Р Е Ц Е Н З И Я

от: проф. дмн Гани Трендафилов Стамов

върху дисертационен труд на тема: **“Математическо моделиране чрез диференциални уравнения с импулси”;**
с автор: **Ангел Ангелов Дишлиев;**
за придобиване на: образователната и научна степен “доктор”;
научна област: 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5 Математика;
научна специалност: Математическо моделиране и приложение на математиката

В представената рецензия ще се придържам стриктно към изискванията и препоръките на Правилника за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности (ППНСЗАД) в ХТМУ, София.

1. Кратки биографични данни и характеристика на научните интереси на кандидата.

Г-н Ангел Ангелов Дишлиев е роден през 1987 г. в София. През 2010 г. е завършил ХТМУ-София и е придобил бакалавърска степен на образование с квалификация: „Автоматика и информационни технологии“. По-късно, отново в същия университет, придобива магистърска степен на образование с квалификация: „Индустриален мениджмънт“. В ХТМУ-София, същият е завършил и две-годишен курс (следдипломна квалификация) по: „Енергийна и екологична ефективност“. От 01.03 2014 г. до 01.03 2017 г. е редовен докторант към катедра Математика на ХТМУ. Отчислен е с право на защита. Научни ръководители на докторанта са проф. Ангел Дишлиев и доц. Светослав Ненов.

Научните му интереси са разнообразни, ще акцентирам на:
- качествена теория на диференциалните уравнения;
- математическо моделиране;
- теория на обучението по математика.

2. Преглед на дисертационния труд и анализ на резултатите.

Дисертационният труд е поместен на 159 стандартни страници. Състои се от увод, четири глави, заключение и библиография от 283 източника. Всяка една от четирите глави съдържа по два параграфа. В дисертацията са използвани 9 фигури.

Уводът (поместен на 20 стр.) е съществена част от дисертацията. Най-напред е направена класификация на диференциалните уравнения с импулсни въздействия, свързана с начина на опрерделяне на импулсните моменти. Понататък е направено кратко описание на разглежданите в дисертацията класове уравнения:

- с импулсни моменти, които съвпадат с моментите, в които траекторията на диференциалното уравнение среща предварително зададени множества, разположени във фазовото пространство на уравнението;
- с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които решението минимизира предварително зададен функционал;
- с импулсни моменти, които са произволни.

Посочена е най-важната характеристика на решенията на такъв клас системи диференциални уравнения – фактът, че решенията им са частично непрекъснати функции. В общия случай, разгледан в дисертацията, моментите на прекъсване на решенията (импулсните моменти) съвпадат с моментите на смяна на дясната страна на системата (моментите на структурни промени). Тези моменти в дисертацията се наричат превключващи.

В увода е направен анализ на приложенията на диференциалните уравнения с импулси. Цитирани са десетки конкретни техни реализации. Като пример е разгледан обобщен импулсен аналог на модела на Lotka–Volterra. Чрез него сравнително адекватно се описва динамиката на изолирано съобщество от два вида (хищник и жертва), намиращи се в антагонистични отношения. Съобществото е подложено на външни въздействия (обикновено дължащи се на намесата на човека). Тези въздействия се изразяват в дискретни отнемания или добавяния на определени количества биомаса както към жертвата, така и към хищника.

