третата глава съдържа три параграфа. В дисертацията са използвани 14 фигури. Най-общо казано, уводът и първите две глави (поместени общо на 92 стр.) съдържат известни резултати. Последната глава (в обем от 38 стр.) съдържа резултати на автора на дисертацията.

Първата глава, озаглавена "Някои функционално-диференциални уравнения", има спомагателен характер. Ще отбележа, че в дисертацията тази глава е под номер 2, тъй като уводът е с номер 1. В началото са дадени някои класически понятия и дефиниции от функционалния анализ и диференциалните уравнения. Например, припомнени са понятията: топология, пълно пространство, околност на точка, база на дадена топология, затворена обвивка и други. По-нататък е разгледана началната задача на Коши за функционално-диференциални уравнения (ФДУ). С помощта на няколко класически примера са демонстрирани основните прилики и различия между решенията на обикновените диференциални уравнения и диференциалните уравнения със закъсняващ аргумент. Припомнени са някои основни качества на тези решения, като: осцилиране, избухване на решения, продължими и непродължими решения, хармонични решения и др. Посочени са примери на класове уравнения със закъсняващ аргумент, които се ползват успешно в математическото моделиране на реални процеси. В третия параграф на главата са дадени дефиниции за няколко типа устойчивост на решенията на ФДУ. Формулирани са известни резултати за съществуване и единственост на решенията на такива уравнения. В последния параграф на главата са съобщени съвкупност от факти, които трудно могат да се систематизират и представят с общо заглавие.

Следващата глава е озаглавена „Устойчивост на ФДУ“. Дадени са класическите дефиниции за различни типове устойчивост на ФДУ. Тук ще посочим: устойчивост относно началната функция, асимптотическа устойчивост, равномерна устойчивост, ограниченост и др. Част от дефинициите повтарят аналогични формулировки в предходната глава.

Представени са няколко твърдения за устойчивост на нулевите и ненулевите решения на разглеждания тип уравнения. Разгледан е директния метод на Ляпунов за ФДУ. Представени са различни варианти на метода, като помощните функции (функциите на Ляпунов) са скалярни или векторни функции, а в най-общия случай те са функционали. Формулирани са съответните твърдения за устойчивост и асимптотическа устойчивост. В тази глава липсва каквато и да е логична последователност на изложението. Доказани са известни теореми (вместо да бъдат цитирани). Не се разбира необходимостта от представените твърдения.

В последната глава (която съдържа резултати на автора) най-напред се разглежда система функционално-диференциални уравнения (СФДУ) от сравнително общ вид, която за удобство ще наричаме изходна система. Дясната страна на системата се състои от линейна и нелинейна част. Едновременно с изходната СФДУ се разглежда и съответната смутена система. Смутенията са в дясната страна на системата и са контролируемо малки. Това се осъществява, като добавъчната функция към дясната страна е умножена с произволно малка положителна константа. Основният въпрос, обект на изследване в главата, е да се намерят достатъчни условия, гарантиращи устойчивост и равномерна устойчивост на нулевото решение на смутената система, при условие че изходната (основната) система притежава устойчиво нулево решение. За целта дисертантът е доказал няколко помощни твърдения, свързани с намирането на подходящи оценки на решенията на изходната и смутената система, както и на частична наредба на класове функционали, дефинирани чрез функционалите, участващи във формулировката на смутената система. Основният резултат е теорема 4.1, където се отговаря и на поставения по-горе въпрос. Тук дисертантът е показал познаване на основния математически апарат при решаване на подобни задачи за устойчивост. Демонстрирана е техниката на редиците от горни и долни решения на съответните системи, приложено е неравенството на Гронуол и др.

Вторият параграф на последната глава е озаглавен „Устойчивост на решенията на ФДУ с прекъснати решения“, макар че там няма и дума за

това качество на решенията. По същество се разглеждат числени методи (по-точно - методи на Рунге-Кута) за решаване на импулсни диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия. Разгледан е един от основните варианти, а именно когато импулсите се определят с помощта на непрекъснати и не пресичащи се (подредени) хиперповърхнини от разширеното фазово пространство на системата. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива пресича някоя от споменатите по-горе хиперповърхнини. Приведени са няколко числени примери, демонстриращи избрания числов метод.

