Рецензия от професор Цанко Дончев Дончев (УАСГ) на дисертационния труд: „Устойчивост на решенията на еволюционни функционални диференциални уравнения” представен от господин Адем Ибушев Зейнев за придобиване на научно образователната степен Доктор

1. *Общо представяне на дисертационния труд.*

Дисертацията се състои от четири глави, от които първата е уводът. Тя е в обем от 122 страници текст, съдържание и библиография от 127 заглавия.

Авторът има три публикации по темата, от които две в списания със Scopus Фактор. По темата на дисертацията са изнесено три доклада на конференции – една в БАН (с международно участие), една в Украйна и една в Хърватия. Освен това авторът има още седем статии извън темата на дисертационния труд.

В увода се описва целта на дисертационния труд и се прави кратък обзор на съществуващата литература. Да отбележим, че темата е актуална и функционално диференциалните уравнения (ФДУ), отчитайки предисторията дават по-добро описание на реалните процеси. Разбира се съществуват и ФДУ от „изпреварващ” тип.

Искам още в началото да отбележа, че дисертационният труд е на доста добро научно равнище. За съжаление има още какво да се желае за начина на представяне на резултатите и за качеството на езика.

В следващата (първа по същество) глава авторът описва основните класове ФДУ, които се изучават в дисертацията и представя достатъчно пълни предварителни сведения от функционалния анализ. Това прави представения труд “self contained”, т.е. той може да се чете без справки от друга литература.

Общият вид ФДУ от закъсняващ тип са разгледани първо в работите на Хейл (виж [47]). Те имат формата

$$x'(t)=f(t,x_t),\ x_0=\varphi\ , \qquad (1)$$

където φ и $x_t(s)=x(t+s), s\in[-\sigma,0]$ са непрекъснати функции от $[-\sigma,0]$ в $\boldsymbol{R}^n$

В дисертацията се дават някои конкретни примери на ФДУ от закъсняващ тип – фиксирани или променливи закъснения, тип максима, интегро

добро научно равнище. За съжаление има още какво да се желае за начина

диференциални уравнения (разпределено закъснение). Представените примери са едно от най-големите достойнства на настоящата работа. Освен това са дадени дефиниции за свойствата на решенията – периодичност, избухване "blow up", продължимост и т.н.

Припомнят се основните теореми за съществуване и единственост на решенията, както и някои глобални свойства. Резултатите разбира се са известни, но са необходими по-нататък в дисертацията.

В четвъртата част първо се разглеждат линейни функционално диференциални уравнения. Те се изследват с помоща на характеристичното уравнение. Накрая се изследва най-простото линейно ФДУ

$$x' = Ax(t) + Bx(t-\tau)$$

Припомнят се някои резултати и се показват главните особености на линейни ДУ със закъснение. В тази част се прилага и методът на линеаризацията, когато свойствата на едно нелинейно ДУ се изследват с помоща на главната линейна част.

Най-интересна тук е теорема 2.11. Резултатите в тази глава разбира се са известни, но примерите са интересни и подходящи.

Глава трета е посветена на устойчивостта на общи системи ФДУ от вида (1). Ще отбележим, че по-голямата част от резултатите тук се съдържат в една или друга форма в литературата (например в [47], [56] или [59]).

Тук се дефинират различни видове устойчивост и се разглеждат съответните примери. Дефинират се функционалите и функциите на Ляпунов. Дефинират се функционалите на Ляпунов—Красовски и се показва как те се използват при доказване на устойчивост. По принцип функционалите на Ляпунов се използват за ФДУ от вида (1), а функциите при някои по-частни случаи. Изследват се различни видове устойчивости в зависимост от свойствата на функцията (функционала) на Ляпунов. По-вечето резултати са известни, но богатството от примери прави главата интересна. Според мен нов резултат тук е теорема 3.6. Най-интересни в тази глава са примерите 32 и 3.3.

Теореми 3.11 и 3.12 се използват в следващата глава 4 (по същество глава 3). Представените в глава 3 известни резултати правят работата много по-лесно читаема, което е едно от достойнствата на дисертацията.

Основните оригинални резултати в дисертационния труд се съдържат в последната глава 4.

В първа част се дава достатъчно условие за устойчивост на нулевото решение на началната задача

$$x'(t) = A(t)x + \tilde{f}(t,x),\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

функционалите на Ляпунов—Красовски и се показва как те се използват

относно малко смущение на дясната част с функция, съдържаща закъсняващ аргумент – теорема 4.1, чието доказателство се предхожда от няколко леми. Това е един нов и интересен резултат.