Глава 1 на дисертацията е посветена на един важен въпрос, характерен само за диференциалните уравнения с променлива структура и импулсни въздействия, а именно вибрации на техните решения. В представените изследвания, десните страни на уравненията са автономни и нелинейни. Превключващите моменти (разгледани в тази глава) съвпадат с моментите, в които траекторията на съответната начална задача анулира последователно всяка една от предварително зададените функции, дефинирани във фазовото пространство G на диференциалното уравнение, които в дисертацията се наричат превключващи функции. Лесно се съобразява, че превключващите моменти $t_1, t_2, \dots$ зависят от изходната точка на съответната начална задачата, т.е. (най-общо казано) те са различни за всяка начална задача. Можем да запишем, че $t_1 = t_1(x_0)$, $t_2 = t_2(x_0), \dots$, където x_0 е изходната (началната) точка на разглежданата задача. Ако за някое начално условие, превключващите моменти притежават точка на сгъстяване, то се казва че решението "вибрира". В този случай решението не е продължимо надясно от тази точка или казано по друг начин, при такава ситуация решението "загива" поради импулсните въздействия. Тогава не е възможно да се дефинират редица важни качества на решенията, като например: устойчивост, дихотомия, монотонност, осцилиране, периодичност, асимптотическа еквивалентност и т.н. Поради това намирането на условия, които гарантират отсъствие на феномена вибриране на решенията, е важно, а в повечето случаи **задължително** предварително изследване. Ще припомним, че някои качества на решенията на диференциалните уравнения с променлива структура и импулсни въздействия при наличие на вибрации са изследвани в работите:

K. Dishlieva, A. Dishliev, R. Chukleva, S. Petkova, Continuous dependence on the impulsive effects of dying solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, European J. of Mathematical Sciences, Vol. 2, Issue 3, (2013), 215-228.;

K. Dishlieva, A. Dishliev, C. Girginov, S. Petkova, Continuous dependence in case of permanent active effects on the partially bounded solutions of differential equations with variable structure, J. of Advanced Research in Dynamical and Control Systems, Vol. 5, Issue 2, (2013), 16-33.

Основните резултати в главата (формулирани и доказани в три теореми) се отнасят до намирането на достатъчни условия, гарантиращи съществуване на границата

$$\left(\forall x_0 \in G\right) \Rightarrow \lim_{i\to\infty} t_i\left(x_0\right) = \infty .$$

Във втория параграф на първа глава се изследва динамиката на биомасата на изолирана популация. Един адекватен математически модел на този процес е уравнението на Gompertz, решенията на което са строго монотонни функции, т.е. биомасата на описваната популация постоянно нараства. Известно е, че растежът на биомасата е сравнително по-интензивен, ако количеството е в определени граници. Поради тази причина е желателно биомасата да се поддържа в тези „оптимални“ граници чрез дискретни външни въздействия, които се състоят в импулсно отнемане на определено количество биомаса. Импулсните въздействия се осъществяват при достигане на количеството биомаса до предварително фиксирана пределна горна граница, ограничаваща отгоре „оптималните“ количества на биомасата (при които растежът е сравнително по-интензивен). Освен това при отнеманията на биомаса е възможно да се изменя и законът на развитие (параметрите) на популацията. Това означава, че се променя и структурата на модела на Gompertz. За така дефинирания динамичен модел чрез диференциални уравнения с променлива структура и импулси са посочени лесно проверяеми условия, при които отсъства феномена вибриране на решението. Това означава, че животът на популацията е продължим до безкрайност и не се наблюдава загиване на популацията поради импулсните въздействия. Освен това, във всеки ограничен времеви интервал се осъществяват краен брой отнемания на биомаса. Това е важно за производителя на биомасата, тъй като при този режим на производство (добив на биомаса) се осигурява необходимото минимално технологично време между последователните отнемания на биомаса, което може да се използва за реализиране на продукцията.

Във втора глава се изучава един нов клас нелинейни неавтономни диференциални уравнения с импулсни въздействия. Тук импулсните въздействия се осъществяват в произволни моменти $t_1, t_2, \ldots$, за които се предполага, че удовлетворяват неравенствата $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, където t_0 е началният момент. Въведени са няколко нови понятия: устойчивост и равномерна устойчивост относно началното условие при произволни импулсни моменти; локална (равномерна) Липшицова устойчивост при произволни импулсни моменти; глобална (равномерна) Липшицова устойчивост при произволни импулсни моменти и др.