Последният параграф на дисертацията е посветен на изучаване на качествата на еволюционни частни диференциални уравнения. Основните изследвания са свързани с изучаването на параболични частни диференциални уравнения от вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + F,$$

където u е търсената функция; L е елиптичен оператор, т.е.

$$L := \sum_{i,j=1,n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1,n} b_j(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

т.е. матрицата (a_{ij}) е положително дефинитна в затворената обвивка на дефиниционното множество; функцията F отразява реакцията на описвания процес. Точно във вида на функцията F , отразяваща външните въздействия и произтичащите от това нови и специфични изследвания, е основната заслуга на изследванията на автора. По-конкретно, имаме следните два варианта на реакцията:

$$\begin{aligned} & - F(t, x, u(t, x), u(t - \sigma, x)) \\ & \quad = f(t, x, u(t, x)) + R(t, x, u(t, x), u(t - \sigma, x)); \\ & - F(t, x, u(t, x), \max\{u(s, x); s \in [t - \sigma, t]\}) \\ & \quad = f(t, x, u(t, x)) + R(t, x, u(t, x), \max\{u(s, x); s \in [t - \sigma, t]\}). \end{aligned}$$

Както се вижда, в единия от случаите реакцията зависи от максималната стойност на търсената функция $u = u(t, x)$, пресметната в предварителен

времеви интервал от вида $[t - \sigma, t]$, където σ е дадена положителна константа. В първият вариант (по - лекия случай), реакцията зависи от закъснението на търсената функция. Може да се приеме, че разгледаният от автора втори вариант обобщава варианта, когато реакцията зависи от постоянно закъснение на неизвестната функция. Ясно е, че областта на съществуване на решението може да се представи както следва: $D_{-\sigma} = [-\sigma, T] \times \Omega$, където $T = \text{const} > 0$, ще отбележим, че T е моментът, до който се изследва процеса. Освен това се предполага, че областта $\Omega \subset R^n$ е ограничена. Някои качествени изследвания на параболичните частни диференциални уравнения с постоянно закъснение можем да видим в работите на N. Yoshida, C. Pao и др. Идеята за уравненията с максимуми се заражда в края на 70-те години на миналия век в работите на А. Магомедов. Тези пионерни работи са свързани с моделирането на специфични процеси от практиката. Ще отбележа, че българската школа по уравнения с максимуми е една от най-плодотворните в света. Тук ще посоча последната монография от български учени, посветени на изучаването на този тип уравнения:

Bainov D., Hristova S., Differential equations with maxima, CRC Press, 2011.

В дискутираната дисертация са дадени дефиниции на понятията: горно и долно решение на съответната задача за разглежданите типове уравнения, наредба на решенията, устойчивост, асимптотическа устойчивост и експоненциална устойчивост по Ляпунов на стационарното решение на разглежданото параболично уравнение. Задачата, обект на изследване в дисертацията, притежава:

- начално условие

$$u(t, x) = \eta_0(t, x), (t, x) \in [-\sigma, 0] \times \Omega,$$

където η_0 е известна функция с непрекъснатост от Хьолдеров тип (с константа θ , $0 < \theta < 1$), т.е.

$$(\exists K = \text{const} > 0) : (\forall x, y \in \Omega) \Rightarrow |\eta_0(t, x) - \eta_0(t, y)| \leq K \|x - y\|^\theta;$$

- гранично условие от типа на Хьолдер

$$Bu = h(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega,$$

където операторът $B := \alpha_0(t, x) \frac{\partial}{\partial v} + \beta_0(t, x)$; функциите $\alpha_0(t, x)$ и $\beta_0(t, x)$ са неотрицателни функции, които притежават производни с непрекъснатост от Холдеров тип с константа θ върху границата на дефиниционната област; производната по направление $\frac{\partial}{\partial v}$ във всяка точка от границата на дефиниционната област $\partial\Omega$ е нормална към нея. Един от основните резултати, получен от автора, е намиране на достатъчни условия, които гарантират съществуване на единствено решение на разглежданата задача. Ще отбележа, че тези условия са формулирани ясно, свързани са с параметрите на разглежданата задача и притежават полезната възможност за непосредствена проверка. Споменатият резултат е получен с помощта на сходящи редици от горни и долни решения, границата на които е търсеното единствено решение. Резултатите са повлияни от монографията на С. Пао:

P. Pao, Nonlinear parabolic and elliptic equations, Plenum Press, 1992.

3. Оценка на съответствието между автореферата и дисертационния труд.

Авторефератът напълно отговаря на изискванията на чл. 11 ал. 5 от ППНСЗД на ХТМУ. В него са посочени:

- основните цели и задачи на дисертационния труд;
- използваните методи (съвпадат с традиционните методи на математическия анализ и в частност на обикновените диференциални уравнения);
- основните дефиниции и нови понятия;
- основните теореми;
- основните числови и моделни примери;
- заключението на дисертационния труд;
- библиографията;

Ще отбележа, че заключението отразява коректно постигнатото от дисертанта в предложения за рецензиране дисертационен труд.