В секция 4.2 се разглежда един клас от полулинейни параболични ФДУ. Тук авторът работи със силни решения, което налага някои относително строги ограничения.

Теорема 4.2 дава достатъчно условие за съществуване на единствено решение. При доказателството се използва развития от Лакшмикантам метод , при който се построяват на две редици от намаляващи горни и растящи долни решения. Оценката (160) ни дава всъщност устойчивостта на решението (при съответните условия на функцията $\phi(.)$, въведена от автора. Съответният резултат е нов и интересен. Тук разбира се остават много отворени проблеми, което дава възможност за нови изследвания на подобни задачи.

В последния параграф на дисертационния труд се разглеждат някои числени методи от типа на Рунге—Кута за импулсни системи с нефиксирани времена на скокове на решенията, съдържащи фиксирано закъснение. Численото решаване на такива проблеми е сложно, понеже трябва да се прави оценка на точките на прекъсване на решението. При някои задачи това води до силно нарастване на грешката. Освен това, както е известно, наличието на закъснение води до прекъсване на производните (виж [16] от библиографията).

В този параграф на глава 4 на представения дисертационен труд всъщност липсват нови теоретични резултати. Основната цел е да се покаже чрез подходящи примери, че решението получено по метода на Рунге—Кута дава добро приближение на точното такова и освен това е устойчиво. Разбира се това е направено за задачи с малък брой скокове. Числените примери са подходящи и решението им е много добре представено. Последният пример разглежда импулсно ОДУ, при което има биене на решението и то „умира“. Но численото решение е възможно във всеки затворен интервал, извън който се намира точката на „умиране“ разбира се със съответната загуба на точност.

Тук отворен въпрос остава за какви задачи грешката нараства относително малко, когато точките на прекъсване са много. Освен това интересен въпрос представлява и устойчивоста на самите числени методи на Рунге—Кута.

2. *Оценка на структурата и съдържанието на дисертационния труд*

Вижда се, че дисертантът е изучил огромна по обем литература и показва едно много добро владеене на теоретичния материал. Едно от основните достойнства на дисертацията е наличието на повече от достатъчен брой интересни примери. Това, заедно с пълното изложение на необходимите резултати, правят дисертацията лесно разбираема.

направено за задачи с малък брой скокове. Числените примери са подходя

Работата съдържа и достатъчен брой нови резултати. Тя освен това допуска продължение, т.е. резултатите могат да бъдат получени и за по-общи системи ФДУ. Разглежданите числени примери в глава четвърта са нетривиални и при тях използването на DE solwer от пакетите Математика, Матлаб или Мейпъл е затруднено, понеже в тези пакети няма програми за решаване на ДУ със закъснение, когато началното условие е с прекъсване.

Вижда се, че авторът е бързал и поради това работата съдържа някои неприятни „misorints“ (нещо като печатни грешки). Например в пример 3.2 е поискано $|b|<0$. Очевидно това е една техническа грешка. Такива не липсват, но това не намалява стойноста на дисетъацията. Номерацията на лемите е неподходяща и в различните глави има леми с еднакви номера. Тези критични забележки ни най-малко не намалява стойноста на дисертационния труд.

Представените три публикации са със съавтори, но приносът на дисертанта не буди съмнение. Освен това авторът има и седем публикации извън темата, което показва, че господин Зейнев има многостранни научни интереси. Дисертантът има публикаци в авторитетни международни списания някои, от които със Scopus фактор.

3. *Критики и препоръки*

Критики в математическо отношение нямам. Редакционно и езиково обаче, работата може да бъде подобрена. Това е коментирано по-горе.

Препоръчвам на автора да продължи с активните си занимания. Например по мое мнение едно обобщени на теорема 4.1 в случай на негладка дясна част, когато и другите условия могат да се отслабят (разбира се тогава се наместват пространствата на Соболев и обобщените производни) би било много интересно.

Би било интересно също да се разгледат методи от тип Рунге—Кута за задачи с нефиксирано закъснение при съответни ограничения. Тази задача е по-трудна, но и много по-интересна.

4. Заключение

От гореизложеното може да се извади заключение, че дисертантът се изявява като един талантлив математик, което ми дава основание да препоръчам на уважаемото научно жури да присъди на Адем Ибушев Зейнев образователната и научна степен “доктор”, която той напълно заслужава. Това ще бъде една подходяща оценка за научната му дейност.

София, 10.02.2017

Изготвил:
(проф. д-р Ц. Дончев)