Най-важната цел на изследванията в тази глава е да се намерят достатъчни условия, гарантиращи различни типове устойчивост на решението на съответната начална задача (споменати по-горе) при произволни импулсни моменти. Разбира се, основната трудност произтича от произволния характер на моментите на импулсни въздействия. Тази неопределеност на моментите се компенсира с по-сериозни изисквания към параметрите на изучаваните уравнения. Предполага се:

- специална Липшицова непрекъснатост на дясната страна:

$$\left(\forall t \geq t_0\right)\left(\forall x', x'' \in G\right) \Rightarrow \left\| f\left(t, x'\right) - f\left(t, x''\right)\right\| \leq C_{Lip}\left(t\right)\left\|x' - x''\right\|, \text{ където } \int_0^\infty C_{Lip}\left(s\right) ds < \infty;$$

- специална Липшицова непрекъснатост на импулсните функции:

$$\left(\forall x', x'' \in G\right) \Rightarrow \left\| I_i\left(x'\right) - I_i\left(x''\right)\right\| \leq C_{I_i} \cdot \left\|x' - x''\right\|, \quad i = 1, 2, \ldots, \text{ където } \sum_{i=1,2,\ldots} C_{I_i} < \infty .$$

Получените резултати се прилагат върху модел на изолирана популация, развиваща се в среда без ограничение на хранителния ресурс, като растежът на биомасата се определя чрез класическия логистичен закон. Изолираният вид е подложен на външни въздействия (които се изразяват в импулсни отнемания или добавяния на биомаса) и които се осъществяват в произволни моменти. Във втория параграф на главата е установено, че за такъв тип модели при наличието на лесно проверяеми естествени условия, биомасата има специфично устойчиво поведение (количеството на биомасата на популацията е равномерно локално Липшицово устойчиво). Това означава, че при сравнително „малки" изменения на началното количество на биомасата се достига до „малки" изменения на биомасата във всеки момент след началото. Тази непрекъснатост е от Липшицов тип.

В глава 3 се изследва асимптотическата устойчивост на ненулевите решения на нелинейни неавтономни диференциални уравнения с променлива структура и импулсни въздействия. Разликата с уравненията, които са изследвани в глава 1, е във вида на превключващите множества (функции).

Тук, тези множества представляват хиперравнини, т.е. те са частен случай на превключващите множества на уравненията от глава 1. Тези хиперравнини са разположени във фазовото пространство. Основната и смутената задачи притежават различни начални точки. Този факт дава отражение при определяне на моментите на импулсни въздействия и промяна на десните страни, т.е. на така наречените превключващи моменти. Изрично ще подчертаем, че ако началните точки са различни, то (в общия случай), следва че съответните превключващи моменти са също различни, т.е.

$$\left(\left(t_0^*, x_0^*\right) \neq \left(t_0, x_0\right)\right) \Rightarrow \left(t_1^* \neq t_1,\ t_2^* \neq t_2, \ldots\right),$$

където (t_0, x_0) и (t_0^*, x_0^*) са началните точки на двете задачи, а $t_1, t_2, \ldots$ и $t_1^*, t_2^*, \ldots$ са съответните им превключващи моменти. Ясно е, че при дефинирането на устойчивост за тези типове уравнения "равномерна близост" между решението на изходната задача и решението на съответната смутена задача не може да се изисква за всяко $t \geq t_0^{\max} = \max\left\{t_0^*, t_0\right\}$. Равномерната близост е допустимо да се нарушава, когато времевият аргумент принадлежи на "достатъчно малки" околности на моментите на превключване на изходната задача, т.е. при $t \geq t_0^{\max}$ и $|t - t_i| < \eta_i,\ i = 1, 2, \ldots$, където $\eta_i,\ i = 1, 2, \ldots$, са положителни константи. Освен това се предполага, че $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta$, където η е произволна положителна константа. С други думи, времетраенето на "неконтролируемото разстояние" между двете решения е с произволно (избрана) малка обща продължителност. Посоченият специфичен феномен предизвиква и основните трудности при изследване качествата на решенията на уравненията с променливи превключващи моменти. Налагат се сериозни предварителни изследвания, които се отнасят до намирането на достатъчни условия за:

- отсъствие на вибрации на решенията (тук във връзка с частния вариант на превключващите множества – хиперравнини от фазовото пространство - условията са сравнително по-леки от условията в глава 1);
- достижимост на всяко превключващо множество от траекторията на разглежданата задача;
- съществуване, неограничена продължителност и единственост на решенията и др.