Формално, авторефератът е изготвен съгласно изискванията на правилника на ХТМУ. Материалът е изложен така, че читателят може да добие пълна и адекватна представа за резултатите в дисертацията.

4. Характеристика и оценка на приносите в дисертационния труд.

Получените резултати допълват фундаменталната и качествената теория на: ФДУ; ФДУ с импулсни въздействия; параболичните частни диференциални уравнения със специална реакция на средата. Посочени са сравнително общи условия (свързани с параметрите на изучаваните уравнения), които гарантират съществуване и единственост на решенията на съответните задачи. Посочени са условия за няколко типа устойчивост на решенията на изучаваните задачи. Представени са достатъчно на брой числови примери, които демонстрират математическите методи, коментираните в изследванията на автора.

Заслугите на дисертационния труд са в популяризирането и попълването на познанието в споменатите по-горе научни направления.

5. Мнение за публикациите на дисертанта по темата на дисертационния труд.

По темата на дисертационния труд дисертантът участва с три публикации. Двете от тях са публикувани в международни научни списания, а едната е приета за печат. Всичките публикации по дисертацията са в съавторство. Считам, че представените публикации напълно удовлетворяват изискванията за придобиване на образователната и научна степен "доктор", разписани в чл. 11 (4) от ППНСЗД на ХТМУ. Г-н А. Зейнев е участвал с научни доклади в три международни конференции (едната от които е в чужбина). Научните му трудове вече са получили и първото цитиране.

6. Критични бележки и коментари.

Имах възможността да се запозная предварително с дисертационния труд на г-н А. Зейнев. Голяма част от моите забележки и препоръки бяха отстранени преди окончателния вариант на дисертацията. Поради тази причина няма да ги коментирам в рецензията. Бих си позволил да формулирам няколко задачи, които може да представляват интерес за бъдещата изследователска дейност на г-н А. Зейнев:

Задача 1: Да разгледаме адаптация на произволен приближен (числен) метод за намиране на решението на начална задача за ФДУ с импулсни въздействия в нефиксирани импулсни моменти. Важна и специфична (а това означава и

нова) задача е да се „стикова“ грешката, която се допуска в гладката част на решението преди и след всяко импулсно въздействие. Това означава да се контролира грешката, която се добавя от приблизителното определяне на импулсните моменти и съответните импулсни въздействия.

Задача 2: Да разгледаме точното и приближеното решение на ФДУ с импулсни въздействия в нефиксирани импулсни моменти. Възможно е двете решения да срещат последователно **различни** импулсни хиперповърхнини (откъдето следва, че и импулсните въздействия са различни). Това се наблюдава, когато едното от двете решения (за разлика от другото) след импулсно въздействие „прескача“ някоя от тези импулсни хиперповърхнини. Естествена задача е да се представят условия, които гарантират отсъствието на този специфичен за импулсните уравнения „ефект“. Това е важно, тъй като при неговото наличие „близостта“ между двете решения се игнорира след нарушаване на последователността на срещите на двете решения с импулсните хиперповърхнини.

Задача 3: При изследване на различните качества на решенията на ФДУ е важно да се разгледат и изучат специфичните за този тип уравнения устойчивости. Като пример, при диференциалните уравнения с максимуми, бих посочил устойчивост относно **големината** на интервала, в който се изчислява максимума.

7. Лични впечатления за дисертанта.

Познавам дисертанта от момента на неговото участие в конкурса за редовен докторант към катедра Математика на ХТМУ (края на 2012 г.). Участвал съм в няколко изпитни комисии, по повод на изпитите, които той успешно полагаше по време на обучението в катедрата. Присъствал съм на няколко научни доклада, изнесени от докторанта.

Считам, че (най-общо казано) той е любознателен млад учен, който е придобил умения за самостоятелна научна работа. Усвоил е основните методи на качествено изследване на широк и сравнително общ тип диференциални уравнения. Придобил е афинитет към прилагане на изследванията към съответни моделни уравнения на процеси от науките и практиката. Скъмността, любезността и неговата отзивчивост са добродетели, които неотклонно съпътстват работата му в творчески колектив.

8. Заключение.

Въз основа на запознаването ми с представените научни трудове, тяхната значимост, съдържащите се в тях научни и научноприложни приноси, намирам за основателно да заявя, че мнението ми, относно придобиването на образователната и научна степен "доктор" по:

област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;

професионално направление: 4.5. Математика;

научната специалност: Диференциални уравнения

от г-н Адем Ибушев Зейнев, е **положително**.

28. 01. 2017 г.

Рецензент:.....
(проф. А. Дишлиев)