Основният теоретичен резултат в главата е формулирането на достатъчни условия, при които ненулевите решения на разглежданите уравнения с променлива структура и импулси са асимптотически устойчиви. Определящото предположение е, че ненулевите решения на всяко едно от съответните съставящи уравнения без импулси са експоненциално устойчиви. С други думи, от локални свойства на съставящите уравнения се доказват глобални качества на решенията на уравнението с променлива структура и импулси.

Резултатите от трета глава са приложени върху математически модел на лечение на заболявания чрез поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта (плазмата) на пациента. Поддържането на терапевтичната концентрация се осъществява чрез прекъснато (импулсно) подаване на лекарството през определени времеви интервали. При този тип лечение, лекуващият лекар може да управлява два фармакокинетични параметъра:

- размер на еднократната доза на лекарството D_i;
- дължина на дозовия интервал T_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots$.

Нека $C^{\min}$ и $C^{\max}$, $0 < C^{\min} < C^{\max}$, са съответно долната и горната граници на терапевтичната концентрация $C = C(t)$ на лекарството. Интервалът $C^{\min} \le C \le C^{\max}$ се нарича терапевтичен прозорец. С други думи, ако концентрацията е между $C^{\min}$ и $C^{\max}$, то лекарственото средство има полезно въздействие върху пациента. Вливането на лекарствено средство се извършва в моментите $t_1, t_2, \ldots$, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, когато концентрацията $C(t)$ достига долната терапевтична граница $C^{\min}$. В интервала между две последователни вливания концентрацията е строго намаляваща функция, тъй като лекарството се кумулира от пациента. При лесно проверяеми условия е установено, че лекарственото средство се разгражда експоненциално устойчиво. С помощта на доказаните в предходния параграф твърдения се заключава, че концентрацията на лекарството в продължение на целия терапевтичен процес, който практически може да не е ограничен, е асимптотически устойчиво. Направен е сериозен анализ на постигнатите приложни резултати от гледна точка на фармакокинетиката.

Последната глава е посветена на намирането на определени оптимални свойства на решенията на нелинейни, автономни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива на съответната начална задача среща така наречената "бариерна права" с уравнение $x = X^{\min} = const > 0$, разположена в разширеното фазовото пространство $(t, x) \in R^+ \times R^+$ и която е успоредна на оста на времето. Тази права съвпада с контура на „горната“ полуравнина, в която лежат интегралните криви на съответните начални задачи. При всяка начална точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times (X^{\min}, \infty)$ от въпросната полуравнина интегралната крива среща бариерната права. За целта се предполага, че дясната страна на уравнението е отрицателна. В момента на срещата се осъществява импулсно въздействие, което мигновено премества интегралната крива от точка, принадлежаща на контура, в точка от вътрешността на горната полуравнина относно бариерната права.

Нека положителните константи $I^{\min}, I_{\Sigma} \in R^{+}$ са предварително зададени и $I^{\min} \leq I_{\Sigma}$. По-точно, константата $I^{\min}$ е фиксираната долна граница на големините на импулсните въздействия, а константата I_{Σ} е максималната допустима сума от големините на импулсните въздействия. Импулсните въздействия $I_1, I_2, ..., I_k$ (k на брой) са допустими, ако са валидни неравенствата:

$$I_i \geq I^{\min},\ \ i = 1,2,...,k \ \text{ и } \sum_{i=1,...,k} I_i \leq I_{\Sigma}.$$

Ще подчертаем, че броят k на допустимите импулсни въздействия и техните големини не са фиксирани. Допустимите импулсни въздействия $I_1^{opt}, I_2^{opt}, ..., I_{k_{opt}}^{opt}$ (k^{opt} на брой) се наричат оптимални, ако решението $x(t;t_0,x_0)$ на съответната начална задача удовлетворява неравенството $x(t;t_0,x_0) \geq X^{\min}$ за период от време с максимална дължина. Доказани са следните основни твърдения:

- Броят на оптималните импулсни въздействия е $k_{opt} = \left[\dfrac{I_{\Sigma}}{I^{\min}}\right]$;
- Оптималните импулсни въздействия $I_1^{opt}, I_2^{opt}, ..., I_{k_{opt}}^{opt}$ удовлетворяват равенствата $I_1^{opt} = I_2^{opt} = ... = I_{k_{opt}}^{opt} = \dfrac{I_{\Sigma}}{k_{opt}}$.

Ще отбележим, че са доказани десетина предварителни твърдения, които имат самостоятелен интерес. Тези твърдения се отнасят за оценки на продължителността на времевия интервал през който е валидно неравенството $x(t;t_0,x_0) \geq X^{\min}$ при няколко варианта на импулсните въздействия.

Накрая, получените теоретични резултати в последната глава са приложени върху импулсен математически модел за лечение чрез поддържане на терапевтичната концентрация на лекарството в кръвта на пациента. Предполага се, че:

- долната граница на терапевтичния прозорец на лекарствената концентрация е $C^{\min}$;
- всяка импулсна лекарствена доза $D_i \geq D^{\min}$, $i = 1,2,...,$ където константата $D^{\min}$ е зададена;
- наличното лекарствено средство е в обем D_{Σ}.

За посоченият модел са намерени броят на вливанията на лекарственото средство, моментите на вливанията и дозите, така, че лечебната концентрация да се поддържа в максимално дълъг период от време.

3. Оценка на съответствието между автореферата и дисертационния труд

Авторефератът напълно отговаря на изискванията на чл. 11 ал. 5 от ППНСЗАД на ХТМУ. В него са посочени:

- основните цели и задачи на дисертационния труд;
- актуалност на разгледаните проблеми;
- използваните методи (съвпадат с традиционните методи на математическия анализ и в частност на обикновените диференциални уравнения);
- основните дефиниции и нови понятия;
- основните твърдения;
- основните числови и моделни примери;
- заключението на дисертационния труд;
- библиографията.

Ще отбележа, че заключението отразява кратко и коректно постигнатото от докторанта в предложения за рецензиране дисертационен труд.

Материалът е изложен така, че читателят може да добие пълна и адекватна представа за резултатите в дисертацията.

4. Характеристика и оценка на приносите в дисертационния труд.

Получените резултати са посветени на фундаменталната и качествената теория на няколко класа диференциални уравнения с променлива структура и импулси, както и на техните приложения. Намерени са досттъчни условия, при които:

- моментите на превключване не притежават точка на сгъстяване;
- ненулевите решения притежават няколко типа устойчивост;
- ненулевите решения притежават оптимални свойства. По точно, при зададена сума на импулсните въздействия са намерени: броят на импулсните въздействия; техните големини и моментите, в които те се реализират, така че решението да е максимално продължимо.

Посочените по-горе теоретични резултати са приложени върху конкретни обобщени динамични математически модели от популационната динамика и фармакокинетиката, подложени на импулсни външни въздействия (модели на Gompertz, Verhulst, Lotka–Volterra, терапевтичен режим чрез импулсно вливане на лекарствено средство и др.).

Заслугите на дисертационния труд са основно в попълването на познанието в споменатите по-горе научни направления. Особен интерес представлява въведения и изучен клас диференциални уравнения с импулсни въздействия, които се осъществяват в произволни моменти.

5. Мнение за публикациите на докторанта по темата на дисертационния труд.

По темата на дисертационния труд дисертантът участва с три научни публикации. Трите са публикувани в международни научни списания. Едното от списанията е с SJR Indicator. Всичките публикации по дисертацията са в съавторство. Считам, че представените публикации напълно удовлетворяват изискванията за придобиване на образователната и научна степен "доктор", разписани в чл. 11 (4) от ППНСЗАД на ХТМУ. Г-н А. А. Дишлиев е участвал с научни доклади в две конференции с международно участие у нас и една международна конференция в чужбина (Лондон). Научните му трудове са публикувани през 2015 г. и според мен все още е рано да се очакват цитирания.

6. Критични бележки и коментари.

Няколкото технически грешки, списък от които предадох на автора и на които тук няма да се спирам, са неизбежни при написването на подобен научен труд. Прави приятно впечатление добрият стил и математическата строгост на изказа в рецензираната работа.

Накрая бих си позволил да формулирам няколко задачи, които може да представляват интерес за бъдещата изследователска дейност на г-н А. А. Дишлиев:

Задача 1. Както беше споменато в точка 2 на настоящата рецензия (при прегледа на резултатите в глава 1), импулсните моменти $t_1, t_2, \ldots$ зависят от изходната точка x_0 на съответната начална, т.е. $t_1 = t_1(x_0)$, $t_2 = t_2(x_0), \ldots$. Да се намерят условия, при които тази зависимост е непрекъсната. Да се намерят условия, при които функциите $t_1, t_2, \ldots$ са диференцируеми относно изходната точка. Да се намерят уравненията във вариации, които удовлетворяват тези функции.

Задача 2. Да се изучат други типове устойчивост (различни от представените в дисертацията) на решенията на диференциалните уравнения с импулсни въздействия, които се реализират в произволни моменти. Според мен интерес представляват изследвания за някои видове специфични устойчивости на тези решения. Например, устойчивост относно големините на импулсните въздействия и относно произволните импулсни моменти. Последната устойчивост можем да формулираме по следния начин:

Ще казваме, че решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) (за формулировката на задачата виж дисертационния труд или автореферата) е ***устойчиво относно произволните импулсни моменти****, ако*

$$
\begin{gathered}
(\forall \varepsilon = const > 0)\left(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times G\right) \\
\left(\forall T = \{t_1, t_2, \ldots\};\ t_0 < t_1 < t_2 < \ldots,\ \lim_{i \to \infty} t_i = \infty\right) \\
\left(\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0, T) > 0\right): \\
\left(\forall T^* = \{t_1^*, t_2^*, \ldots\},\quad t_0 < t_1^* < t_2^* < \ldots,\quad \left|t_i^* - t_i\right| < \delta,\ i = 1, 2, \ldots\right) \\
\Rightarrow \left\| x(t; t_0, x_0, T^*) - x(t; t_0, x_0, T) \right\| < \varepsilon,\ \ t_0 \le t < \infty,\ \left|t - t_i\right| > \delta,\ i = 1, 2, \ldots.
\end{gathered}
$$

7. Лични впечатления за дисертанта.

Познавам дисертанта от неговото участие в организирането и провеждането на Международните колоквиуми по математика, провеждани в град Пловдив преди десетина години. Присъствал съм на няколко научни дискусии с участието на докторанта. Считам, че той е любознателен млад учен, който е придобил умения за самостоятелна научна работа. Усвоил е основните методи на качествения анализ на специален тип диференциални уравнения с широк спектър на приложения. Придобил е афинитет към прилагане на изследванията към съответни моделни уравнения на процеси от науката и практиката, които имат прекъснат характер. Скромността, любезността и неговата отзивчивост са добродетели, които неотклонно съпътстват работата му в творчески колективи.

8. Заключение.

Въз основа на запознаването ми с представените научни трудове, тяхната значимост, съдържащите се в тях научни и научноприложни приноси, намирам за основателно да заявя, че мнението ми относно придобиването на образователната и научна степен “доктор” в:
област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
научната специалност: Диференциални уравнения
от инж. Ангел Ангелов Дишлиев, **е положително**.

20. 04. 2017 г.

Рецензент:..........................
(проф. Г. Стамов)